

Primitives

Définition

On appelle primitive d'une fonction f sur un intervalle I , toute fonction F définie et dérivable sur I , dont la dérivée est f .

Si F est une primitive de f sur I , alors l'ensemble des primitives de f sur I est l'ensemble des fonctions G de la forme $G = F + k$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Soit f une fonction ayant des primitives sur un intervalle I , soit $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$. Il existe une et une seule primitive F de f telle que $F(x_0) = y_0$.

Toute fonction dérivable sur un intervalle I a des primitives sur I .
Toute fonction continue sur un intervalle I a des primitives sur I .

Primitives des fonctions usuelles

<u>Fonction</u>	<u>Primitives</u>	<u>Intervalle</u>
$f(x) = 0$	$F(x) = k \quad k \in \mathbb{R}$	\mathbb{R}
$f(x) = 1$	$F(x) = x + k \quad k \in \mathbb{R}$	\mathbb{R}
$f(x) = a$	$F(x) = ax + k \quad k \in \mathbb{R}$	\mathbb{R}
$f(x) = x$	$F(x) = \frac{1}{2}x^2 + k \quad k \in \mathbb{R}$	\mathbb{R}
$f(x) = x^2$	$F(x) = \frac{1}{3}x^3 + k \quad k \in \mathbb{R}$	\mathbb{R}
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$F(x) = -\frac{1}{x} + k \quad k \in \mathbb{R}$	$]0; +\infty[$ ou $]-\infty; 0[$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x} + k \quad k \in \mathbb{R}$	$]0; +\infty[$
$f(x) = x^n \quad n \in \mathbb{Z} - \{-1\}$	$F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + k \quad k \in \mathbb{R}$	$]0; +\infty[$ ou $]-\infty; 0[$ ($n < 0$) \mathbb{R} ($n \geq 0$)
$f(x) = \exp(x)$	$F(x) = \exp(x) + k \quad k \in \mathbb{R}$	\mathbb{R}
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln(x) + k \quad k \in \mathbb{R}$	$]0; +\infty[$

Propriétés

Si F est une primitive de f sur I et si G est une primitive de g sur I , alors $F+G$ est une primitive de $f+g$ sur I .

Si F est une primitive de f sur I et si a est un réel, alors aF est une primitive de af sur I .

ATTENTION

Un produit de primitives n'est pas une primitive du produit.
Un quotient de primitives n'est pas une primitive du quotient.

Une fonction de la forme $u'u^n$ avec $n \in \mathbb{Z} - \{-1\}$ a pour primitives les fonctions de la forme $\frac{1}{n+1}u^{n+1} + k$ avec $k \in \mathbb{R}$.

Une fonction de la forme $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ a pour primitives les fonctions de la forme $2\sqrt{u} + k$ avec $k \in \mathbb{R}$.

Une fonction de la forme $u' \cdot (v \circ u)$ a pour primitives les fonctions de la forme $v \circ u + k$ avec $k \in \mathbb{R}$.

Une fonction de la forme $u' \cdot \exp(u)$ a pour primitives les fonctions de la forme $\exp(u) + k$ avec $k \in \mathbb{R}$.

Une fonction de la forme $\frac{u'}{u}$ a pour primitives les fonctions de la forme

$\ln(|u|) + k$ avec $k \in \mathbb{R}$.

Intégration par parties

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I , dont les dérivées u' et v' sont continues sur I .

On a alors pour $a \in I$ et pour $b \in I$,

$$\int_a^b u(t).v'(t)dt = [u(t).v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t).v(t) dt$$