

Intégrales généralisées

Hervé Hocquard

Université de Bordeaux, France

7 octobre 2015

Notation

On pose $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Notation

On pose $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Motivation

Considérons la fonction $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ définie sur l'intervalle $]0, 1]$.

Pour tout $\delta \in]0, 1]$, la fonction f est intégrable sur $[\delta, 1]$; de plus :

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\delta}^1 f(x) dx = 2.$$

Notation

On pose $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Motivation

Considérons la fonction $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ définie sur l'intervalle $]0, 1]$.

Pour tout $\delta \in]0, 1]$, la fonction f est intégrable sur $[\delta, 1]$; de plus :

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\delta}^1 f(x) dx = 2.$$

Cela nous motive à définir $\int_0^1 f(x) dx = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\delta}^1 f(x) dx$.

Objectifs de ce cours

- 1 Être capable de calculer une intégrale généralisée ou

Objectifs de ce cours

- 1 Être capable de calculer une intégrale généralisée ou
- 2 Être capable de dire si une intégrale généralisée converge ou pas.

Définition

Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle I .

On dira que f est localement intégrable sur I si f est intégrable sur chaque intervalle fermé et borné $[\alpha, \beta] \subset I$.

Fonctions localement intégrables

Définition

Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle I .
On dira que f est localement intégrable sur I si f est intégrable sur chaque intervalle fermé et borné $[\alpha, \beta] \subset I$.

Proposition

Toute fonction continue sur un intervalle I est localement intégrable sur I .

Fonctions localement intégrables

Définition

Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle I .
On dira que f est localement intégrable sur I si f est intégrable sur chaque intervalle fermé et borné $[\alpha, \beta] \subset I$.

Proposition

Toute fonction continue sur un intervalle I est localement intégrable sur I .

Proposition

Toute fonction réelle et monotone sur un intervalle I est localement intégrable sur I .

Définition

Soit I un intervalle de \mathbb{R} d'extrémités $a < b$ ($a, b \in \overline{\mathbb{R}}$) et soit c un réel tel que $a < c < b$.

Soit f une fonction réelle localement intégrable sur I .

Si les limites

$$\lim_{\alpha \rightarrow a} \int_{\alpha}^c f(x) dx \quad \text{et} \quad \lim_{\beta \rightarrow b} \int_c^{\beta} f(x) dx$$

sont finies, on dira que l'intégrale généralisée $\int_a^b f$ converge et on posera :

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\alpha \rightarrow a} \int_{\alpha}^c f(x) dx + \lim_{\beta \rightarrow b} \int_c^{\beta} f(x) dx$$

Exemple

L'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$ converge et est égale à 1.

Exemple

L'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$ converge et est égale à 1.

Preuve

La fonction $x \mapsto e^{-x}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et donc localement intégrable. Puisque

$$\int_0^N e^{-x} dx = [-e^{-x}]_0^N = 1 - e^{-N} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 1$$

notre affirmation est bien démontrée.

Exemple

L'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ diverge.

Exemple

L'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ diverge.

Preuve

La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $[1, +\infty[$ et donc localement intégrable. Puisque

$$\int_1^N \frac{1}{x} dx = [\ln |x|]_1^N = \ln(N) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} +\infty$$

notre affirmation est bien démontrée.

Théorème (Linéarité de l'intégrale généralisée)

Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions localement intégrables sur un intervalle I d'extrémités $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Si les intégrales généralisées $\int_a^b f$ et $\int_a^b g$ convergent alors, pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, l'intégrale généralisée $\int_a^b (\lambda f + \mu g)$ converge et on a :

Théorème (Linéarité de l'intégrale généralisée)

Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions localement intégrables sur un intervalle I d'extrémités $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Si les intégrales généralisées $\int_a^b f$ et $\int_a^b g$ convergent alors, pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, l'intégrale généralisée $\int_a^b (\lambda f + \mu g)$ converge et on a :

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g.$$

Théorème (Croissance de l'intégrale généralisée)

Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions localement intégrables sur un intervalle I d'extrémités $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Si les intégrales généralisées $\int_a^b f$ et $\int_a^b g$ convergent et $f \leq g$ alors on a :

Théorème (Croissance de l'intégrale généralisée)

Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions localement intégrables sur un intervalle I d'extrémités $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Si les intégrales généralisées $\int_a^b f$ et $\int_a^b g$ convergent et $f \leq g$ alors on a :

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g.$$

Proposition (Intégrale de Riemann)

L'intégrale généralisée

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Preuve

Si $\alpha > 1$, on a :

$$\int_1^N \frac{1}{x^\alpha} dx = \frac{1}{1-\alpha} (N^{1-\alpha} - 1) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{-1}{1-\alpha}$$

