

# Coloration d'arêtes à distance 2 des graphes subcubiques

Hervé Hocquard    Petru Valicov

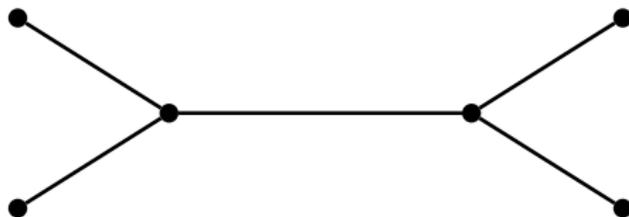
Université de Bordeaux, France

JGA 2010  
8 Novembre 2010

## $k$ -coloration forte d'arêtes

Une  **$k$ -coloration forte d'arêtes** d'un graphe  $G$  est une application  $c : E(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$  de telle sorte que deux arêtes adjacentes ou adjacentes à une même arête reçoivent des couleurs différentes.

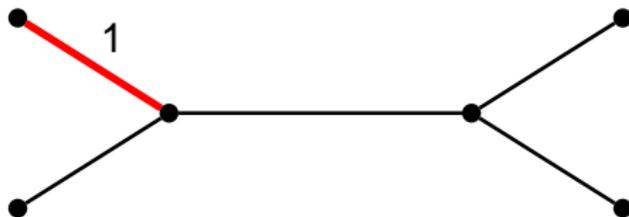
L'**indice chromatique fort** de  $G$ ,  $\chi'_s(G)$ , est le plus petit entier  $k$  tel que  $G$  admette une  $k$ -coloration forte d'arêtes.



## $k$ -coloration forte d'arêtes

Une  **$k$ -coloration forte d'arêtes** d'un graphe  $G$  est une application  $c : E(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$  de telle sorte que deux arêtes adjacentes ou adjacentes à une même arête reçoivent des couleurs différentes.

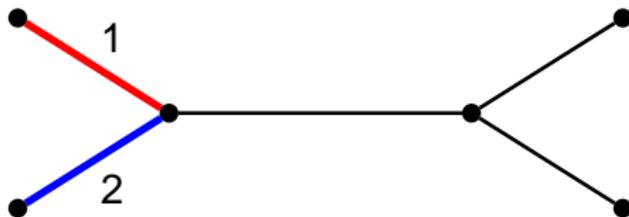
L'**indice chromatique fort** de  $G$ ,  $\chi'_s(G)$ , est le plus petit entier  $k$  tel que  $G$  admette une  $k$ -coloration forte d'arêtes.



## $k$ -coloration forte d'arêtes

Une  *$k$ -coloration forte d'arêtes* d'un graphe  $G$  est une application  $c : E(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$  de telle sorte que deux arêtes adjacentes ou adjacentes à une même arête reçoivent des couleurs différentes.

L'*indice chromatique fort* de  $G$ ,  $\chi'_s(G)$ , est le plus petit entier  $k$  tel que  $G$  admette une  $k$ -coloration forte d'arêtes.



## $k$ -coloration forte d'arêtes

Une  *$k$ -coloration forte d'arêtes* d'un graphe  $G$  est une application  $c : E(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$  de telle sorte que deux arêtes adjacentes ou adjacentes à une même arête reçoivent des couleurs différentes.

L'*indice chromatique fort* de  $G$ ,  $\chi'_s(G)$ , est le plus petit entier  $k$  tel que  $G$  admette une  $k$ -coloration forte d'arêtes.



## $k$ -coloration forte d'arêtes

Une  *$k$ -coloration forte d'arêtes* d'un graphe  $G$  est une application  $c : E(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$  de telle sorte que deux arêtes adjacentes ou adjacentes à une même arête reçoivent des couleurs différentes.

L'*indice chromatique fort* de  $G$ ,  $\chi'_s(G)$ , est le plus petit entier  $k$  tel que  $G$  admette une  $k$ -coloration forte d'arêtes.



## $k$ -coloration forte d'arêtes

Une  *$k$ -coloration forte d'arêtes* d'un graphe  $G$  est une application  $c : E(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$  de telle sorte que deux arêtes adjacentes ou adjacentes à une même arête reçoivent des couleurs différentes.

