

Coloration d'arêtes à distance 2

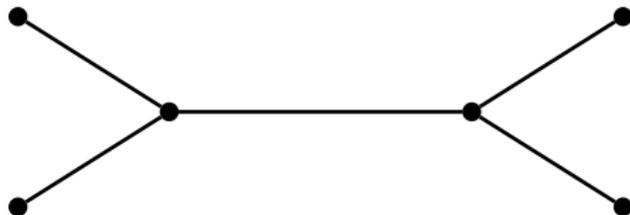
Hervé Hocquard Pascal Ochem Petru Valicov

Université de Bordeaux, France

GT 2011
4 Février 2011

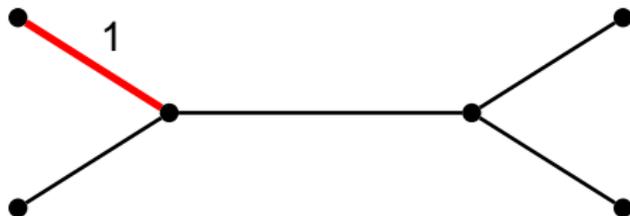
k -coloration forte d'arêtes

Une *k -coloration forte d'arêtes* d'un graphe G est une application $c : E(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$ de telle sorte que deux arêtes adjacentes ou adjacentes à une même arête reçoivent des couleurs différentes.



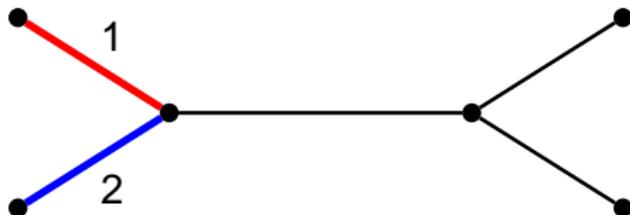
k -coloration forte d'arêtes

Une *k -coloration forte d'arêtes* d'un graphe G est une application $c : E(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$ de telle sorte que deux arêtes adjacentes ou adjacentes à une même arête reçoivent des couleurs différentes.



k -coloration forte d'arêtes

Une *k -coloration forte d'arêtes* d'un graphe G est une application $c : E(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$ de telle sorte que deux arêtes adjacentes ou adjacentes à une même arête reçoivent des couleurs différentes.



k -coloration forte d'arêtes

Une *k -coloration forte d'arêtes* d'un graphe G est une application $c : E(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$ de telle sorte que deux arêtes adjacentes ou adjacentes à une même arête reçoivent des couleurs différentes.



k -coloration forte d'arêtes

Une *k -coloration forte d'arêtes* d'un graphe G est une application $c : E(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$ de telle sorte que deux arêtes adjacentes ou adjacentes à une même arête reçoivent des couleurs différentes.



k -coloration forte d'arêtes

Une *k -coloration forte d'arêtes* d'un graphe G est une application $c : E(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$ de telle sorte que deux arêtes adjacentes ou adjacentes à une même arête reçoivent des couleurs différentes.



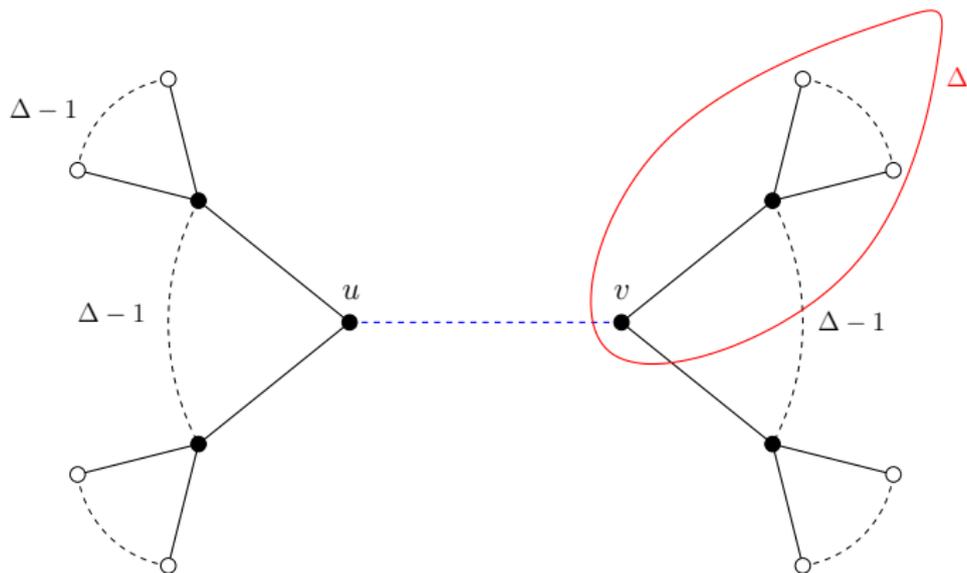
k -coloration forte d'arêtes

Une *k -coloration forte d'arêtes* d'un graphe G est une application $c : E(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$ de telle sorte que deux arêtes adjacentes ou adjacentes à une même arête reçoivent des couleurs différentes.

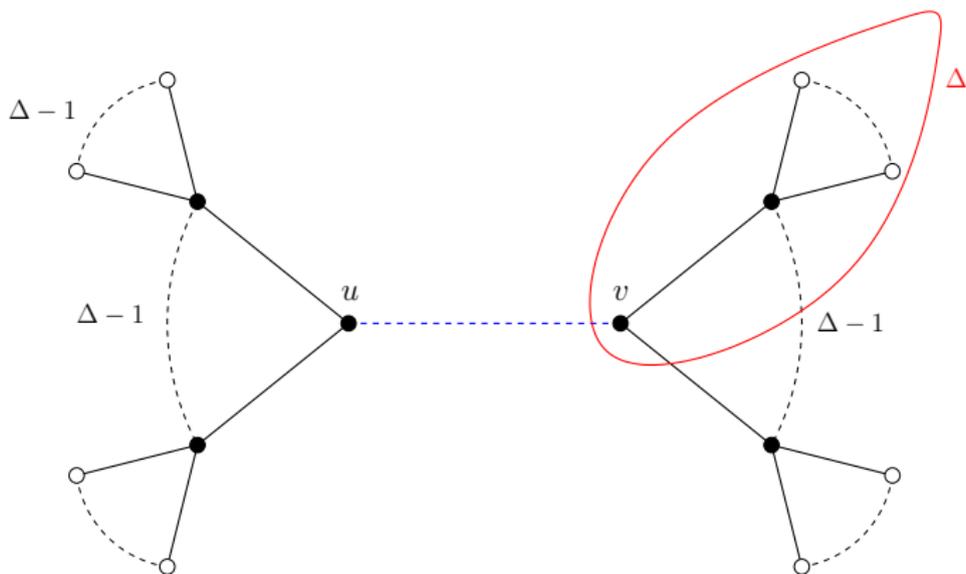
L'*indice chromatique fort* de G , $\chi'_s(G)$, est le plus petit entier k tel que G admette une k -coloration forte d'arêtes.



Borne triviale



Borne triviale



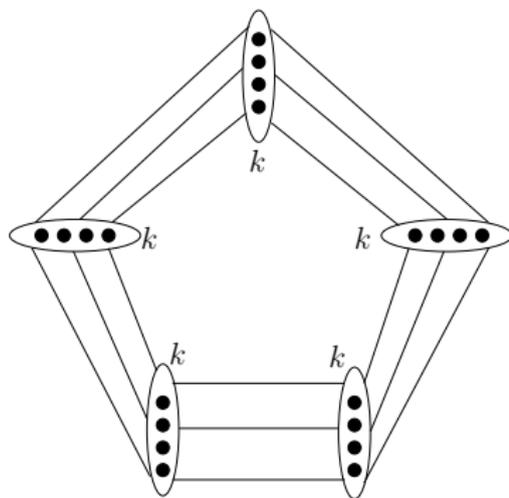
$$\chi'_s(\mathbf{G}) \leq 2\Delta(\Delta - 1) + 1$$

Conjecture [Erdős, Nešetřil, 1985]

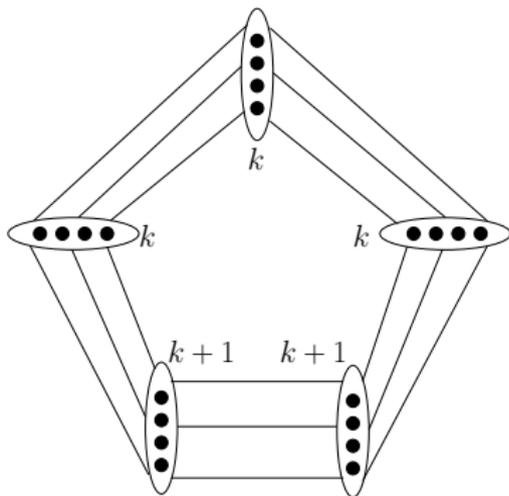
$\chi'_s(G) \leq \frac{5}{4}\Delta^2$ si Δ est pair et $\chi'_s(G) \leq \frac{1}{4}(5\Delta^2 - 2\Delta + 1)$ si Δ est impair.

Conjecture [Erdős, Nešetřil, 1985]

$\chi'_s(G) \leq \frac{5}{4}\Delta^2$ si Δ est pair et $\chi'_s(G) \leq \frac{1}{4}(5\Delta^2 - 2\Delta + 1)$ si Δ est impair.

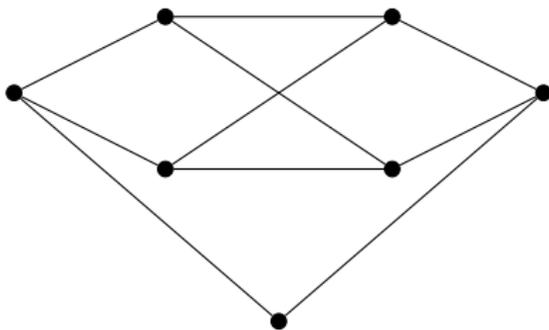


$$\Delta = 2k, \chi'_s = 5k^2$$



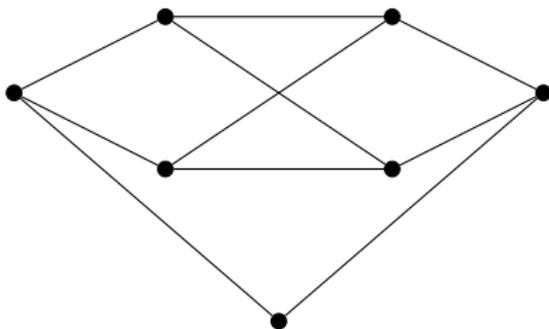
$$\Delta = 2k + 1, \chi'_s = 5k^2 + 4k + 1$$

Les graphes subcubiques



$$\chi'_s(G) = 10$$

Les graphes subcubiques



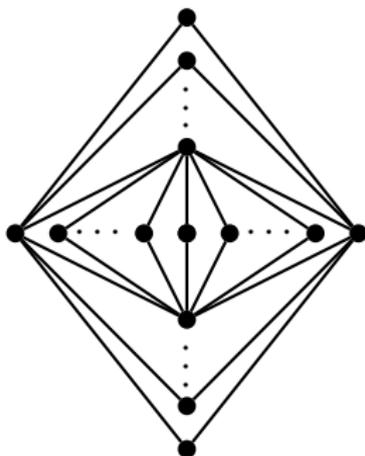
$$\chi'_s(G) = 10$$

Théorème [Andersen, Horák *et al.*, 1992]

Si G est un graphe subcubique alors $\chi'_s(G) \leq 10$.

