

Calcul intégral

Hervé Hocquard

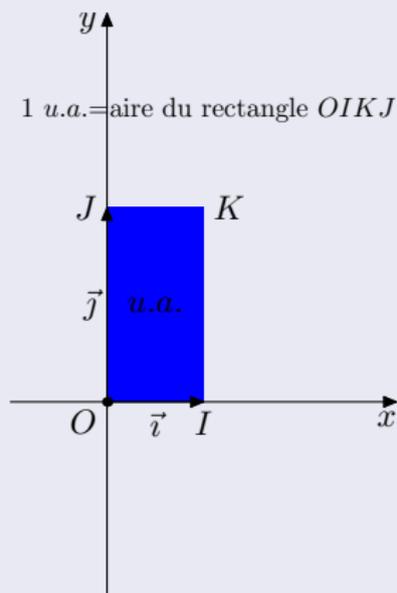
Université de Bordeaux, France

23 septembre 2015

Intégrale d'une fonction continue positive

Définition

Un repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j}) ayant été fixé, une unité d'aire est définie de la manière suivante :



Définition

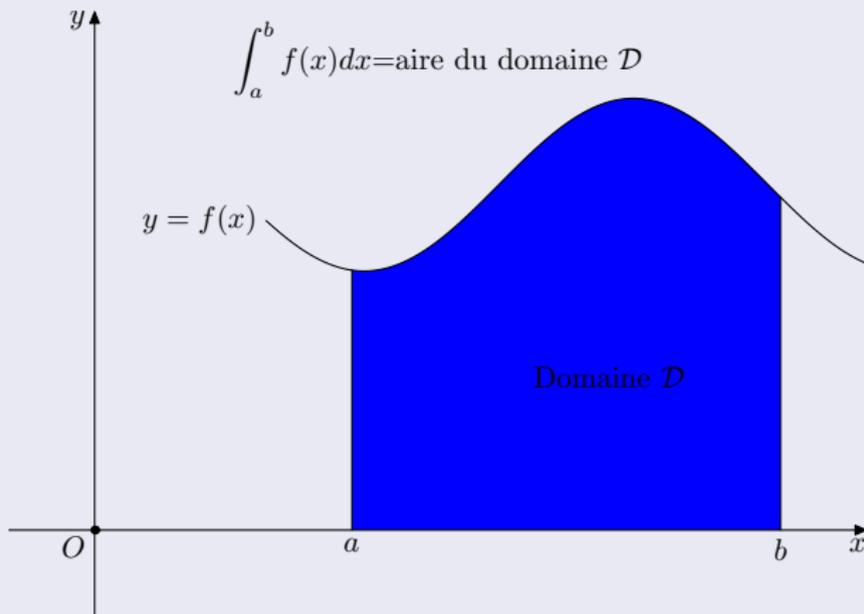
Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a; b]$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Le réel, noté $\int_a^b f(x)dx$, est l'aire, en unités d'aire, du domaine \mathcal{D} délimité par C_f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

Intégrale d'une fonction continue positive

Définition

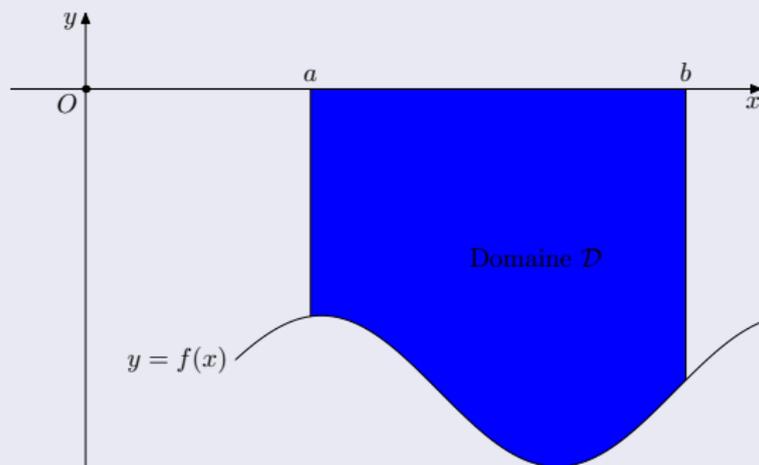
$\int_a^b f(x)dx$ se lit somme de a à b de $f(x)dx$ ou intégrale de a à b de f .