L'*indice chromatique fort* de  $G$ ,  $\chi'_s(G)$ , est le plus petit entier  $k$  tel que  $G$  admette une  $k$ -coloration forte d'arêtes.

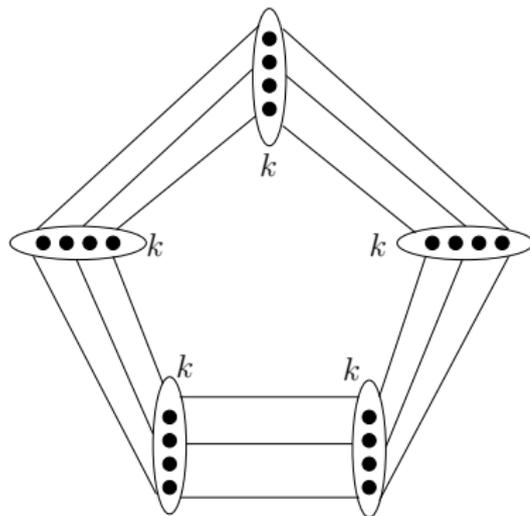


## Conjecture [Erdős, Nešetřil, 1985]

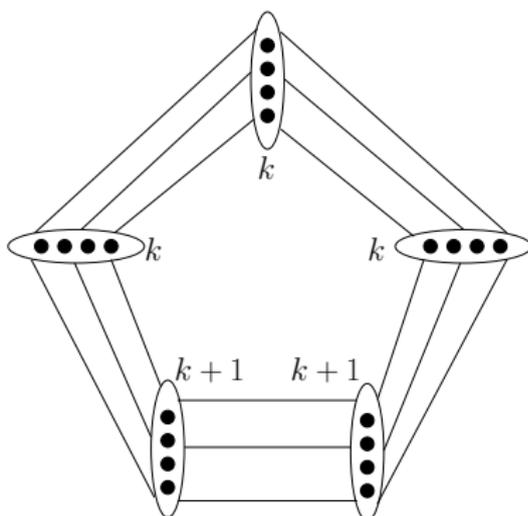
$\chi'_s(\mathbf{G}) \leq \frac{5}{4}\Delta^2$  si  $\Delta$  est pair et  $\chi'_s(\mathbf{G}) \leq \frac{1}{4}(5\Delta^2 - 2\Delta + 1)$  si  $\Delta$  est impair.

## Conjecture [Erdős, Nešetřil, 1985]

$\chi'_s(\mathcal{G}) \leq \frac{5}{4}\Delta^2$  si  $\Delta$  est pair et  $\chi'_s(\mathcal{G}) \leq \frac{1}{4}(5\Delta^2 - 2\Delta + 1)$  si  $\Delta$  est impair.

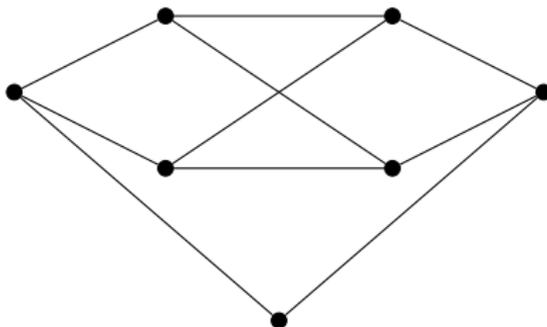


$$\Delta = 2k, \chi'_s = 5k^2$$



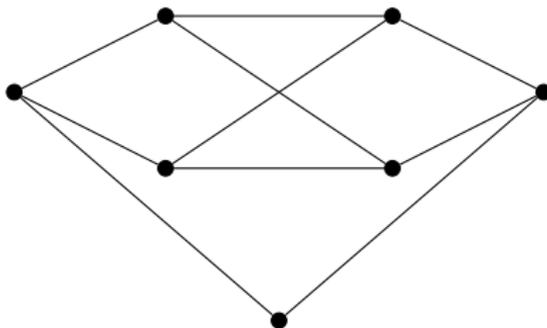
$$\Delta = 2k + 1, \chi'_s = 5k^2 + 4k + 1$$