Théorème [Faudree *et al.*, 1990]

Si G est un graphe planaire de degré maximum Δ alors,
 $\chi'_s(G) \leq 4\Delta + 4$. De plus, pour tout $\Delta \geq 2$, on peut construire
un graphe G tel que $\chi'_s(G) = 4\Delta - 4$.

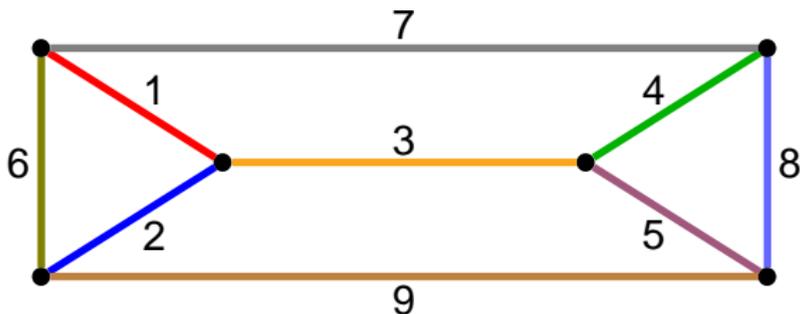


$$\chi'_s(G) = 4\Delta - 4$$

Les graphes planaires subcubiques

Conjecture [Faudree *et al.*, 1990]

Si G est un graphe planaire subcubique alors, $\chi'_s(G) \leq 9$.



Définition

Le *degré moyen maximum* d'un graphe G , noté $mad(G)$, est le maximum des degrés moyens de tous les sous-graphes de G :

$$mad(G) = \max \left\{ \frac{2|E(H)|}{|V(H)|}, H \subseteq G \right\}$$

Théorème

Soit G un graphe subcubique :

- 1 Si $mad(G) < \frac{15}{7}$, alors $\chi'_s(G) \leq 6$.
- 2 Si $mad(G) < \frac{27}{11}$, alors $\chi'_s(G) \leq 7$.
- 3 Si $mad(G) < \frac{13}{5}$, alors $\chi'_s(G) \leq 8$.
- 4 Si $mad(G) < \frac{36}{13}$, alors $\chi'_s(G) \leq 9$.

Lemme

Tout graphe planaire de maille au moins g vérifie :

$$mad(G) < \frac{2g}{g-2}$$

Lemme

Tout graphe planaire de maille au moins g vérifie :

$$mad(G) < \frac{2g}{g-2}$$

Corollaire

Soit G un graphe planaire subcubique de maille g :

- 1 Si $g \geq 30$, alors $\chi'_s(G) \leq 6$.
- 2 Si $g \geq 11$, alors $\chi'_s(G) \leq 7$.
- 3 Si $g \geq 9$, alors $\chi'_s(G) \leq 8$.
- 4 Si $g \geq 8$, alors $\chi'_s(G) \leq 9$.

Lemme

Tout graphe planaire de degré minimum 2 et de maille au moins $5k + 1$ contient une chaîne de k 2-sommets adjacents.

Lemme

Tout graphe planaire de degré minimum 2 et de maille au moins $5k + 1$ contient une chaîne de k 2-sommets adjacents.

Corollaire

Si G est un graphe planaire subcubique de maille $g \geq 16$, alors $\chi'_s(G) \leq 6$.

Déroulement de la preuve

Supposons que H est un contre-exemple d'ordre minimum au théorème.

1. Propriétés structurelles de H .
2. Procédure de déchargement.
 - 2.1 Une fonction poids ω telle que $\sum_x \omega(x) < 0$.
 - 2.2 Règles de déchargement.
 - 2.3 Création d'une nouvelle fonction poids ω^* telle que $\sum_x \omega(x) = \sum_x \omega^*(x)$.
3. En utilisant les hypothèses faites sur le mad et les propriétés structurelles de H , nous aboutissons à une contradiction, $0 \leq \sum_x \omega^*(x) = \sum_x \omega(x) < 0$.

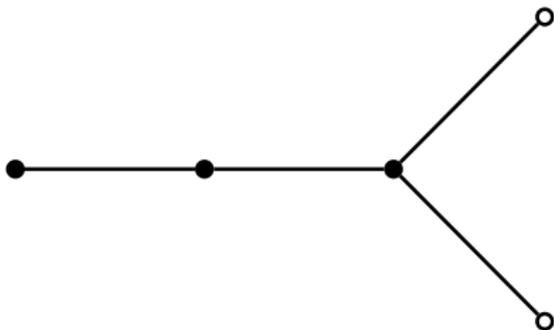
Donc aucun contre-exemple n'existe.

Configurations réductibles

Soit H un contre-exemple d'ordre minimum au théorème.
Alors H ne possède pas de :

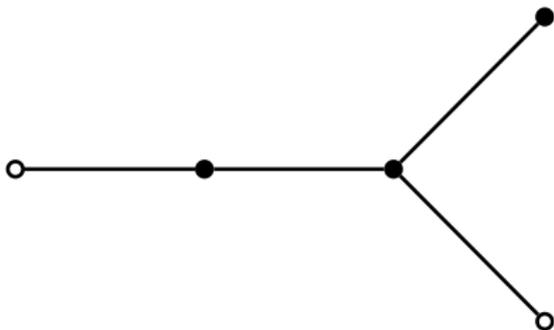
Configurations réductibles

Soit H un contre-exemple d'ordre minimum au théorème.
Alors H ne possède pas de :



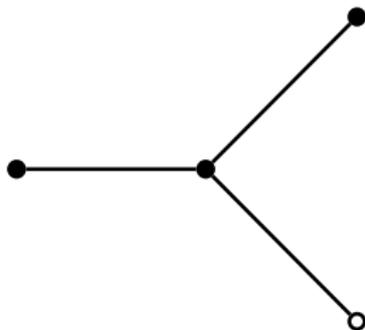
(C1) 1-sommet adjacent à un 2-sommet

Soit H un contre-exemple d'ordre minimum au théorème.
Alors H ne possède pas de :



(C2) 3-sommet adjacent à un 1-sommet et à un 2-sommet

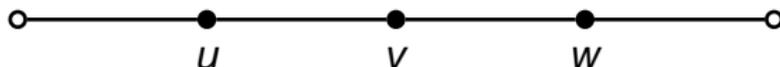
Soit H un contre-exemple d'ordre minimum au théorème.
Alors H ne possède pas de :



(C3) 3-sommet adjacent à deux 1-sommets

Configurations réductibles

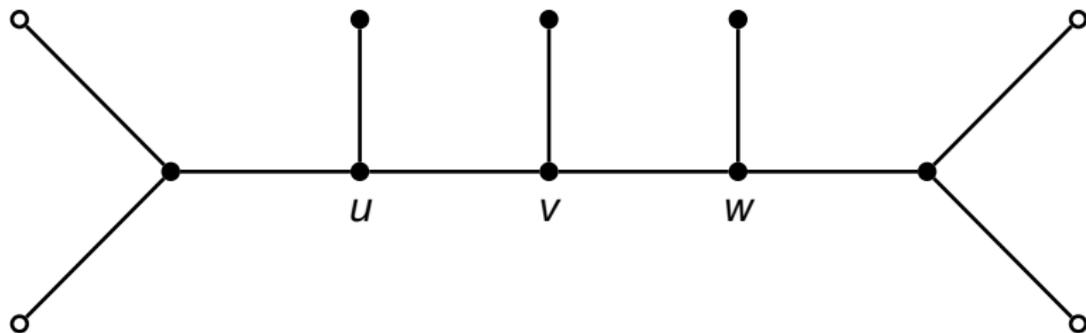
Soit H un contre-exemple d'ordre minimum au théorème.
Alors H ne possède pas de :



(C4) une chaîne uvw telle que u , v et w sont des 2-sommets

Configurations réductibles

Soit H un contre-exemple d'ordre minimum au théorème.
Alors H ne possède pas de :

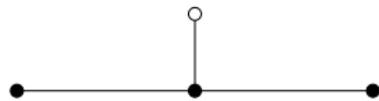


(C5) une chaîne uvw telle que u , v et w sont des 3-sommets adjacents à des 1-sommets

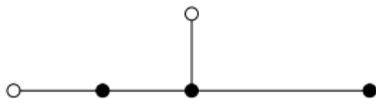
Ensemble des configurations réductibles



(C1)



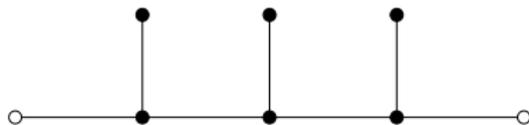
(C3)



(C2)

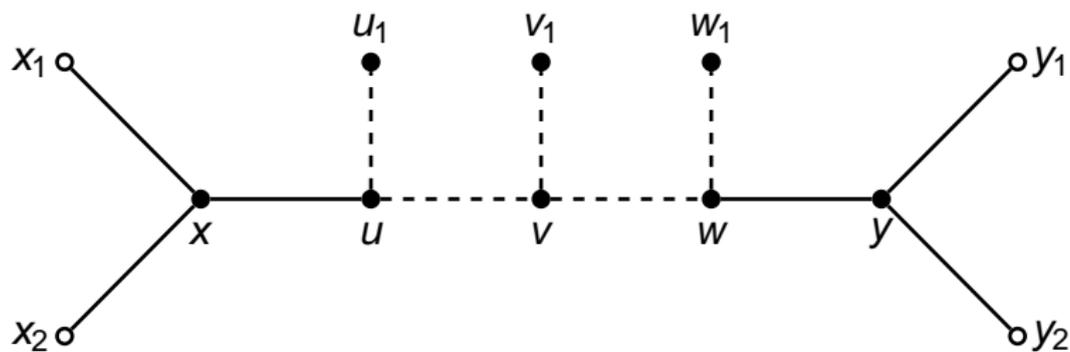


(C4)

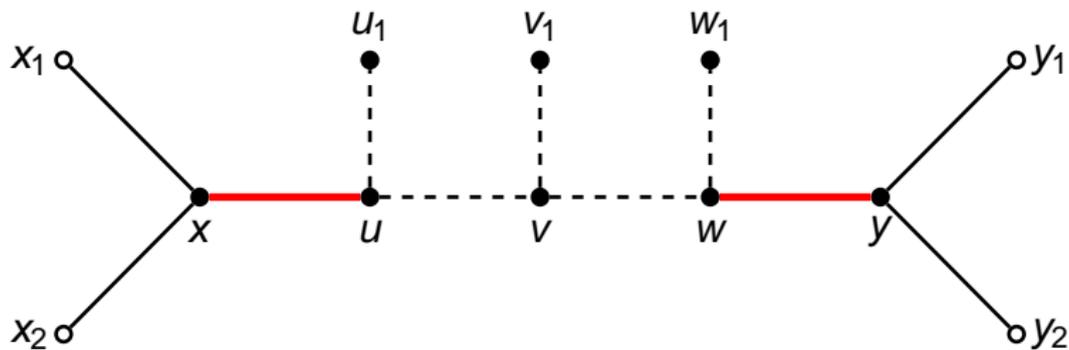


(C5)