Intégrale d'une fonction continue négative

Définition

Si f est une fonction continue et négative sur $[a; b]$, on a la définition suivante :

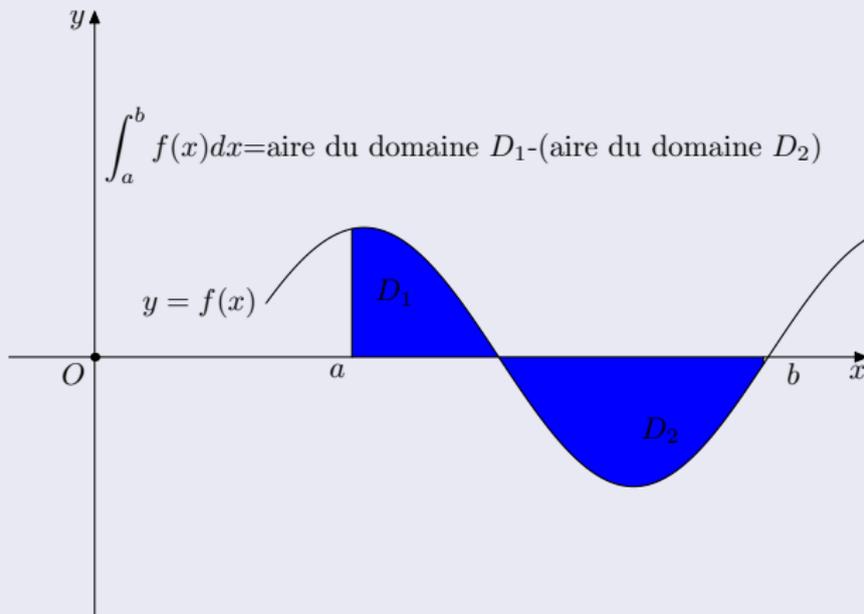


$$\int_a^b f(x)dx = -(\text{aire du domaine } \mathcal{D})$$

Intégrale d'une fonction continue de signe quelconque

Définition

Si f est continue sur l'intervalle $[a; b]$, alors on définit $\int_a^b f(x)dx$ de la manière suivante :



Remarque

On admet pour l'instant l'égalité suivante :
si f est une fonction continue sur $[a; b]$, alors, pour tout $c \in [a; b]$,

$$\int_c^c f(x)dx = 0$$

Définition

Il est un cas où, si la fonction f n'est pas continue sur $[a; b]$, on peut néanmoins définir $\int_a^b f(x)dx$, c'est le cas des fonctions en escalier.

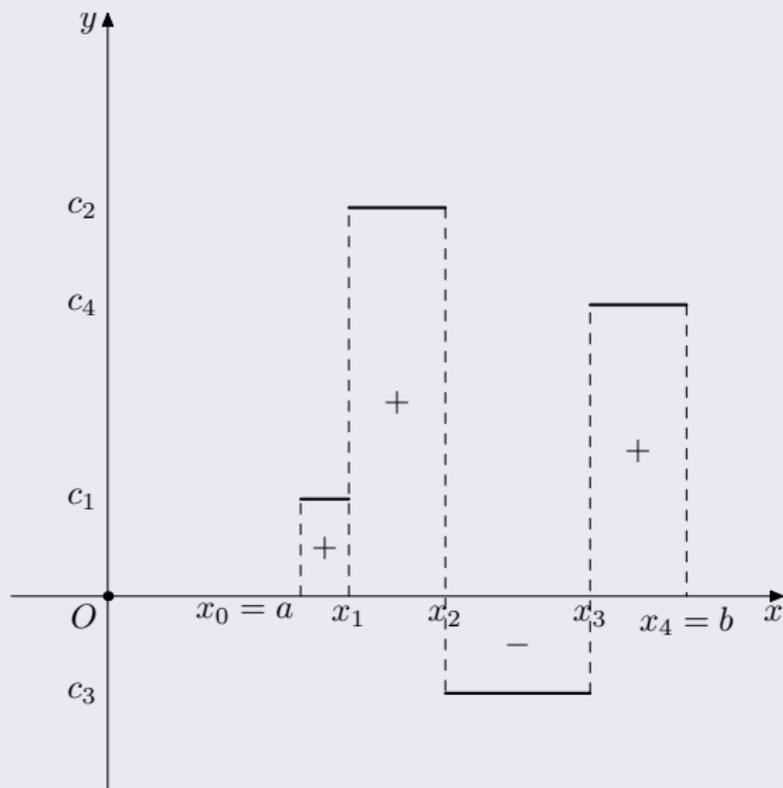
Si f est définie ainsi :

- 1 si $x \in [x_0; x_1[$, $f(x) = c_1$
- 2 si $x \in [x_1; x_2[$, $f(x) = c_2$
- 3 si $x \in [x_2; x_3[$, $f(x) = c_3$
- 4 si $x \in [x_3; x_4]$, $f(x) = c_4$

alors $\int_a^b f(x)dx$ = somme des aires des rectangles situés au-dessus de l'axe des abscisses - (somme des aires des rectangles en dessous de l'axe des abscisses).

Cas d'une fonction en escalier

Définition



Théorème

On admet pour l'instant, la définition de l'intégrale ayant été donnée précédemment, que

$$\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx$$

La notion de primitive nous permettra de valider cette propriété dans quelques instants.