# Les graphes subcubiques



$$\chi'_s(G) = 10$$

# Les graphes subcubiques



$$\chi'_s(G) = 10$$

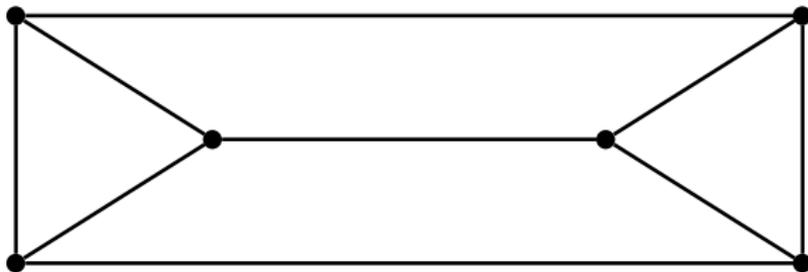
**Théorème [Horák *et al.*, 1992]**

Si  $G$  un graphe subcubique alors  $\chi'_s(G) \leq 10$ .

# Les graphes planaires subcubiques

Conjecture [Faudree *et al.*, 1990]

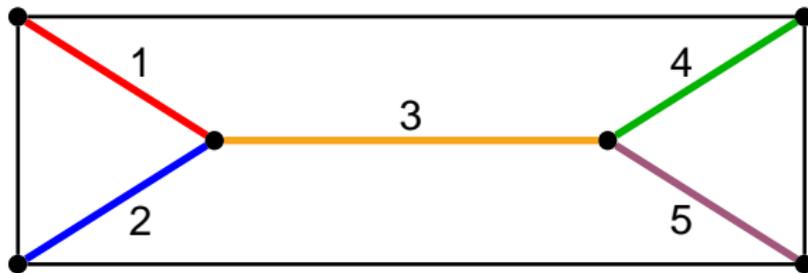
Si  $G$  est un graphe planaire subcubique alors,  $\chi'_s(G) \leq 9$ .



# Les graphes planaires subcubiques

Conjecture [Faudree *et al.*, 1990]

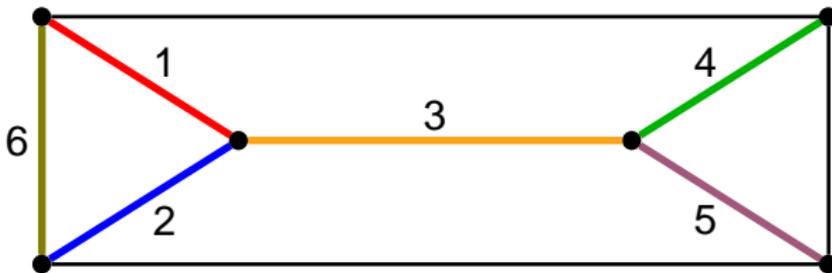
Si  $G$  est un graphe planaire subcubique alors,  $\chi'_s(G) \leq 9$ .



# Les graphes planaires subcubiques

Conjecture [Faudree *et al.*, 1990]

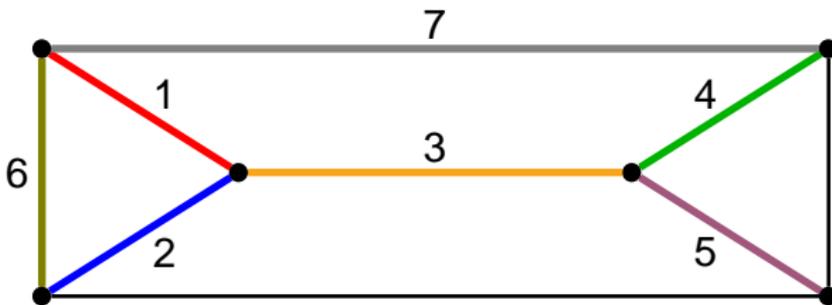
Si  $G$  est un graphe planaire subcubique alors,  $\chi'_s(G) \leq 9$ .



# Les graphes planaires subcubiques

Conjecture [Faudree *et al.*, 1990]

Si  $G$  est un graphe planaire subcubique alors,  $\chi'_s(G) \leq 9$ .