Preuve

Si $\alpha > 1$, on a :

$$\int_1^N \frac{1}{x^\alpha} dx = \frac{1}{1-\alpha} (N^{1-\alpha} - 1) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{-1}{1-\alpha}$$

De la même formule on en déduit que si $\alpha < 1$, on a :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_1^N \frac{1}{x^\alpha} dx = +\infty.$$

Preuve

Si $\alpha > 1$, on a :

$$\int_1^N \frac{1}{x^\alpha} dx = \frac{1}{1-\alpha} \left(N^{1-\alpha} - 1 \right) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{-1}{1-\alpha}$$

De la même formule on en déduit que si $\alpha < 1$, on a :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_1^N \frac{1}{x^\alpha} dx = +\infty.$$

Si $\alpha = 1$, on a :

$$\int_1^N \frac{1}{x^\alpha} dx = \ln(N) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Proposition (Intégrale de Riemann)

L'intégrale généralisée

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

converge si et seulement si $\alpha < 1$.

Preuve

Si $\alpha < 1$, on a :

$$\int_N^1 \frac{1}{x^\alpha} dx = \frac{1}{1-\alpha} \left(1 - N^{1-\alpha}\right) \xrightarrow{N \rightarrow 0^+} \frac{1}{1-\alpha}$$

Preuve

Si $\alpha < 1$, on a :

$$\int_N^1 \frac{1}{x^\alpha} dx = \frac{1}{1-\alpha} \left(1 - N^{1-\alpha}\right) \xrightarrow{N \rightarrow 0^+} \frac{1}{1-\alpha}$$

De la même formule on en déduit que si $\alpha > 1$, on a :

$$\lim_{N \rightarrow 0^+} \int_N^1 \frac{1}{x^\alpha} dx = +\infty.$$

Preuve

Si $\alpha < 1$, on a :

$$\int_N^1 \frac{1}{x^\alpha} dx = \frac{1}{1-\alpha} \left(1 - N^{1-\alpha}\right) \xrightarrow{N \rightarrow 0^+} \frac{1}{1-\alpha}$$

De la même formule on en déduit que si $\alpha > 1$, on a :

$$\lim_{N \rightarrow 0^+} \int_N^1 \frac{1}{x^\alpha} dx = +\infty.$$

Si $\alpha = 1$, on a :

$$\int_N^1 \frac{1}{x^\alpha} dx = -\ln(N) \xrightarrow{N \rightarrow 0^+} +\infty.$$

Proposition

Pour tout $a > 1$, l'intégrale généralisée

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x \ln^\alpha x} dx, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Preuve

Pour $\alpha \neq 1$, une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x \ln^\alpha x}$ est donnée par la fonction $x \mapsto \frac{1}{1-\alpha} \ln^{1-\alpha} x$ et si $\alpha = 1$, une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x \ln x}$ est donnée par la fonction $x \mapsto \ln(\ln x)$.

Preuve

Pour $\alpha \neq 1$, une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x \ln^\alpha x}$ est donnée par la fonction $x \mapsto \frac{1}{1-\alpha} \ln^{1-\alpha} x$ et si $\alpha = 1$, une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x \ln x}$ est donnée par la fonction $x \mapsto \ln(\ln x)$.

À vous de jouer...

Proposition

L'intégrale généralisée

$$\int_0^{+\infty} r^x dx, \quad r > 0$$

converge si et seulement si $r < 1$.

L'intégrale diverge si et seulement si $r \geq 1$.

Proposition

L'intégrale généralisée

$$\int_0^{+\infty} r^x dx, \quad r > 0$$

converge si et seulement si $r < 1$.

L'intégrale diverge si et seulement si $r \geq 1$.

Exemple

L'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^x dx$ converge.

Notation

Si $f \geq 0$ et l'intégrale généralisée $\int_a^b f(x)dx$ ne converge pas alors on posera :

$$\int_a^b f(x)dx = +\infty.$$

Critères de convergence pour les fonctions positives

Notation

Si $f \geq 0$ et l'intégrale généralisée $\int_a^b f(x) dx$ ne converge pas alors on posera :

$$\int_a^b f(x) dx = +\infty.$$

Théorème

Soient f, g deux fonctions positives et localement intégrables sur $[a, b]$. Supposons que

$$f \leq g$$

Alors si l'intégrale $\int_a^b g$ converge alors l'intégrale $\int_a^b f$ converge aussi ; si l'intégrale $\int_a^b f$ diverge alors l'intégrale $\int_a^b g$ diverge aussi.

Exemple

L'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3 + 3x^2 + x} dx$ converge.

Critères de convergence pour les fonctions positives

Exemple

L'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3 + 3x^2 + x} dx$ converge.

Preuve

À vous de jouer...