Théorème-Linéarité

Si f et g sont deux fonctions continues sur $[a; b]$ et α un réel, alors on a :

$$\int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx = \int_a^b (f(x) + g(x))dx$$

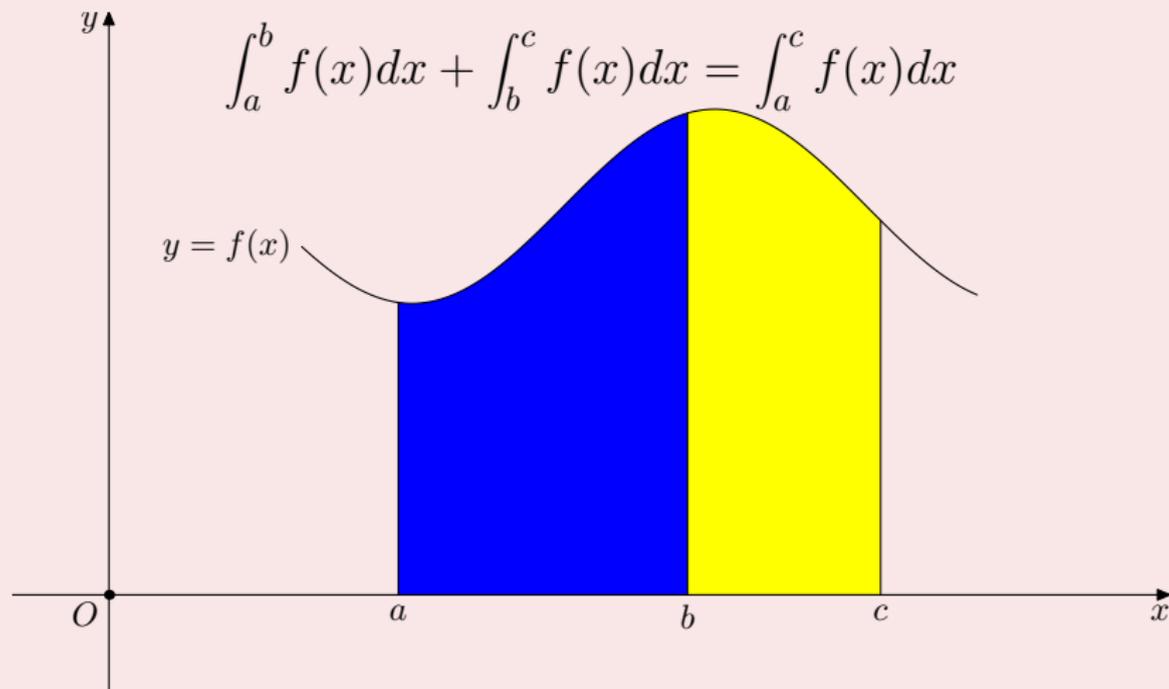
et

$$\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx$$

Théorème-Relation de Chasles

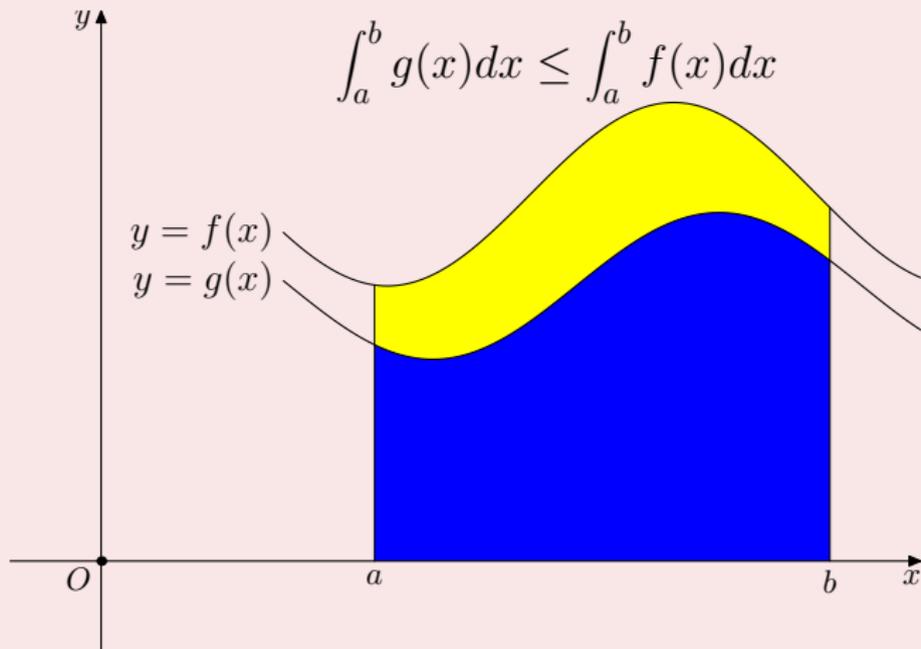
Soit f une fonction continue sur $[a; c]$, alors :

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$



Théorème

Si f et g sont continues sur $[a; b]$ et si, pour tout $x \in [a; b]$, $g(x) \leq f(x)$ alors on a :



Théorème

Si f est une fonction continue sur un intervalle I ; a et b sont deux réels distincts de l'intervalle I .

Alors il existe un réel c entre a et b tel que

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c)$$

Le nombre $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$ est appelé **valeur moyenne de f entre a et b** .

