

# Primitives

## Définition

On appelle primitive d'une fonction  $f$  sur un intervalle  $I$ , toute fonction  $F$  définie et dérivable sur  $I$ , dont la dérivée est  $f$ .

Si  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $I$ , alors l'ensemble des primitives de  $f$  sur  $I$  est l'ensemble des fonctions  $G$  de la forme  $G = F + k$ , avec  $k \in \mathbb{R}$ .

Soit  $f$  une fonction ayant des primitives sur un intervalle  $I$ , soit  $x_0 \in I$  et  $y_0 \in \mathbb{R}$ . Il existe une et une seule primitive  $F$  de  $f$  telle que  $F(x_0) = y_0$ .

**Toute fonction dérivable sur un intervalle  $I$  a des primitives sur  $I$ .**  
**Toute fonction continue sur un intervalle  $I$  a des primitives sur  $I$ .**

## Primitives des fonctions usuelles

<u>Fonction</u>	<u>Primitives</u>	<u>Intervalle</u>
$f(x) = 0$	$F(x) = k \quad k \in \mathbb{R}$	IR
$f(x) = 1$	$F(x) = x + k \quad k \in \mathbb{R}$	IR
$f(x) = a$	$F(x) = ax + k \quad k \in \mathbb{R}$	IR
$f(x) = x$	$F(x) = \frac{1}{2}x^2 + k \quad k \in \mathbb{R}$	IR
$f(x) = x^2$	$F(x) = \frac{1}{3}x^3 + k \quad k \in \mathbb{R}$	IR
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$F(x) = -\frac{1}{x} + k \quad k \in \mathbb{R}$	] $0$ ; $+\infty$ [ ou ] $-\infty$ ; $0$ [
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x} + k \quad k \in \mathbb{R}$	] $0$ ; $+\infty$ [
$f(x) = x^n \quad n \in \mathbb{Z} - \{-1\}$	$F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + k \quad k \in \mathbb{R}$	] $0$ ; $+\infty$ [ ou ] $-\infty$ ; $0$ [ ( $n < 0$ ) IR ( $n \geq 0$ )
$f(x) = \exp(x)$	$F(x) = \exp(x) + k \quad k \in \mathbb{R}$	IR
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln(x) + k \quad k \in \mathbb{R}$	] $0$ ; $+\infty$ [

## Propriétés

Si  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $I$  et si  $G$  est une primitive de  $g$  sur  $I$ , alors  $F+G$  est une primitive de  $f+g$  sur  $I$ .

Si  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $I$  et si  $a$  est un réel, alors  $aF$  est une primitive de  $af$  sur  $I$ .

## ATTENTION

Un produit de primitives n'est pas une primitive du produit.  
Un quotient de primitives n'est pas une primitive du quotient.

Une fonction de la forme  $u'u^n$  avec  $n \in \mathbb{Z} - \{-1\}$  a pour primitives les fonctions de la forme  $\frac{1}{n+1}u^{n+1} + k$  avec  $k \in \mathbb{R}$ .

Une fonction de la forme  $\frac{u'}{\sqrt{u}}$  a pour primitives les fonctions de la forme  $2\sqrt{u} + k$  avec  $k \in \mathbb{R}$ .

Une fonction de la forme  $u' \cdot (v \circ u)$  a pour primitives les fonctions de la forme  $v \circ u + k$  avec  $k \in \mathbb{R}$ .

Une fonction de la forme  $u' \cdot \exp(u)$  a pour primitives les fonctions de la forme  $\exp(u) + k$  avec  $k \in \mathbb{R}$ .

Une fonction de la forme  $\frac{u'}{u}$  a pour primitives les fonctions de la forme

$\ln(|u|) + k$  avec  $k \in \mathbb{R}$ .

## Intégration par parties

Soient  $u$  et  $v$  deux fonctions dérivables sur un intervalle  $I$ , dont les dérivées  $u'$  et  $v'$  sont continues sur  $I$ .

On a alors pour  $a \in I$  et pour  $b \in I$ ,

$$\int_a^b u(t).v'(t)dt = [u(t).v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t).v(t) dt$$