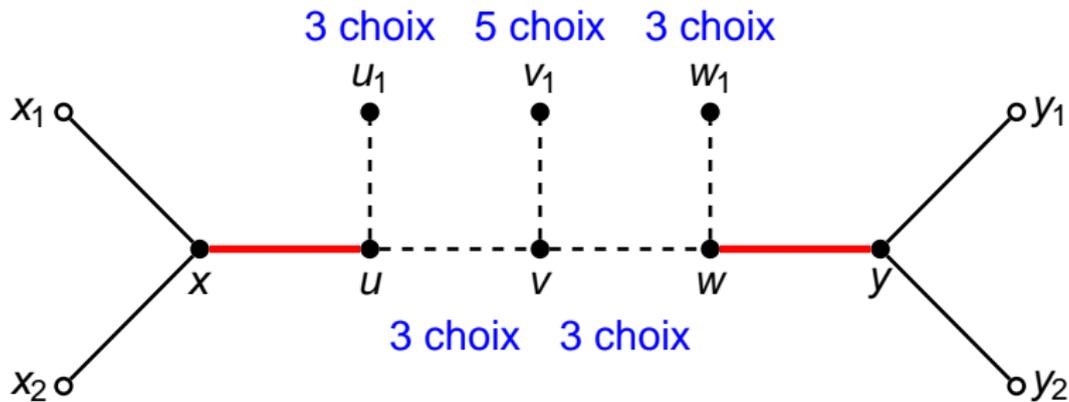
Preuve de la configuration réductible (C5)