Preuve-Premier cas : $a < b$

Puisque f est croissante, pour tout réel x dans $[a, b]$,
 $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$. On a alors

Preuve-Premier cas : $a < b$

Puisque f est croissante, pour tout réel x dans $[a; b]$,
 $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$. On a alors

$f(a)(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq f(b)(b-a)$ et, puisque $b-a > 0$,

$$f(a) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq f(b).$$

Preuve-Premier cas : $a < b$

Puisque f est croissante, pour tout réel x dans $[a; b]$,
 $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$. On a alors

$f(a)(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq f(b)(b-a)$ et, puisque $b-a > 0$,

$$f(a) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq f(b).$$

Le réel $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$ est dans l'intervalle $[f(a); f(b)]$, donc il

existe c dans $[a; b]$ tel que : $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx = f(c)$.

Preuve-Second cas : $a > b$

À vous de jouer...

Introduction

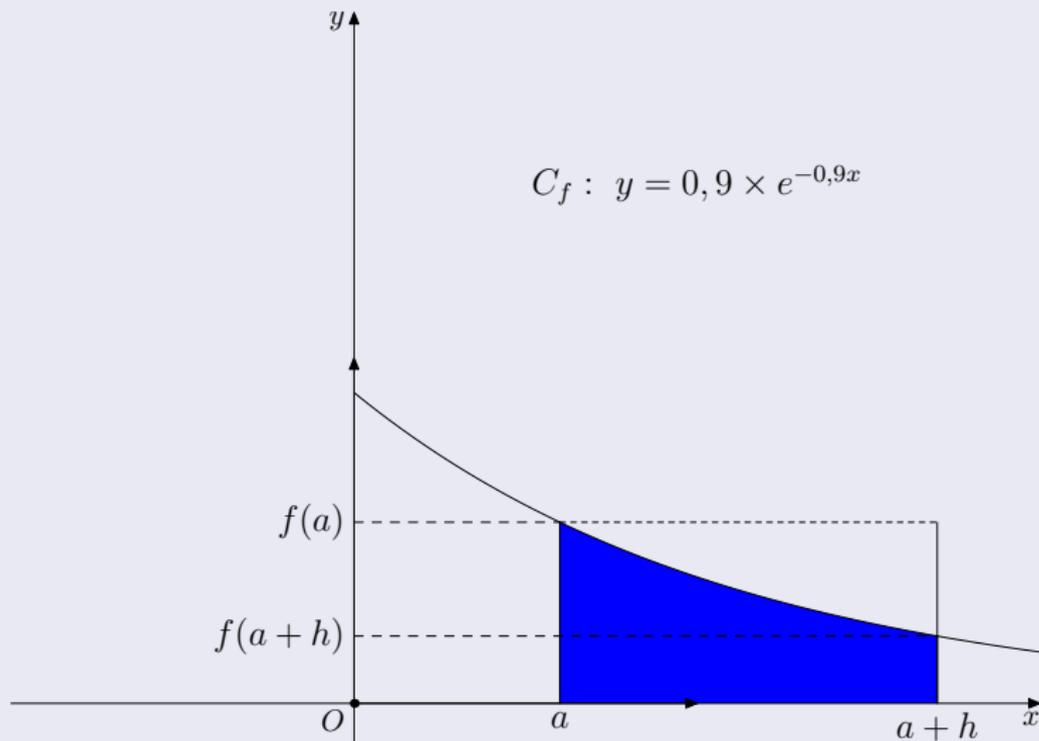
On s'intéresse à la fonction $f : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto 0,9 \times e^{-0,9x}$.

Soit \mathcal{A} la fonction qui, à tout réel x positif, associe

$$\mathcal{A}(x) = \int_0^x 0,9 e^{-0,9t} dt.$$

Alors, pour tout réel a positif, le réel $\mathcal{A}(a+h) - \mathcal{A}(a)$ représente l'aire du domaine colorié en bleue ci-après (on se place dans le cas où h est strictement positif).

Introduction



Introduction

En utilisant les inégalités de la moyenne décrites plus haut, on peut écrire :

$$h \times f(a+h) \leq \mathcal{A}(a+h) - \mathcal{A}(a) \leq h \times f(a)$$

d'où

Introduction

En utilisant les inégalités de la moyenne décrites plus haut, on peut écrire :

$$h \times f(a+h) \leq \mathcal{A}(a+h) - \mathcal{A}(a) \leq h \times f(a)$$

d'où

$$f(a+h) \leq \frac{\mathcal{A}(a+h) - \mathcal{A}(a)}{h} \leq f(a)$$

Introduction

De la même manière, en considérant h strictement négatif, on obtient :

$$f(a) \leq \frac{\mathcal{A}(a+h) - \mathcal{A}(a)}{h} \leq f(a+h)$$

Introduction

De la même manière, en considérant h strictement négatif, on obtient :

$$f(a) \leq \frac{\mathcal{A}(a+h) - \mathcal{A}(a)}{h} \leq f(a+h)$$

Si on fait tendre h vers 0 et en tenant compte du fait que la fonction f est continue sur \mathbb{R} , donc sur \mathbb{R}^+ en particulier, on obtient, après passage à la limite :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathcal{A}(a+h) - \mathcal{A}(a)}{h} = f(a)$$

Introduction

Ce qui nous permet de dire que la fonction

$$\mathcal{A} : x \longmapsto \int_0^x f(t) dt$$

est dérivable sur \mathbb{R}^+ et vérifie

$$\mathcal{A}'(x) = f(x)$$

La fonction \mathcal{A} est appelée **primitive** de la fonction f sur \mathbb{R}^+ .