# Les graphes planaires subcubiques

Conjecture [Faudree *et al.*, 1990]

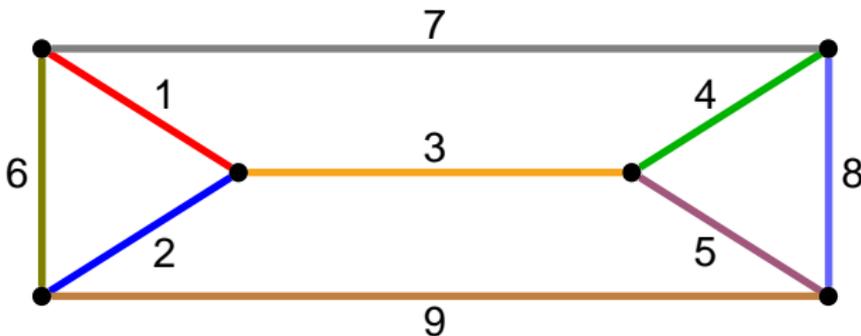
Si  $G$  est un graphe planaire subcubique alors,  $\chi'_s(G) \leq 9$ .



# Les graphes planaires subcubiques

Conjecture [Faudree *et al.*, 1990]

Si  $G$  est un graphe planaire subcubique alors,  $\chi'_s(G) \leq 9$ .



## Définition

Le *degré moyen maximum* d'un graphe  $G$ , noté  $mad(G)$ , est le maximum des degrés moyens de tous les sous-graphes de  $G$  :

$$mad(G) = \max \left\{ \frac{2|E(H)|}{|V(H)|}, H \subseteq G \right\}$$

## Théorème

Soit  $G$  un graphe subcubique :

- 1 Si  $mad(G) < \frac{15}{7}$ , alors  $\chi'_s(G) \leq 6$ .
- 2 Si  $mad(G) < \frac{27}{11}$ , alors  $\chi'_s(G) \leq 7$ .
- 3 Si  $mad(G) < \frac{13}{5}$ , alors  $\chi'_s(G) \leq 8$ .
- 4 Si  $mad(G) < \frac{36}{13}$ , alors  $\chi'_s(G) \leq 9$ .

## Lemme

Tout graphe planaire de maille au moins  $g$  vérifie :

$$mad(G) < \frac{2g}{g-2}$$

Rappelons que la maille d'un graphe  $G$  est la longueur d'un plus petit cycle contenu dans  $G$ .

## Lemme

Tout graphe planaire de maille au moins  $g$  vérifie :

$$mad(G) < \frac{2g}{g-2}$$

Rappelons que la maille d'un graphe  $G$  est la longueur d'un plus petit cycle contenu dans  $G$ .

## Corollaire

Soit  $G$  un graphe planaire subcubique de maille  $g$  :

- 1 Si  $g \geq 30$ , alors  $\chi'_s(G) \leq 6$ .
- 2 Si  $g \geq 11$ , alors  $\chi'_s(G) \leq 7$ .
- 3 Si  $g \geq 9$ , alors  $\chi'_s(G) \leq 8$ .
- 4 Si  $g \geq 8$ , alors  $\chi'_s(G) \leq 9$ .

# Déroulement de la preuve

Supposons que  $H$  est un contre-exemple d'ordre minimum au théorème.

1. Propriétés structurelles de  $H$ .
2. Procédure de déchargement.
  - 2.1 Une fonction poids  $\omega$  telle que  $\sum_x \omega(\mathbf{x}) < 0$ .
  - 2.2 Règles de déchargement.
  - 2.3 Création d'une nouvelle fonction poids  $\omega^*$  telle que  $\sum_x \omega(\mathbf{x}) = \sum_x \omega^*(\mathbf{x})$ .
3. En utilisant les hypothèses faites sur le mad et les propriétés structurelles de  $H$ , nous aboutissons à une contradiction,  $0 \leq \sum_x \omega^*(\mathbf{x}) = \sum_x \omega(\mathbf{x}) < 0$ .