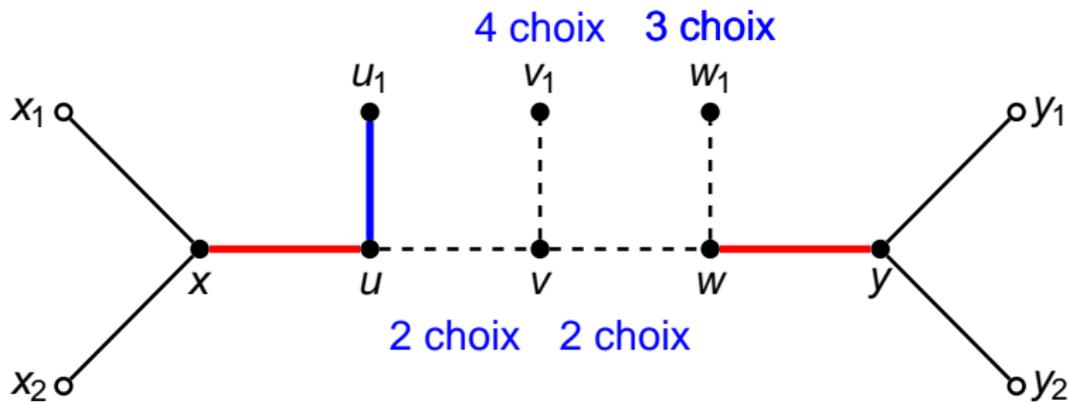
Premier cas : $c(xu) = c(wy)$



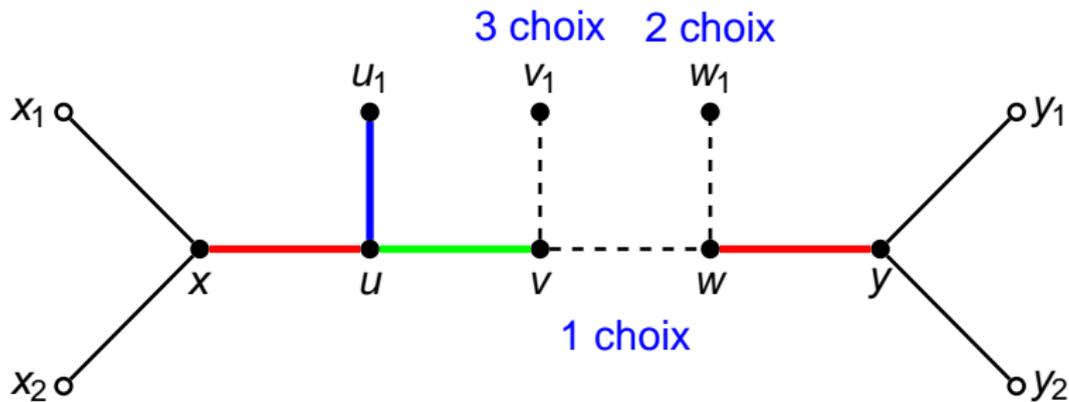
Premier cas : $c(xu) = c(wy)$



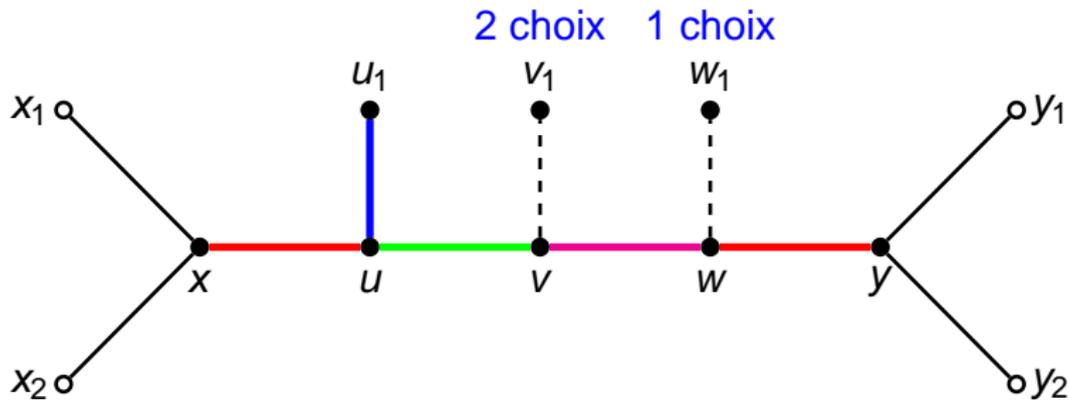
Premier cas : $c(xu) = c(wy)$



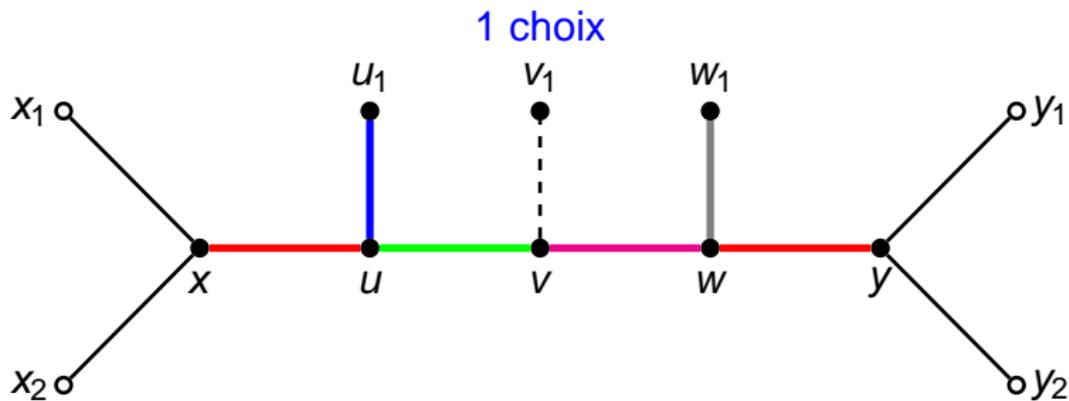
Premier cas : $c(xu) = c(wy)$



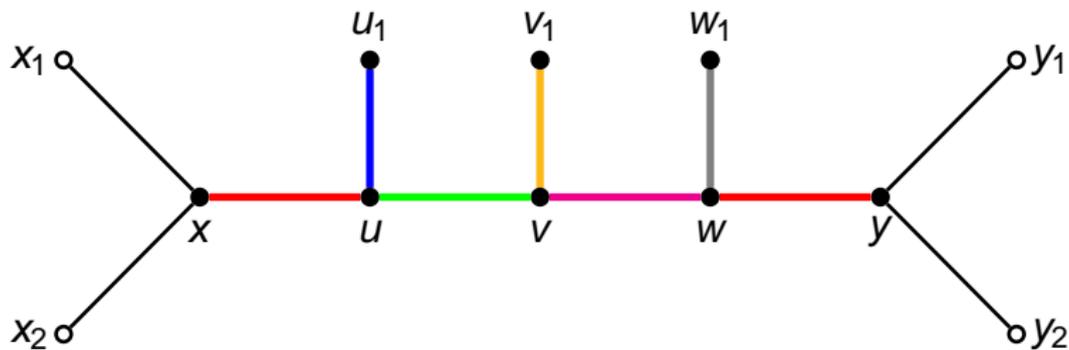
Premier cas : $c(xu) = c(wy)$



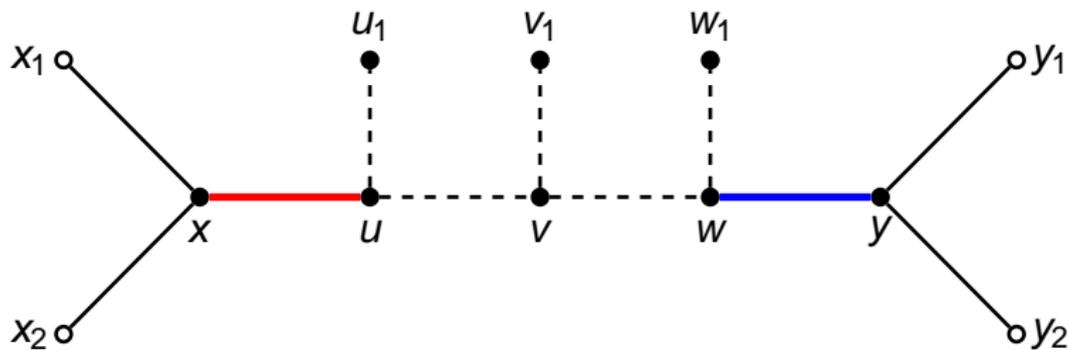
Premier cas : $c(xu) = c(wy)$



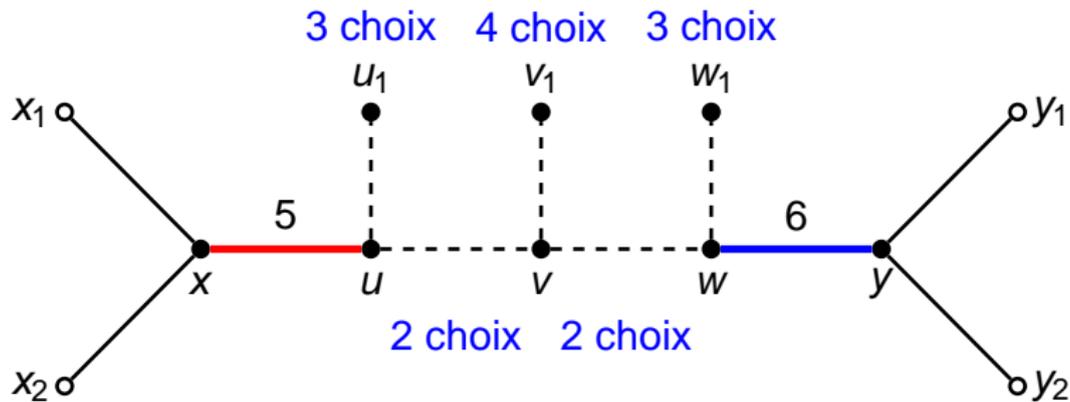
Premier cas : $c(xu) = c(wy)$



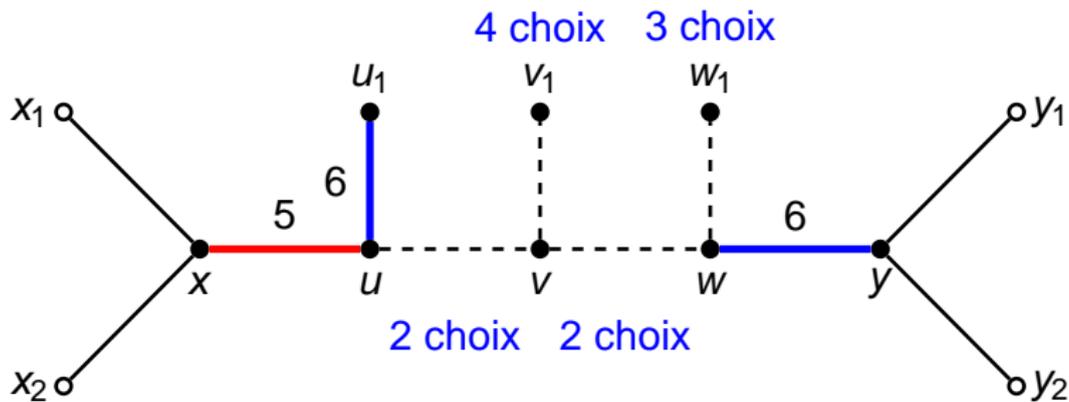
Second cas : $c(xu) \neq c(wy)$



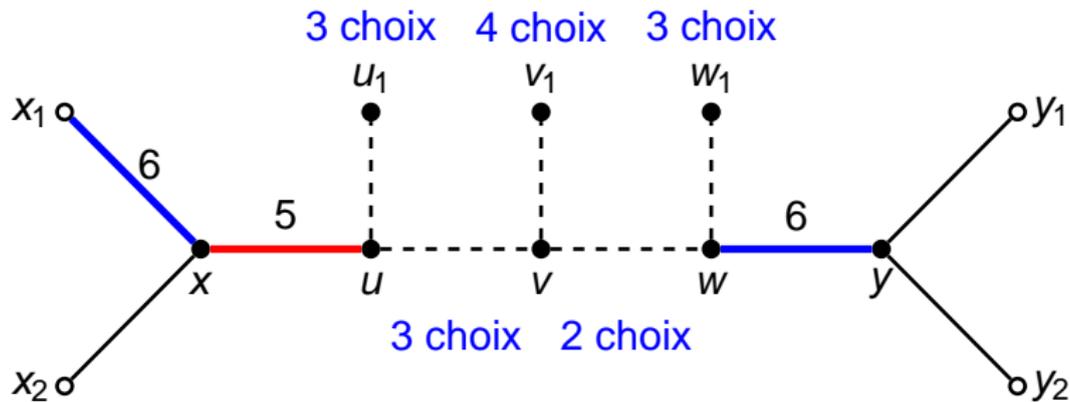
Second cas : $c(xu) \neq c(wy)$



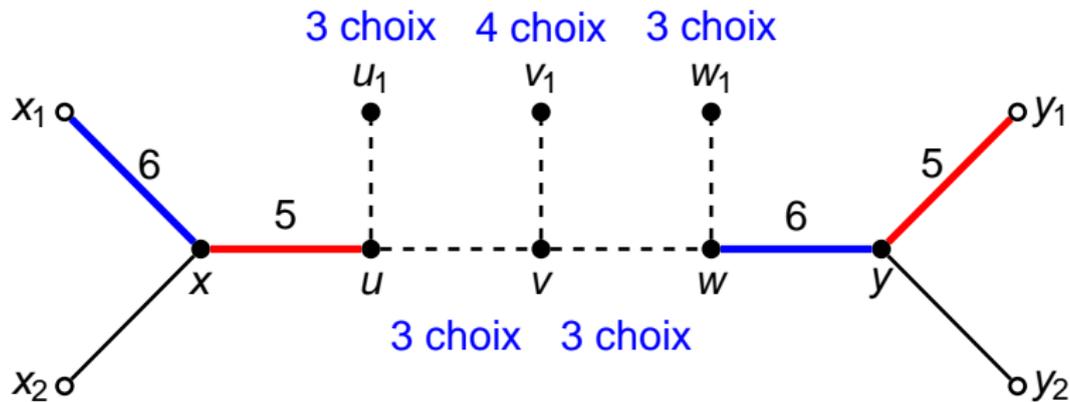
Second cas : $c(xu) \neq c(wy)$



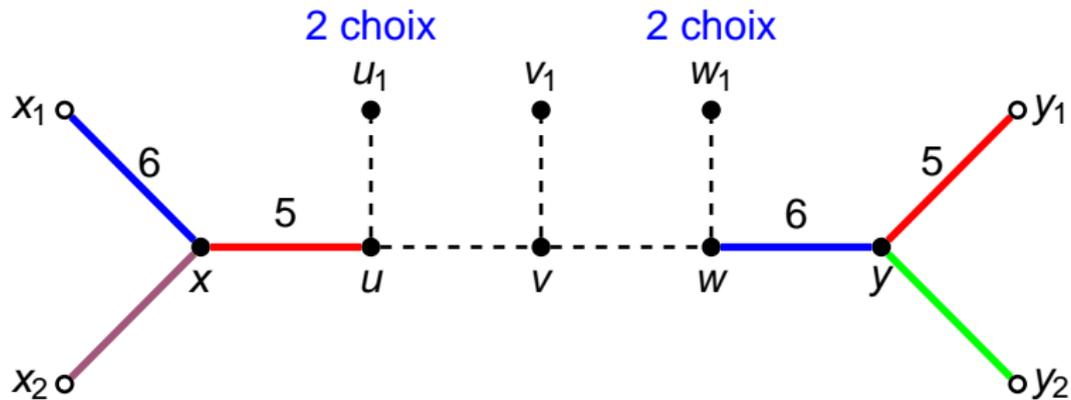
Second cas : $c(xu) \neq c(wy)$



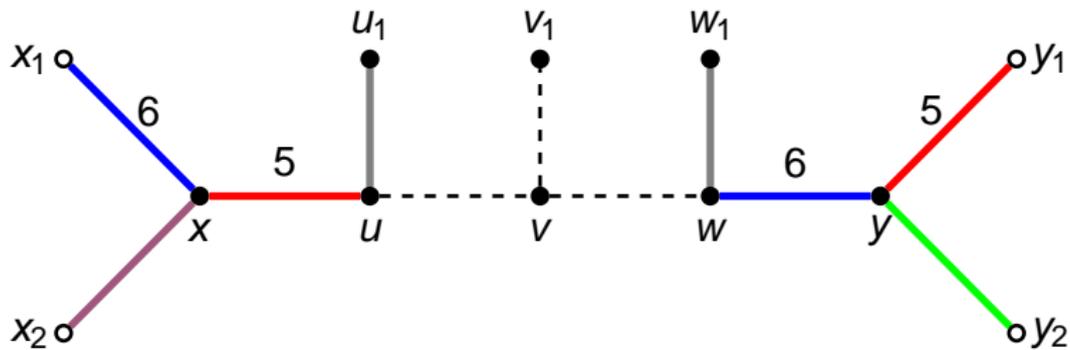
Second cas : $c(xu) \neq c(wy)$



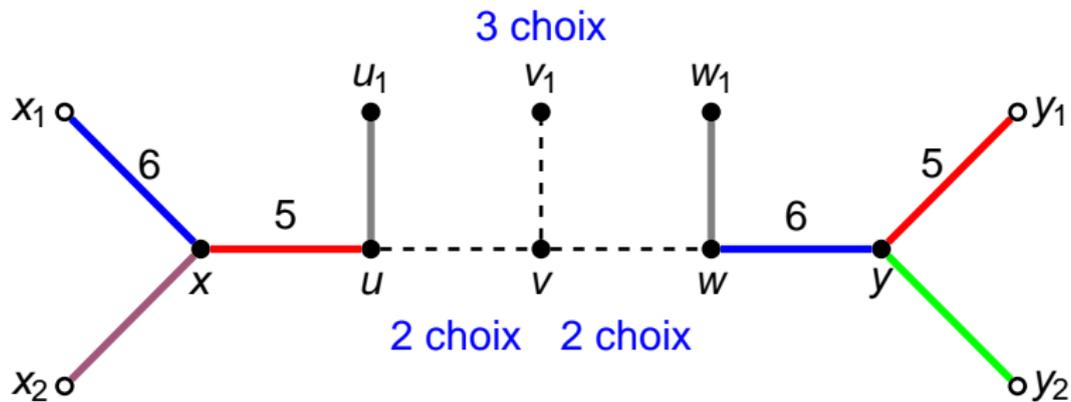
Second cas : $c(xu) \neq c(wy)$



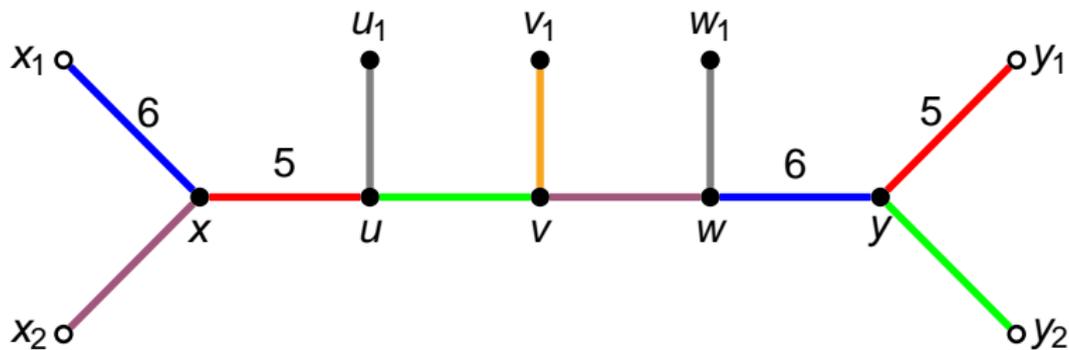
Second cas : $c(xu) \neq c(wy)$



Second cas : $c(xu) \neq c(wy)$



Second cas : $c(xu) \neq c(wy)$



Procédure de déchargement

Nous définissons une fonction poids $\omega : V(H) \longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$\omega(x) = d(x) - \frac{15}{7}.$$

$$\omega(1V) = -\frac{8}{7}, \quad \omega(2V) = -\frac{1}{7}, \quad \omega(3V) = \frac{6}{7}$$

Procédure de déchargement

Nous définissons une fonction poids $\omega : V(H) \rightarrow \mathbb{R}$ par $\omega(x) = d(x) - \frac{15}{7}$.

$$\omega(1V) = -\frac{8}{7}, \quad \omega(2V) = -\frac{1}{7}, \quad \omega(3V) = \frac{6}{7}$$

- 1 Chaque 3-sommet fort (*i.e.* qui n'est pas adjacent à un 1-sommet) donne $\frac{2}{7}$ à chaque 3-sommet faible adjacent et $\frac{1}{7}$ à chaque 2-sommet adjacent.
- 2 Chaque 3-sommet faible donne $\frac{8}{7}$ à son unique 1-sommet adjacent.