Introduction

Ce qui nous permet de dire que la fonction

$$\mathcal{A} : x \mapsto \int_0^x f(t) dt$$

est dérivable sur \mathbb{R}^+ et vérifie

$$\mathcal{A}'(x) = f(x)$$

La fonction \mathcal{A} est appelée **primitive** de la fonction f sur \mathbb{R}^+ .
En effet, si l'on considère la fonction F , définie sur \mathbb{R} , par

$$F(x) = \mathcal{A}(x) + e^{-0.9x}$$

on voit que, la fonction F étant manifestement dérivable sur \mathbb{R}^+ ,
 $F'(x) = 0$, pour tout $x \geq 0$, donc $F(x) = K$ constante.
D'où : $F(x) = F(0) = 1$.

Introduction

Autrement dit,

$$\mathcal{A}(x) = 1 - e^{-0.9x} \text{ pour tout } x \geq 0$$

or

$$\int_0^1 f(t) dt = \mathcal{A}(1)$$

donc

$$\int_0^1 f(t) dt = 1 - e^{-0.9}$$

Définition

f est une fonction définie sur un intervalle I . La fonction F est une **primitive** de f sur I si, pour tout x dans I , $F'(x) = f(x)$ (implicitement, cela suppose que F soit dérivable sur I).

Définition

f est une fonction définie sur un intervalle I . La fonction F est une **primitive** de f sur I si, pour tout x dans I , $F'(x) = f(x)$ (implicitement, cela suppose que F soit dérivable sur I).

Théorème

Si f est une fonction définie sur un intervalle I . Si F est une primitive de f sur I , alors f admet une infinité de primitives. Les autres primitives de f sur I sont définies par $G(x) = F(x) + K$ où K est une constante réelle.

Preuve

F est dérivable sur I et $F' = f$. La fonction G est aussi dérivable sur I avec $G' = F' = f$. Donc G est une primitive de f sur I .

Preuve

F est dérivable sur I et $F' = f$. La fonction G est aussi dérivable sur I avec $G' = F' = f$. Donc G est une primitive de f sur I .

Inversement, si G est une primitive de f sur I alors $G' = f = F'$ d'où $G' - F' = 0$.

Preuve

F est dérivable sur I et $F' = f$. La fonction G est aussi dérivable sur I avec $G' = F' = f$. Donc G est une primitive de f sur I .

Inversement, si G est une primitive de f sur I alors $G' = f = F'$ d'où $G' - F' = 0$.

La dérivée de $G - F$ est nulle sur l'intervalle I donc $G - F$ est constante sur I , il existe donc un réel K tel que pour tout x de I , $G(x) - F(x) = K$, d'où le résultat.

Théorème

Soit f une fonction admettant des primitives sur I .

Soient x_0 est un réel donné appartenant à I et y_0 un réel quelconque.

Alors il existe **une unique primitive** F de f sur I telle que $F(x_0) = y_0$.

Théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle I ; a est un réel de I .

Alors la fonction F définie sur I par $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ est l'unique primitive de f sur I telle que $F(a) = 0$.

Les opérations sur les fonctions dérivables et la définition d'une primitive conduisent aux résultats suivants :

- si F et G sont des primitives des fonctions f et g sur un intervalle I , alors $F + G$ est une primitive de $f + g$ sur I .
- Si F est une primitive de la fonction f sur un intervalle I et λ un réel, alors λF est une primitive de λf sur I .

De même, les résultats connus sur les dérivées des fonctions usuelles donnent par lecture inverse le tableau des primitives suivant :

Calculs de primitives

Fonction f	Primitive F	Intervalle I
a (constante)	ax	\mathbb{R}
x^n ($n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$)	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	\mathbb{R} si $n \geq 0$ et $]0; +\infty[$ ou $] -\infty; 0[$ si $n < 0$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$]0; +\infty[$
$\frac{1}{x}$	$\ln x$	$]0; +\infty[$
e^x	e^x	\mathbb{R}

Calculs de primitives

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I , on a alors :

Fonction f	Primitive F	Remarques
$u' u^n$ ($n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$)	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$	si $n < 0$, pour tout x tel que $u(x) \neq 0$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	$u > 0$ sur I
$\frac{u'}{u}$	$\ln(u)$	$u \neq 0$ sur I
$u' e^u$	e^u	
$x \mapsto u(ax + b)$ ($a \neq 0$)	$x \mapsto \frac{1}{a} U(ax + b)$	U primitive de u sur I

Remarque

On peut ajouter à chaque primitive déterminée une constante K pour obtenir toutes les primitives.