Corollaire

Soient f, g deux fonctions positives et localement intégrables sur $[a, b[$. Supposons que la limite

$$\lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x < b}} \frac{f(x)}{g(x)}$$

existe et est non nulle. Alors les intégrales généralisées $\int_a^b f$ et $\int_a^b g$ ont la même nature.

Exemple

L'intégrale généralisée $\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{x}} dx$ converge.

Exemple

L'intégrale généralisée $\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{x}} dx$ converge.

Preuve

Nous avons vu que l'intégrale généralisée $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ converge.
Or

Exemple

L'intégrale généralisée $\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{x}} dx$ converge.

Preuve

Nous avons vu que l'intégrale généralisée $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ converge.

Or

$$\frac{e^x}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Critères de convergence pour les fonctions positives

Exemple

L'intégrale généralisée $\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{x}} dx$ converge.

Preuve

Nous avons vu que l'intégrale généralisée $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ converge.

Or

$$\frac{\frac{e^x}{\sqrt{x}}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = e^x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1.$$

Le corollaire précédent nous permet de conclure que $\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{x}} dx$ converge.

Théorème

Soit f une fonction continue et positive sur $[a, +\infty[$ telle que $x^\alpha f(x)$ possède une limite finie ℓ quand x tend vers $+\infty$, alors :

- 1 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ diverge si et seulement si $\alpha \leq 1$ et $\ell > 0$.
- 2 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ converge si et seulement si $\alpha > 1$ et $\ell \geq 0$.
- 3 Sinon nous ne pouvons pas conclure sur la nature de l'intégrale.

Un autre critère de convergence

Théorème

Soit f une fonction continue et positive sur $[a, +\infty[$ telle que $x^\alpha f(x)$ possède une limite finie ℓ quand x tend vers $+\infty$, alors :

- 1 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ diverge si et seulement si $\alpha \leq 1$ et $\ell > 0$.
- 2 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ converge si et seulement si $\alpha > 1$ et $\ell \geq 0$.
- 3 Sinon nous ne pouvons pas conclure sur la nature de l'intégrale.

Exemples

L'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx$ converge.

L'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3 + 3x^2 + x} dx$ converge.

Théorème

Soit f continue sur $[a, b[$, on pose $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. Pour calculer F on applique les méthodes classiques de calcul d'une intégrale. On calcule ensuite $\lim_{x \rightarrow b} F(x)$.

Théorème

Soit f continue sur $[a, b[$, on pose $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. Pour calculer F on applique les méthodes classiques de calcul d'une intégrale. On calcule ensuite $\lim_{x \rightarrow b} F(x)$.

Exemple

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1$$

Théorème

Soit f continue sur $[a, b[$, on pose $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. Pour calculer F on applique les méthodes classiques de calcul d'une intégrale. On calcule ensuite $\lim_{x \rightarrow b} F(x)$.

Exemple

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1$$

Remarque

Soit $F(x) = \int_a^x f(t)dt$.

Le domaine de définition de F est le domaine de continuité de f qui contient a .

Théorème

Soient f et g deux fonctions réelles de classe \mathcal{C}^1 sur un intervalle $]a, b[$. Supposons que les limites

$$L = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x)g(x) \quad \text{et} \quad M = \lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x < b}} f(x)g(x)$$

existent (finies). Alors les intégrales $\int_a^b f(x)g'(x)dx$ et $\int_a^b f'(x)g(x)dx$ sont de même nature ; quand elles convergent on a alors :

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = (M - L) - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

Exemple

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx = n!$$

Exemple

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx = n!$$

Preuve

À vous de jouer...

Méthodes de calcul : Intégration à l'aide d'un changement de variable

La formule classique de changement de variables dans une intégrale "classique" s'applique aussi aux intégrales généralisées :

Méthodes de calcul : Intégration à l'aide d'un changement de variable

La formule classique de changement de variables dans une intégrale "classique" s'applique aussi aux intégrales généralisées :

Théorème

Soient $\varphi :]a, b[\rightarrow]\alpha, \beta[$ ($a, b, \alpha, \beta \in \overline{\mathbb{R}}$) une application bijective de classe \mathcal{C}^1 . Si f est une fonction localement intégrable sur $] \alpha, \beta[$ alors la fonction $(f \circ \varphi)\varphi'$ est aussi localement intégrable sur $]a, b[$.

Les intégrales généralisées $\int_{\alpha}^{\beta} f$ et $\int_a^b (f \circ \varphi)\varphi'$ sont de même nature et si elles convergent on a :

$$\int_{\alpha}^{\beta} f = \int_a^b (f \circ \varphi)\varphi'.$$

Exercice

1 Montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$ converge (contre toute attente... $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \sqrt{2\pi}$).

2 Montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$ avec $\mu \in \mathbb{R}^+$ et $\sigma \in \mathbb{R}_*^+$.

3 Calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$.

4 Calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \right)^2$.