Lorsque la procédure de déchargement est terminée, nous avons montré que :

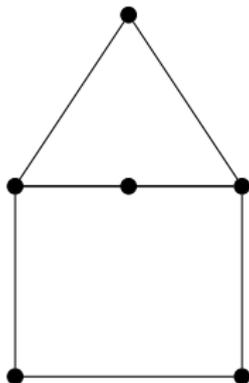
- 1 La somme totale des poids est inchangée.
- 2 Pour tout $x \in V(H)$, $\omega^*(x) \geq 0$.

D'où,

$$0 \leq \sum_{x \in V(H)} \omega^*(x) = \sum_{x \in V(H)} \omega(x) < 0$$

donc aucun contre-exemple ne peut exister.

Exemple



Un graphe G tel que $mad(G) = \frac{7}{3}$ et $\chi'_s(G) > 6$.

Soit $f(n) = \inf\{\text{mad}(G) \mid \chi'_s(G) > n\}$.

$$\frac{45}{21} = \frac{15}{7} < f(6) \leq \frac{7}{3} = \frac{49}{21}$$

$$\frac{54}{22} = \frac{27}{11} < f(7) \leq \frac{5}{2} = \frac{55}{22}$$

$$\frac{91}{35} = \frac{13}{5} < f(8) \leq \frac{20}{7} = \frac{100}{35}$$

$$\frac{252}{91} = \frac{36}{13} < f(9) \leq \frac{20}{7} = \frac{260}{91}$$

Une première tentative...

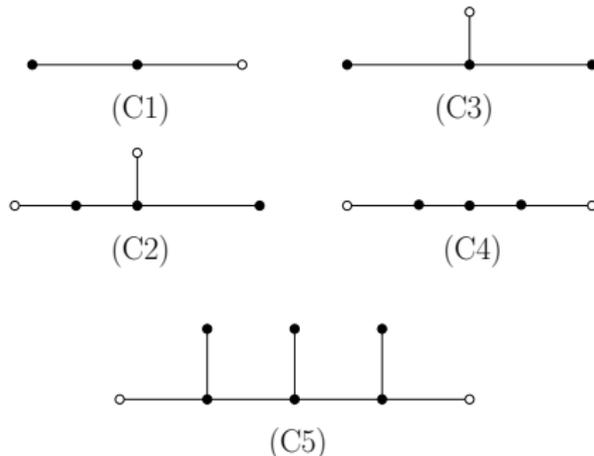
Si G est un graphe subcubique planaire extérieur de maille au moins 5 alors $\chi'_s(G) \leq 6$.

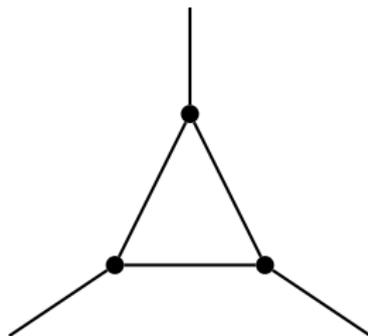
Lemme

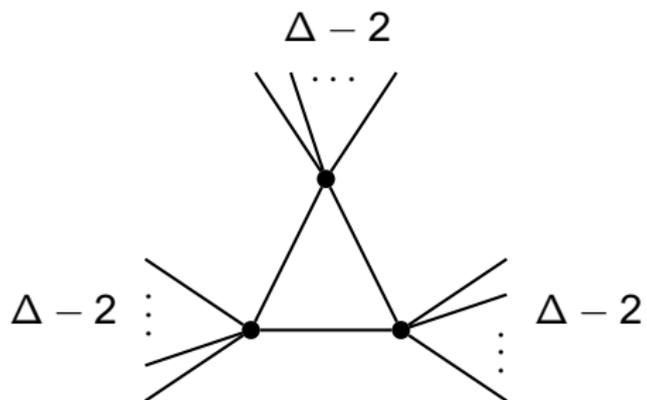
Tout graphe planaire extérieur de maille au moins g avec $\delta \geq 2$ contient une chaîne de $(g - 2)$ 2-sommets consécutifs.

Lemme

Tout graphe planaire extérieur de maille au moins g avec $\delta \geq 2$ contient une chaîne de $(g - 2)$ 2-sommets consécutifs.

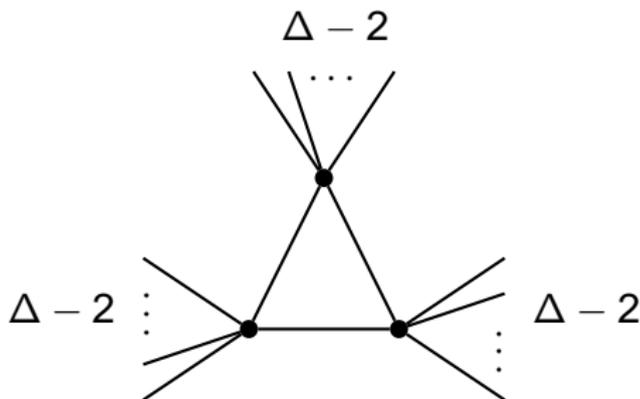






Théorème

Si G est un graphe planaire extérieur de degré maximum Δ alors $\chi'_s(G) \leq 3\Delta - 3$.



k -COLORATION forte d'arêtes (k -SEC)

INSTANCE : Un graphe G et un entier k .

QUESTION : Est-ce que G admet une coloration forte d'arêtes avec k couleurs ?

- Polynomial pour les graphes triangulés (Cameron, 1989)

- Polynomial pour les graphes triangulés (Cameron, 1989)
- NP-complet pour les graphes bipartis de maille g quelconque fixée et pour tout $k \geq 4$ (Mahdian, 2002)

- Polynomial pour les graphes triangulés (Cameron, 1989)
- NP-complet pour les graphes bipartis de maille g quelconque fixée et pour tout $k \geq 4$ (Mahdian, 2002)
- NP-complet pour les graphes bipartis de degré 3, $k = 5$, de maille 6 (Erickson *et al.*, 2002)

Théorème

4-SEC est NP-complet pour les graphes subcubiques planaires, bipartis, pour toute maille g fixée.

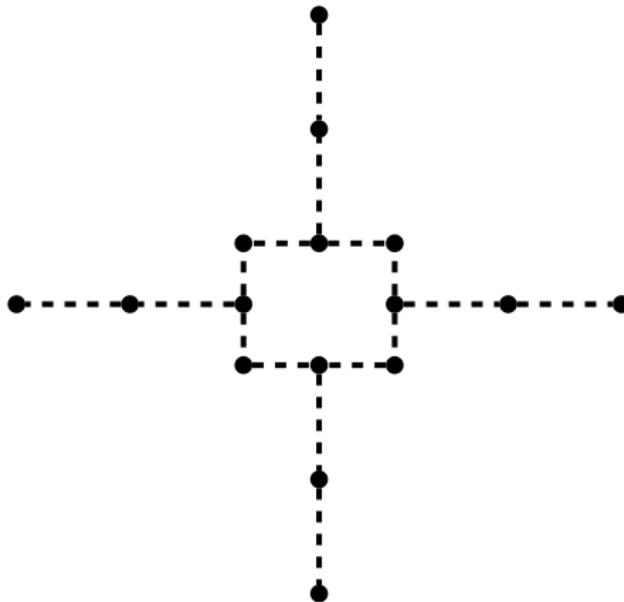
Théorème

4-SEC est NP-complet pour les graphes subcubiques planaires, bipartis, de maille 8.

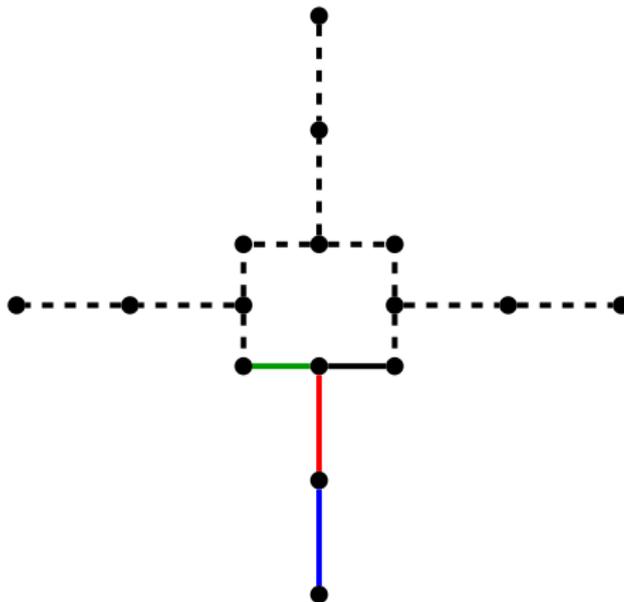
Preuve

Réduction depuis le problème de 3-COLORATION des graphes planaires de degré 4 ($3\text{-COL} \leq_P 4\text{-SEC}$).