Remarque

On peut ajouter à chaque primitive déterminée une constante K pour obtenir toutes les primitives.

Théorème fondamental de l'analyse

Si f est une fonction continue sur un intervalle I , F est une primitive de f sur I , a et b sont deux réels de I . Alors :

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Preuve

On sait que la fonction $G : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est la primitive de f sur I telle que $G(a) = 0$.

Preuve

On sait que la fonction $G : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est la primitive de f sur I telle que $G(a) = 0$.

Si F est une primitive de f sur I , alors il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que pour tout x de I , $G(x) = F(x) + k$. Or $G(a) = 0$, d'où $k = -F(a)$ et on obtient : $\int_a^x f(t) dt = F(x) - F(a)$.

Preuve

On sait que la fonction $G : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est la primitive de f sur I telle que $G(a) = 0$.

Si F est une primitive de f sur I , alors il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que pour tout x de I , $G(x) = F(x) + k$. Or $G(a) = 0$, d'où $k = -F(a)$ et on obtient : $\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$.

En posant $x = b$, on obtient bien $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$.

Notation

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Notation

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Remarque

Cela permet de valider la formule :

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= [F(x)]_a^b = F(b) - F(a) \\ &= -(F(a) - F(b)) \\ &= -\int_b^a f(x)dx\end{aligned}$$

Exercice

Calculer $I = \int_1^2 (x-3)(x-9)dx$.

Exercice

Calculer $I = \int_1^2 (x-3)(x-9)dx$.

$$I = \frac{34}{3}$$

Théorème

Si u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I , telles que leurs dérivées u' et v' soient continues sur I .

Alors pour tous réels a et b de I :

$$\int_a^b u(t)v'(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)dt$$

Preuve

La fonction uv est dérivable sur I avec $(uv)' = u'v + uv'$.

Ainsi $uv' = (uv)' - u'v$.

Puisque uv' , $(uv)'$ et $u'v$ sont continues sur I , on en déduit que :

Preuve

La fonction uv est dérivable sur I avec $(uv)' = u'v + uv'$.

Ainsi $uv' = (uv)' - u'v$.

Puisque uv' , $(uv)'$ et $u'v$ sont continues sur I , on en déduit que :

$$\int_a^b (uv')(t)dt = \int_a^b [(uv)'(t) - (u'v)(t)]dt$$

Preuve

La fonction uv est dérivable sur I avec $(uv)' = u'v + uv'$.

Ainsi $uv' = (uv)' - u'v$.

Puisque uv' , $(uv)'$ et $u'v$ sont continues sur I , on en déduit que :

$$\int_a^b (uv')(t)dt = \int_a^b [(uv)'(t) - (u'v)(t)]dt$$

et par linéarité de l'intégration :

$$\int_a^b (uv')(t)dt = \int_a^b (uv)'(t)dt - \int_a^b (u'v)(t)dt$$

Preuve

Or uv est une primitive de $(uv)'$ sur I , donc

$$\int_a^b (uv)'(t) dt = [u(t)v(t)]_a^b$$

Preuve

Or uv est une primitive de $(uv)'$ sur I , donc

$$\int_a^b (uv)'(t) dt = [u(t)v(t)]_a^b$$

Ainsi, on obtient :

$$\int_a^b u(t)v'(t) dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t) dt$$

Exercice

Calculer $J = \int_1^2 x \ln(x) dx$.

Exercice

Calculer $J = \int_1^2 x \ln(x) dx$.

$$J = 2 \ln(2) - \frac{3}{4}$$

Théorème

Soient φ une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur un intervalle I de \mathbb{R} et f une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur un intervalle J de \mathbb{R} (fonctions à valeurs dans \mathbb{R}). On suppose que $\varphi(I) \subset J$.

Alors :

$$\int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx$$

Exercice

Calculer $K = \int_1^2 \frac{dx}{x(1 + \ln(x))}$ (on posera $u = 1 + \ln(x)$).

Exercice

Calculer $K = \int_1^2 \frac{dx}{x(1 + \ln(x))}$ (on posera $u = 1 + \ln(x)$).

$$K = \ln(1 + \ln(2))$$

Théorème

- Soit $f \in \mathcal{C}([-a, a], \mathbb{R})$. Alors :

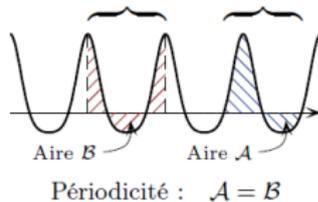
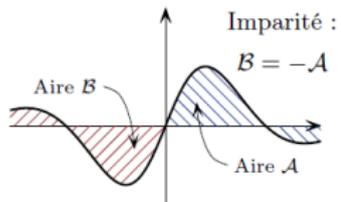
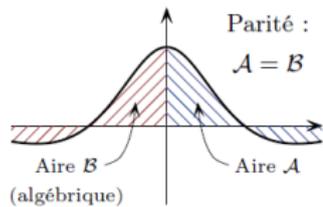
$$\int_{-a}^a f = 2 \int_0^a f \text{ si } f \text{ est paire}$$

$$\int_{-a}^a f = 0 \text{ si } f \text{ est impaire}$$

- Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ périodique de période T . Alors :

$$\int_a^{a+T} f = \int_0^T f$$

Parité-Imparité-Périodicité



Les fractions rationnelles

Le corps des fractions rationnelles $\mathbb{R}(X)$

Introduction

Le corps des fractions de l'anneau intègre $\mathbb{R}[X]$ se note $\mathbb{R}(X)$ dont les éléments sont de la forme $\frac{P}{Q}$; où P et Q deux polynômes tels que $Q \neq 0$ et s'appellent des fractions rationnelles.