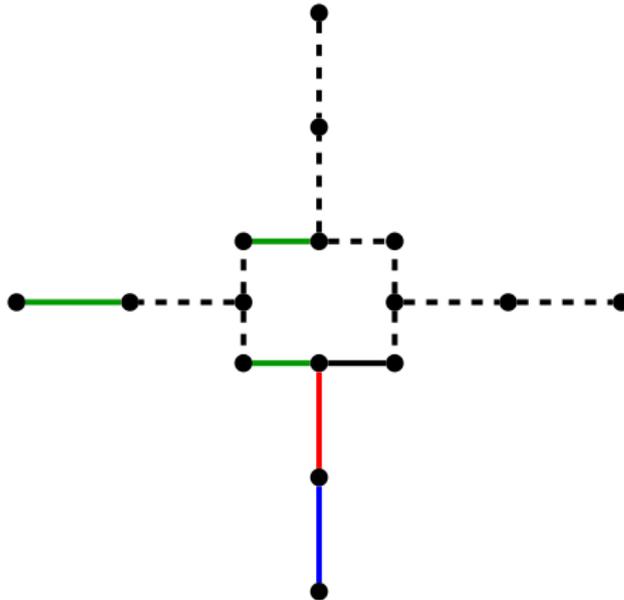
Motif de base



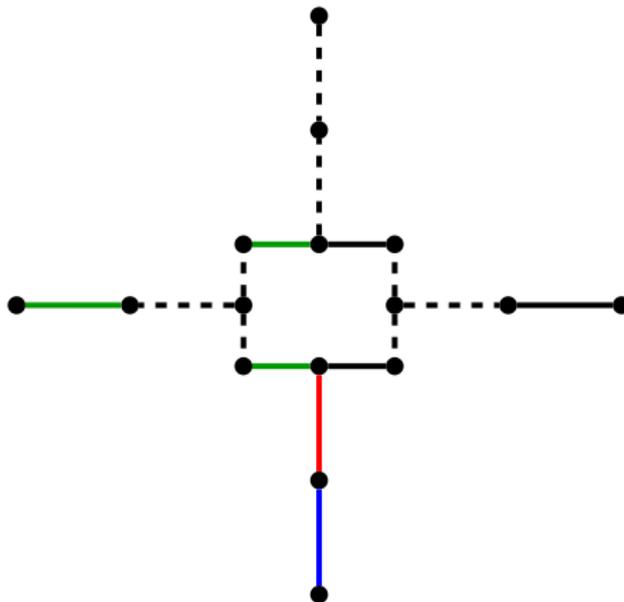
Motif de base



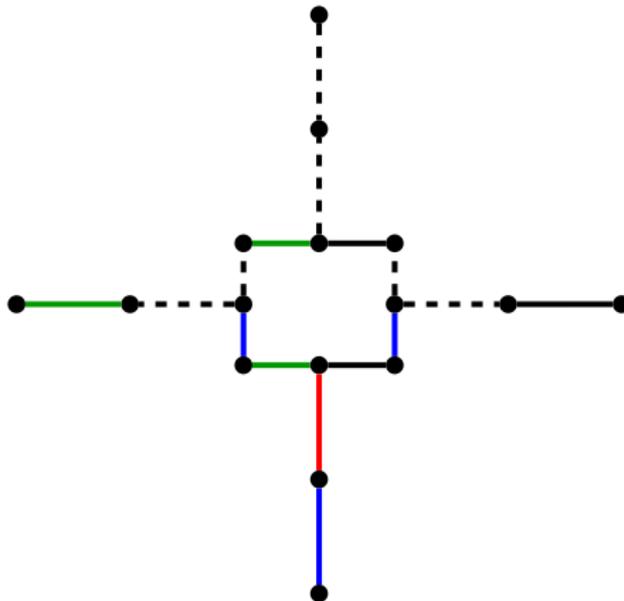
Motif de base



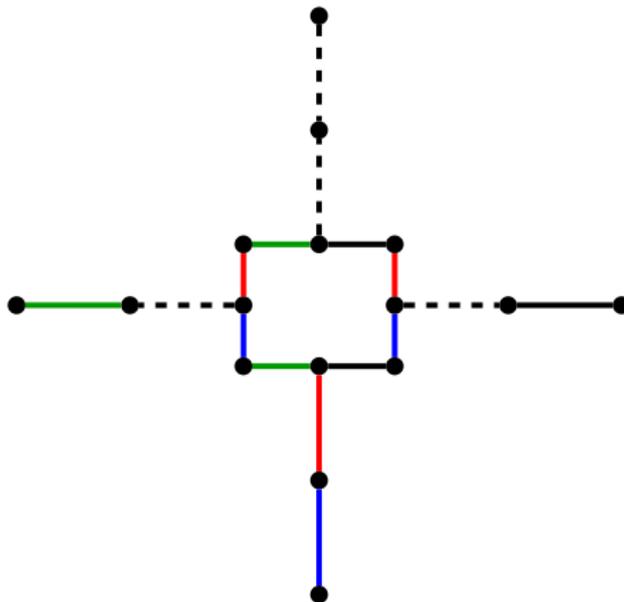
Motif de base



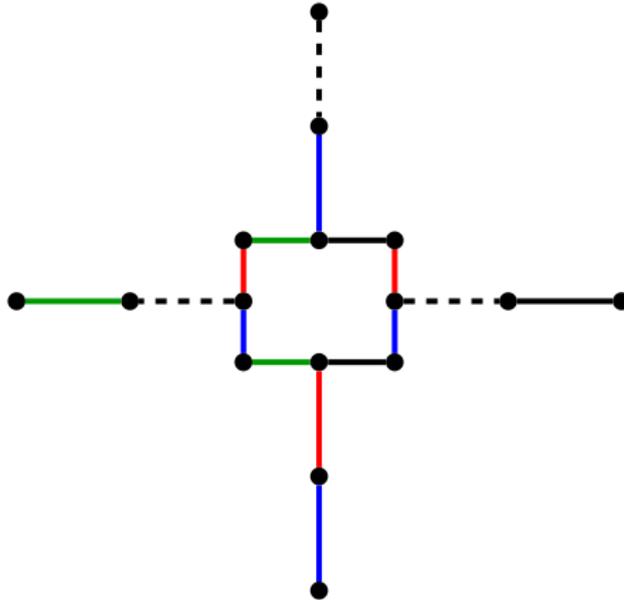
Motif de base



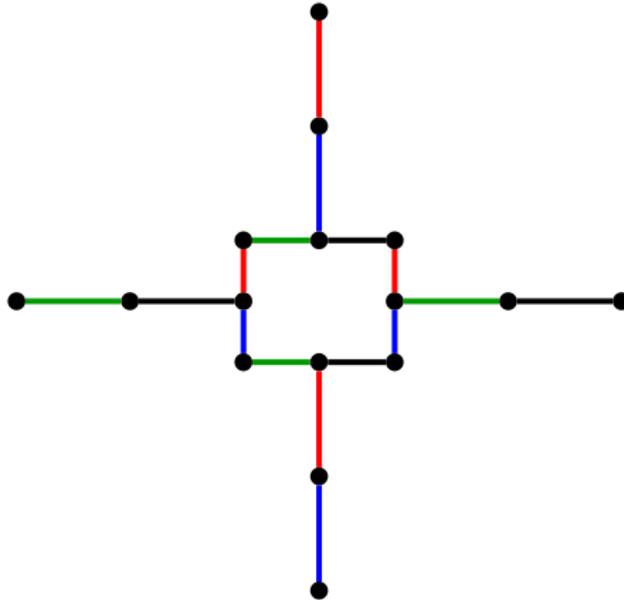
Motif de base



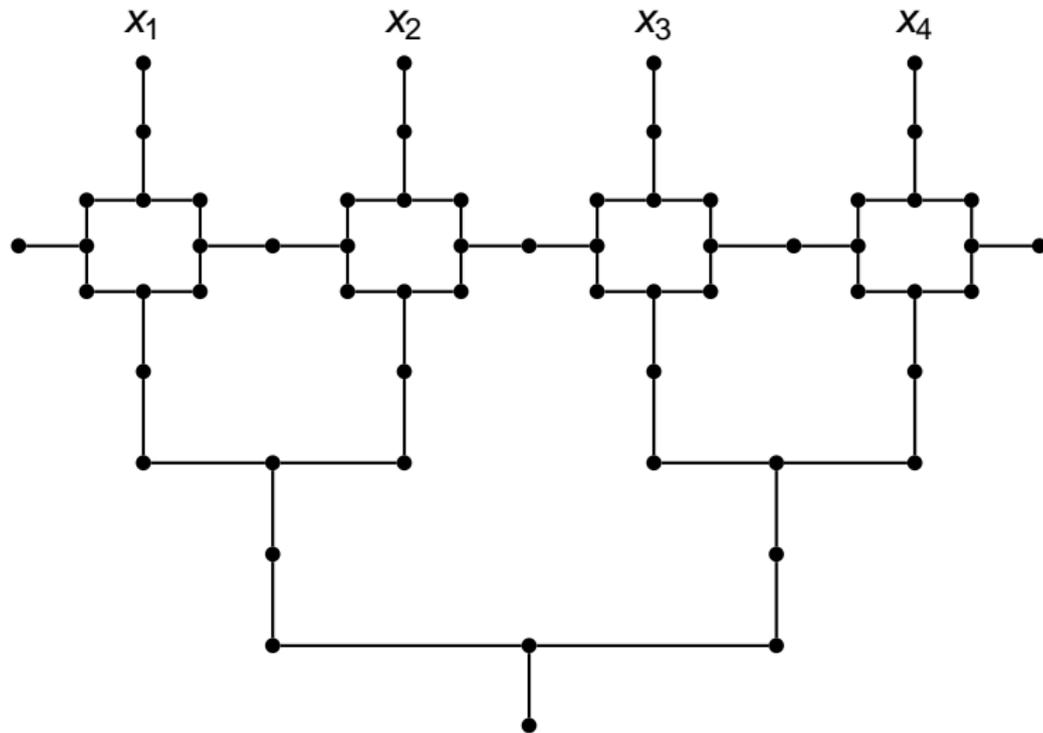
Motif de base



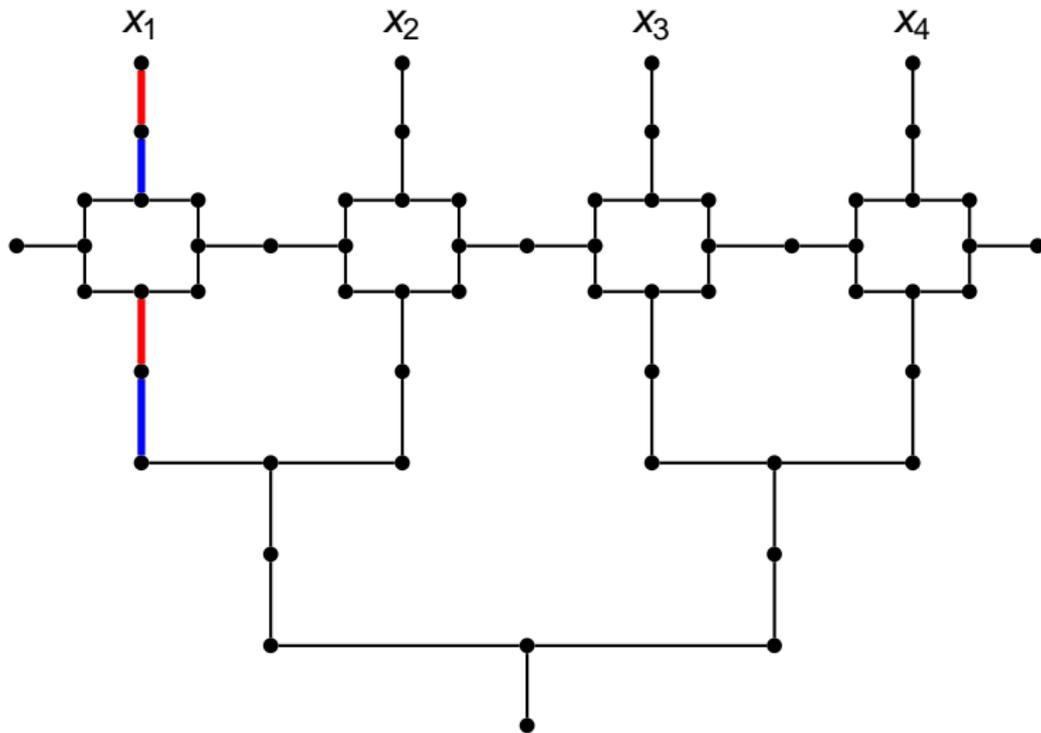
Motif de base



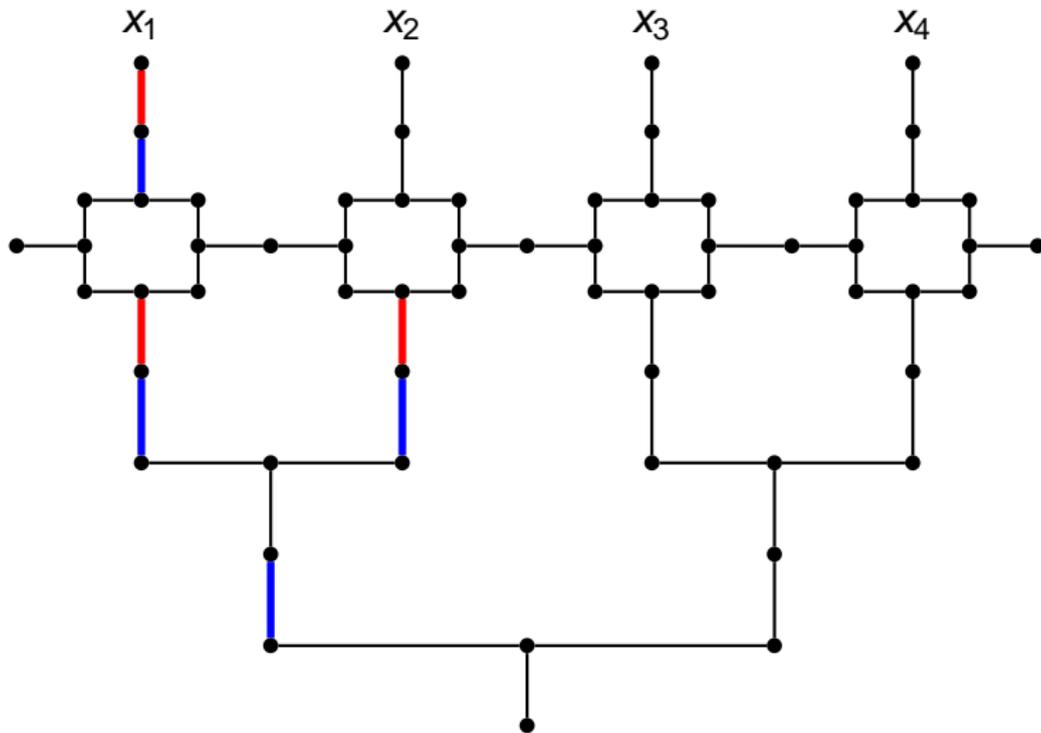
Gadget pour un sommet



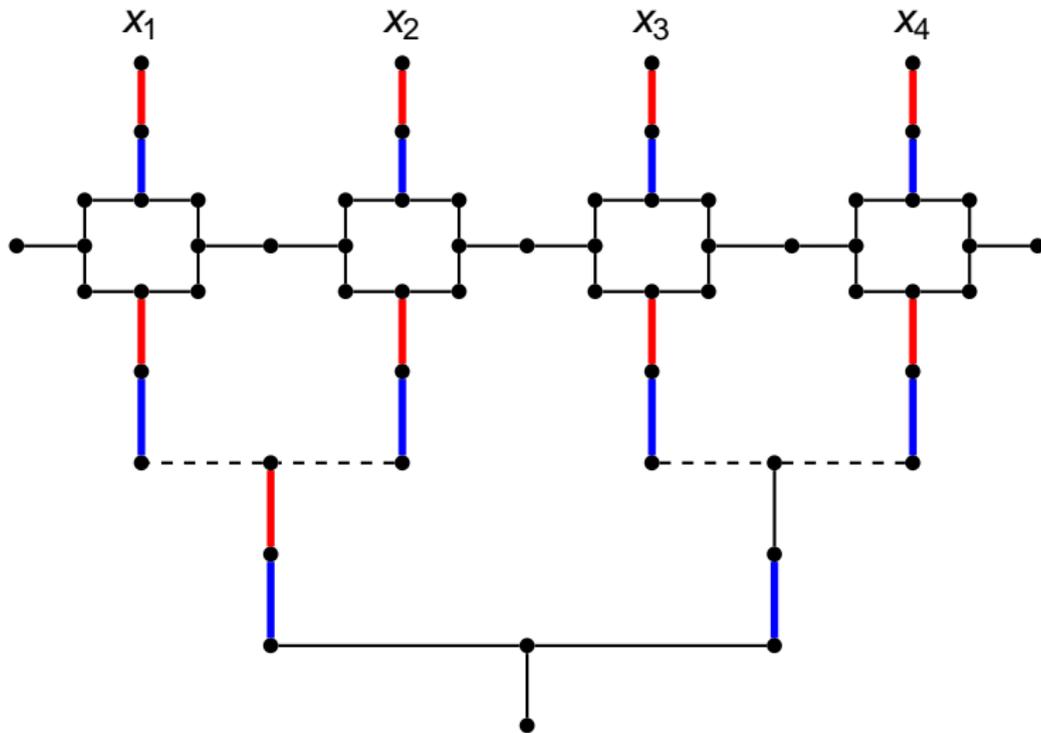
Gadget pour un sommet



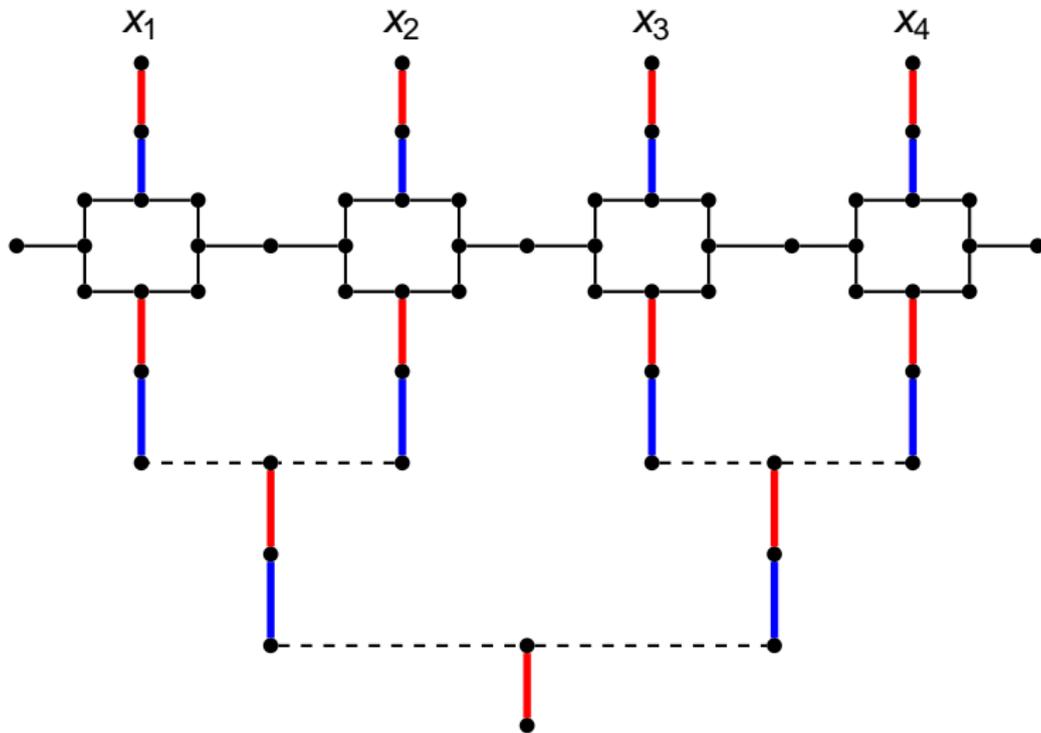
Gadget pour un sommet



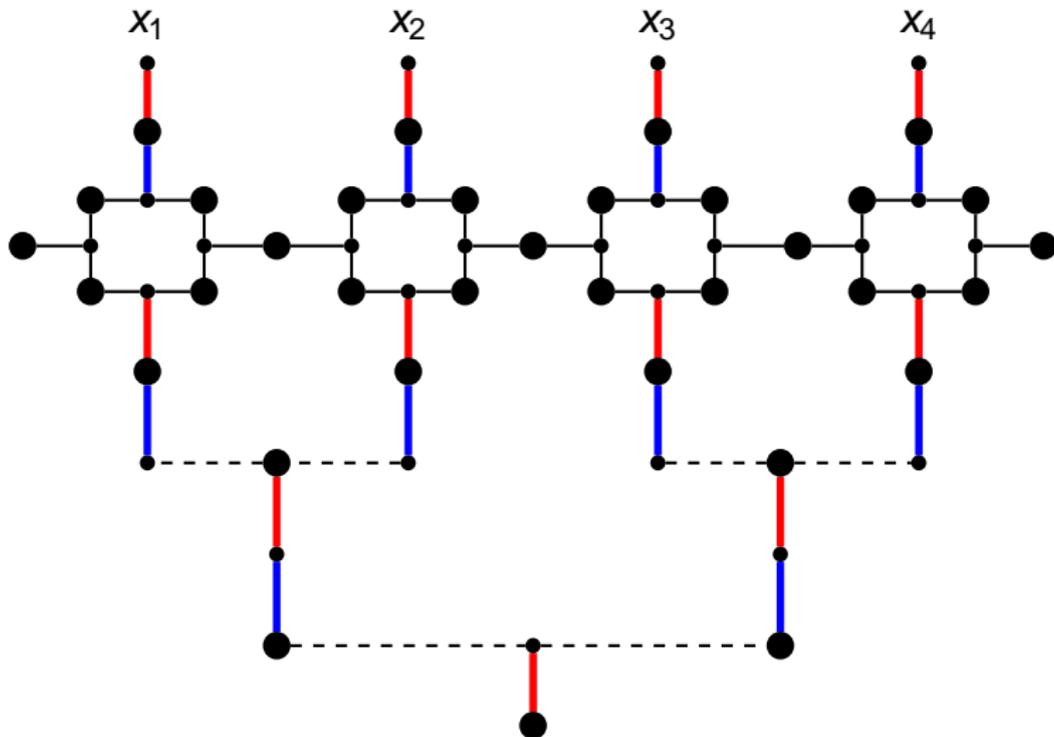
Gadget pour un sommet



Gadget pour un sommet



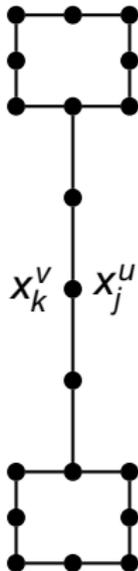
Gadget pour un sommet



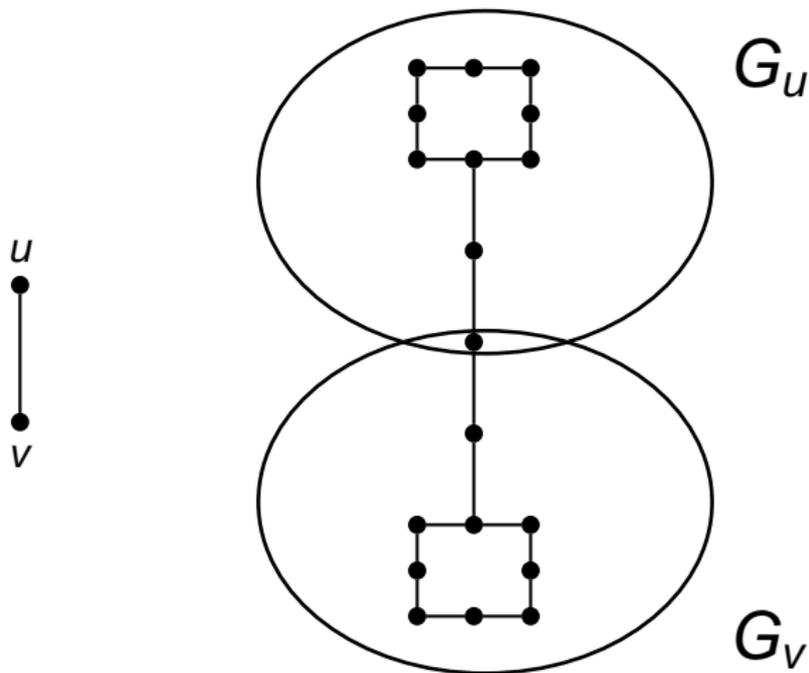
Adjacence des sommets



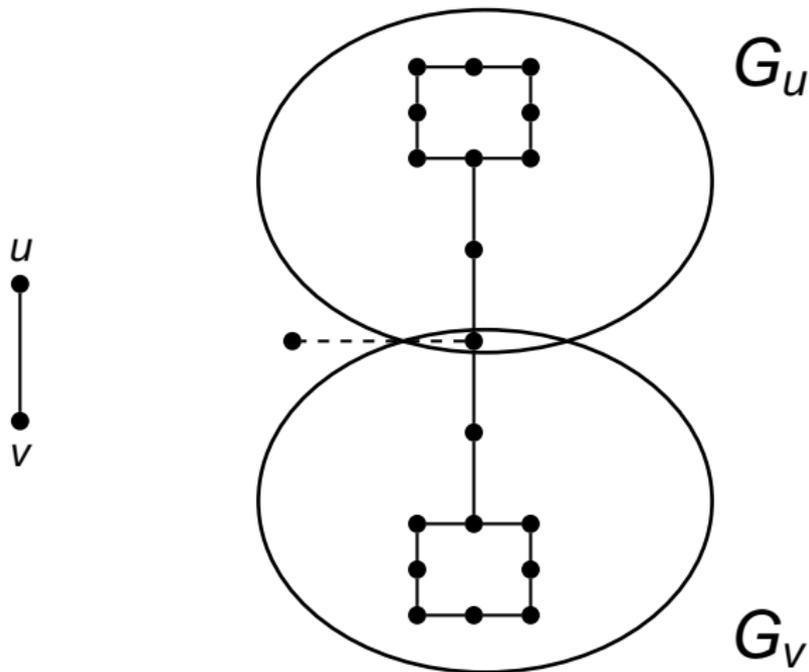
Adjacence des sommets



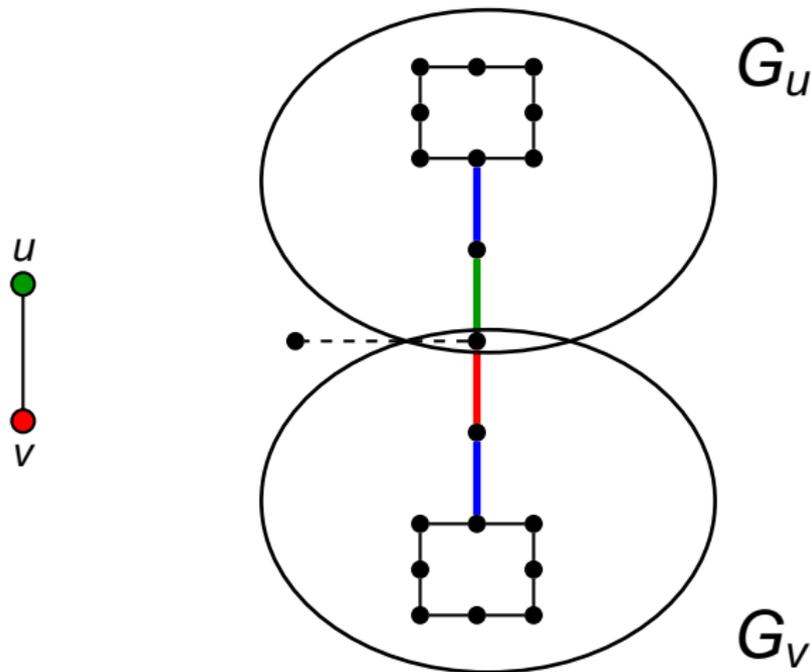
Adjacence des sommets



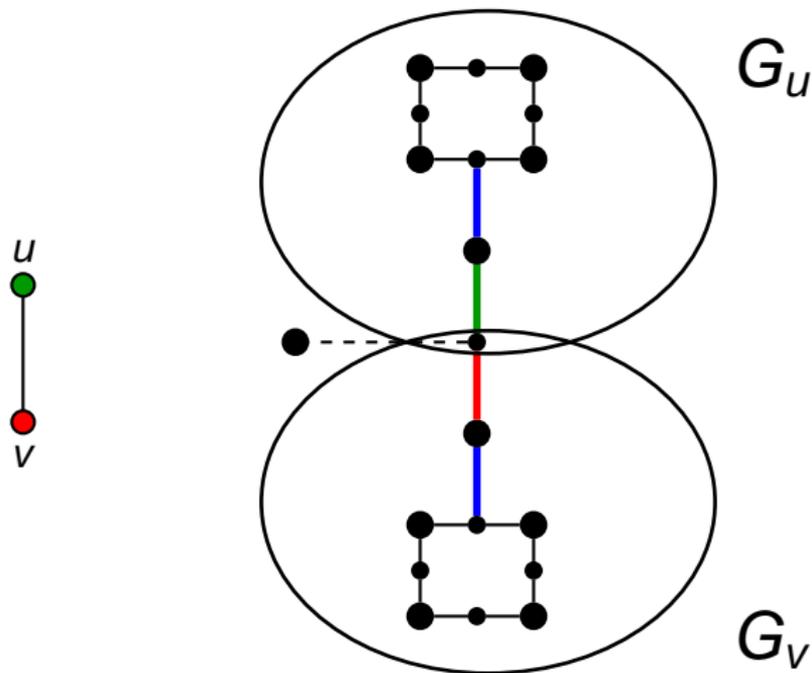
Adjacence des sommets



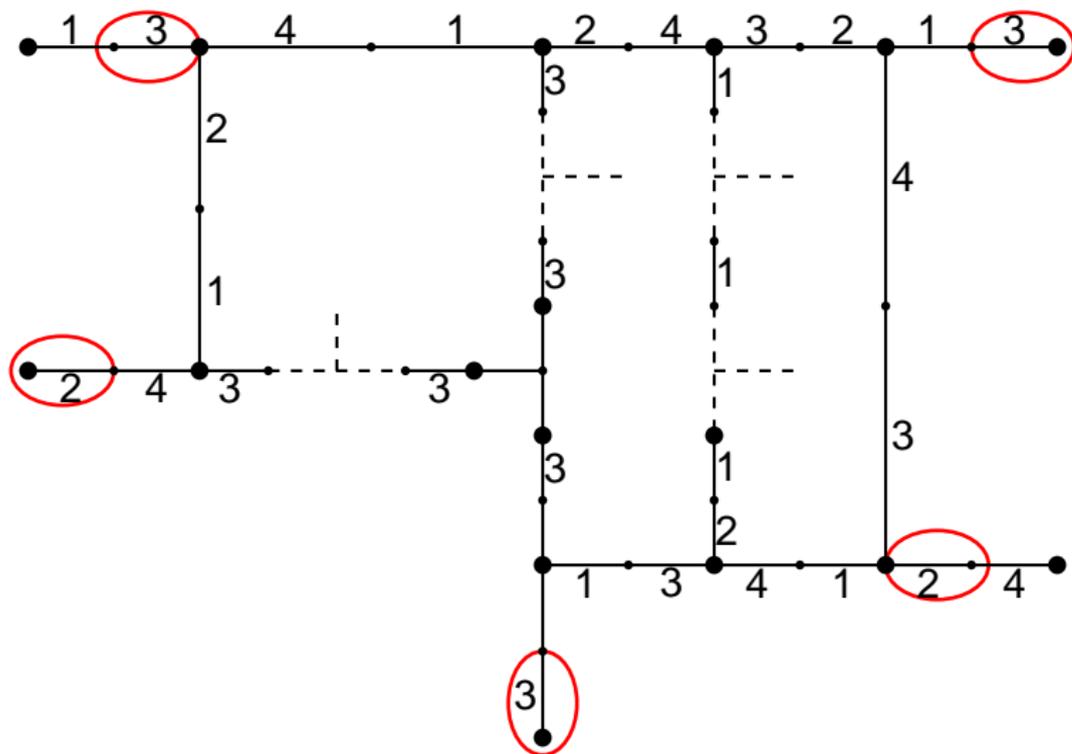
Adjacence des sommets



Adjacence des sommets



Maille arbitraire



Théorème

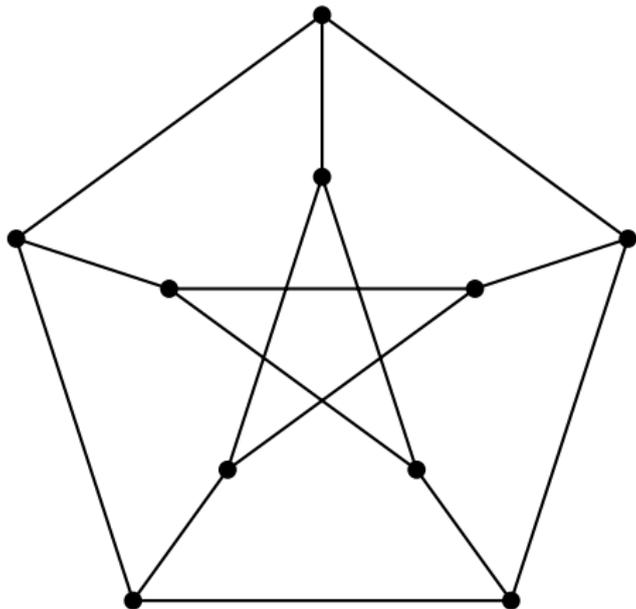
5-SEC est NP-complet pour les graphes subcubiques planaires, bipartis, de maille 8 et pour les graphes subcubiques planaires de maille 9.

Théorème