Cette écriture est dite irréductible lorsque $P \wedge Q = 1$.

Toute fraction rationnelle peut s'écrire sous une forme irréductible...

Définition

Le degré d'une fraction rationnelle $\frac{P}{Q}$ est défini à l'aide des relations :

$$\deg\left(\frac{P}{Q}\right) = -\infty \text{ si } \frac{P}{Q} = 0$$

$$\deg\left(\frac{P}{Q}\right) = \deg(P) - \deg(Q) \text{ sinon}$$

Le degré d'une fraction rationnelle est donc un élément de $\mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$.

Définition

Soit $F = \frac{P}{Q}$ écrite sous sa forme irréductible, les pôles de F sont exactement les racines de Q , les multiplicités de ses racines de Q sont appelés aussi multiplicités des pôles associés pour la fraction rationnelle F .

Pôle d'une fraction rationnelle

Définition

Soit $F = \frac{P}{Q}$ écrite sous sa forme irréductible, les pôles de F sont exactement les racines de Q , les multiplicités de ses racines de Q sont appelés aussi multiplicités des pôles associés pour la fraction rationnelle F .

Remarque

Pour déterminer les pôles d'une fraction rationnelle il faut avant toute autre chose la simplifier et l'écrire sous sa forme irréductible.

Décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle

Définition

La partie entière d'une fraction rationnelle F est par définition l'unique polynôme noté $E(F)$ vérifiant la propriété :
 $\deg(F - E(F)) < 0$.

Décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle

Définition

La partie entière d'une fraction rationnelle F est par définition l'unique polynôme noté $E(F)$ vérifiant la propriété :
 $\deg(F - E(F)) < 0$.

Remarque

Si $F = \frac{P}{Q}$ la partie entière de F est exactement le quotient de la division euclidienne de P par Q .

Décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle

Définition

La partie entière d'une fraction rationnelle F est par définition l'unique polynôme noté $E(F)$ vérifiant la propriété :
 $\deg(F - E(F)) < 0$.

Remarque

Si $F = \frac{P}{Q}$ la partie entière de F est exactement le quotient de la division euclidienne de P par Q .

Exercice

Déterminer la partie entière de $F(x) = \frac{X^3 + 2X^2 - 3X + 2}{X^2 - 1}$.

Décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle

Définition

La partie polaire relative à un pôle a d'une fraction rationnelle F est par définition l'unique fraction rationnelle notée F_a vérifiant la propriété suivante : a n'est pas un pôle de $F - F_a$.

Décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle

Définition

La partie polaire relative à un pôle a d'une fraction rationnelle F est par définition l'unique fraction rationnelle notée F_a vérifiant la propriété suivante : a n'est pas un pôle de $F - F_a$.

Remarque

Si a est un pôle de multiplicité r dans F , alors la partie polaire relative à a dans F est de la forme :

$$F_a(X) = \frac{\lambda_1}{X-a} + \frac{\lambda_2}{(X-a)^2} + \dots + \frac{\lambda_r}{(X-a)^r}$$

Décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle

Définition

La partie polaire relative à un pôle a d'une fraction rationnelle F est par définition l'unique fraction rationnelle notée F_a vérifiant la propriété suivante : a n'est pas un pôle de $F - F_a$.

Remarque

Si a est un pôle de multiplicité r dans F , alors la partie polaire relative à a dans F est de la forme :

$$F_a(X) = \frac{\lambda_1}{X-a} + \frac{\lambda_2}{(X-a)^2} + \dots + \frac{\lambda_r}{(X-a)^r}$$

Toute fraction rationnelle se décompose en éléments simples de façon unique comme somme de sa partie entière et toutes les parties polaires relatives à ses pôles.

Cas d'un unique pôle

Si $F(X) = \frac{P(X)}{(X-a)^r}$ avec $\deg(P) < r$ admet un unique pôle a , alors sa décomposition en éléments simples est obtenue à l'aide de la *formule de Taylor* à l'ordre $r - 1$ appliquée au polynôme P au point a , plus précisément :

$$P(X) = P(a) + P'(a)(X - a) + \dots + \frac{P^{(r-1)}(a)}{(r-1)!}(X - a)^{r-1}$$

d'où

$$F(X) = \frac{P^{(r-1)}(a)}{(r-1)!} \frac{1}{X - a} + \dots + \frac{P(a)}{(X - a)^r}$$

Cas d'un unique pôle

Si $F(X) = \frac{P(X)}{(X-a)^r}$ avec $\deg(P) < r$ admet un unique pôle a , alors sa décomposition en éléments simples est obtenu à l'aide de la formule de Taylor à l'ordre $r - 1$ appliquée au polynôme P au point a , plus précisément :

$$P(X) = P(a) + P'(a)(X - a) + \dots + \frac{P^{(r-1)}(a)}{(r-1)!}(X - a)^{r-1}$$

d'où

$$F(X) = \frac{P^{(r-1)}(a)}{(r-1)!} \frac{1}{X - a} + \dots + \frac{P(a)}{(X - a)^r}$$

Exercice

Décomposer la fraction rationnelle suivante en éléments simples :

$$F(X) = \frac{2X + 1}{(X - 1)^2}$$

À retenir

Si a est un pôle de F de multiplicité r dans F , alors le coefficient λ_r de $\frac{1}{(X-a)^r}$ dans la partie polaire de F relative à a est obtenu à l'aide de la formule $\lambda_r = \lim_{X \rightarrow a} (X-a)^r F(X)$.

Coefficient du plus haut degré dans la partie polaire

À retenir

Si a est un pôle de F de multiplicité r dans F , alors le coefficient λ_r de $\frac{1}{(X-a)^r}$ dans la partie polaire de F relative à a est obtenu à l'aide de la formule $\lambda_r = \lim_{X \rightarrow a} (X-a)^r F(X)$.

Exercice

Décomposer la fraction rationnelle suivante en éléments simples :

$$F(X) = \frac{1}{X^2 - 5X + 4}$$

À retenir ou pas

Si a est un pôle simple de $F = \frac{P}{Q}$ (de multiplicité 1), alors la partie polaire de F relative au pôle a est de la forme

$$F_a(X) = \frac{\lambda}{X-a} \text{ où } \lambda = \frac{P(a)}{Q'(a)}.$$

À retenir ou pas

Si a est un pôle simple de $F = \frac{P}{Q}$ (de multiplicité 1), alors la partie polaire de F relative au pôle a est de la forme

$$F_a(X) = \frac{\lambda}{X-a} \text{ où } \lambda = \frac{P(a)}{Q'(a)}.$$

Exercice

Décomposer la fraction rationnelle suivante en éléments simples :

$$F(X) = \frac{1}{X^2 - 5X + 4}$$

Cas d'un pôle double

A ne pas retenir

Si a est un pôle double de $F = \frac{P}{Q}$ (de multiplicité 2), alors la partie polaire de F relative au pôle a est de la forme :

$$F_a(X) = \frac{\lambda}{X-a} + \frac{\mu}{(X-a)^2}$$

$$\text{où } \mu = \frac{2P(a)}{Q''(a)} ; \lambda = \frac{2}{3} \frac{3P'(a)Q''(a) - P(a)Q'''(a)}{(Q''(a))^2}.$$

Cas d'un pôle double

A ne pas retenir

Si a est un pôle double de $F = \frac{P}{Q}$ (de multiplicité 2), alors la partie polaire de F relative au pôle a est de la forme :

$$F_a(X) = \frac{\lambda}{X-a} + \frac{\mu}{(X-a)^2}$$

où $\mu = \frac{2P(a)}{Q''(a)}$; $\lambda = \frac{2}{3} \frac{3P'(a)Q''(a) - P(a)Q'''(a)}{(Q''(a))^2}$.

Exercice

Décomposer la fraction rationnelle suivante en éléments simples :

$$F(X) = \frac{2X+1}{(X-1)^2}$$

Cas d'une fraction rationnelle paire ou impaire

Soit F une fraction rationnelle paire ou impaire et a un pôle de F de partie polaire dans F égale à

$F_a(X) = \frac{\lambda_1}{X-a} + \frac{\lambda_2}{(X-a)^2} + \dots + \frac{\lambda_r}{(X-a)^r}$, alors $-a$ est aussi un pôle de F de même multiplicité que a et dont la partie polaire dans F est :

- Si F paire, $F_{-a}(X) = \frac{-\lambda_1}{X+a} + \frac{\lambda_2}{(X+a)^2} + \dots + \frac{(-1)^r \lambda_r}{(X+a)^r}$.
- Si F impaire, $F_{-a}(X) = \frac{\lambda_1}{X+a} + \frac{-\lambda_2}{(X+a)^2} + \dots + \frac{(-1)^{r+1} \lambda_r}{(X+a)^r}$.

Cas d'une fraction rationnelle de la forme $F = P'/P$

Dans ce cas si $(a_i)_{1 \leq i \leq r}$ sont les racine de P de multiplicité α_i , alors ce sont des pôles simple de F , et la décomposition en élément simple de F est donnée à l'aide de la formule :

$$\frac{P'(X)}{P(X)} = \sum_{i=1}^r \frac{\lambda_i}{X - a_i}$$

Vous pouvez aussi décomposer une fraction en éléments simples en utilisant la méthode d'identification...mais bon courage... 😊