6-SEC est NP-complet pour les graphes subcubiques planaires, bipartis, de maille 4.

A suivre...

Un autre exemple



$$g|F(H)| \leq 2|E(H)|$$

$$g|F(H)| \leq 2|E(H)|$$

$$2g - g|V(H)| + g|E(H)| = g|F(H)| \leq 2|E(H)|$$

$$g|F(H)| \leq 2|E(H)|$$

$$2g - g|V(H)| + g|E(H)| = g|F(H)| \leq 2|E(H)|$$

$$2g + (g - 2)|E(H)| \leq g|V(H)|$$

$$g|F(H)| \leq 2|E(H)|$$

$$2g - g|V(H)| + g|E(H)| = g|F(H)| \leq 2|E(H)|$$

$$2g + (g - 2)|E(H)| \leq g|V(H)|$$

$$2|E(H)|(2g + (g - 2)|E(H)|) \leq 2|E(H)|g|V(H)|$$

$$g|F(H)| \leq 2|E(H)|$$

$$2g - g|V(H)| + g|E(H)| = g|F(H)| \leq 2|E(H)|$$

$$2g + (g - 2)|E(H)| \leq g|V(H)|$$

$$2|E(H)|(2g + (g - 2)|E(H)|) \leq 2|E(H)|g|V(H)|$$

$$\frac{2|E(H)|}{|V(H)|} \leq \frac{2g|E(H)|}{2g + (g - 2)|E(H)|} < \frac{2g}{g - 2}$$