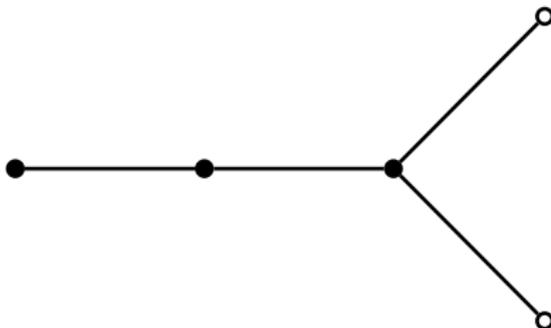
**Donc aucun contre-exemple n'existe.**

# Configurations réductibles

Soit  $H$  un contre-exemple d'ordre minimum au théorème.  
Alors  $H$  ne possède pas de :

# Configurations réductibles

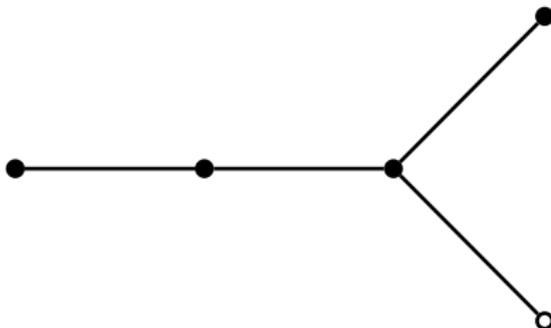
Soit  $H$  un contre-exemple d'ordre minimum au théorème.  
Alors  $H$  ne possède pas de :



(C1) 1-sommet adjacent à un 2-sommet

# Configurations réductibles

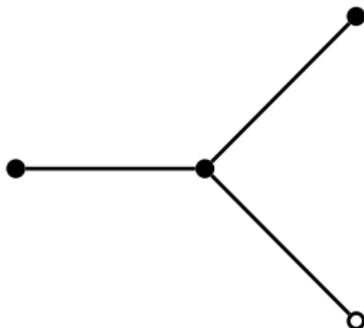
Soit  $H$  un contre-exemple d'ordre minimum au théorème.  
Alors  $H$  ne possède pas de :



**(C2)** 3-sommet adjacent à un 1-sommet et à un 2-sommet

# Configurations réductibles

Soit  $H$  un contre-exemple d'ordre minimum au théorème.  
Alors  $H$  ne possède pas de :



**(C3)** 3-sommet adjacent à deux 1-sommets

# Configurations réductibles

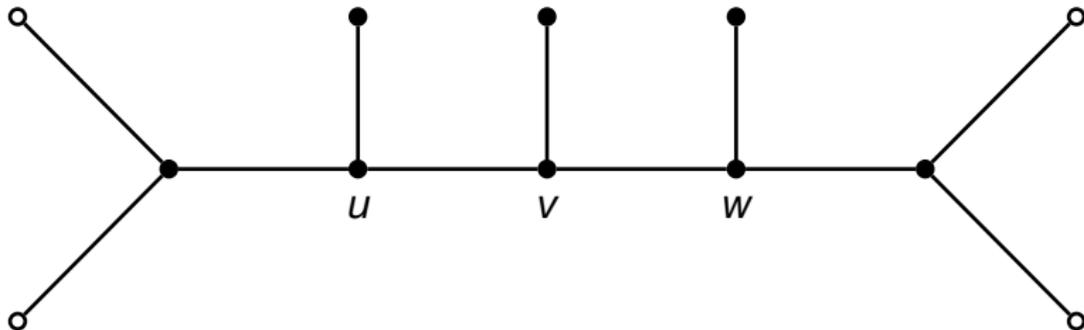
Soit  $H$  un contre-exemple d'ordre minimum au théorème.  
Alors  $H$  ne possède pas de :



(C4) une chaîne  $uvw$  telle que  $u$ ,  $v$  et  $w$  sont des 2-sommets

# Configurations réductibles

Soit  $H$  un contre-exemple d'ordre minimum au théorème.  
Alors  $H$  ne possède pas de :

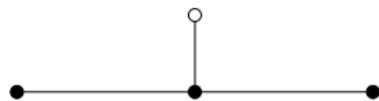


(C5) une chaîne  $uvw$  telle que  $u$ ,  $v$  et  $w$  sont des 3-sommets adjacents à des 1-sommets

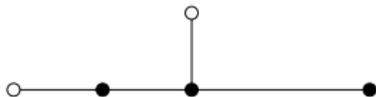
# Ensemble des configurations réductibles



(C1)



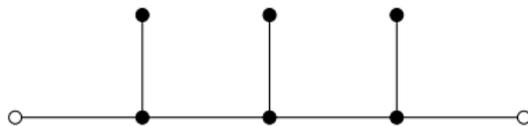
(C3)



(C2)

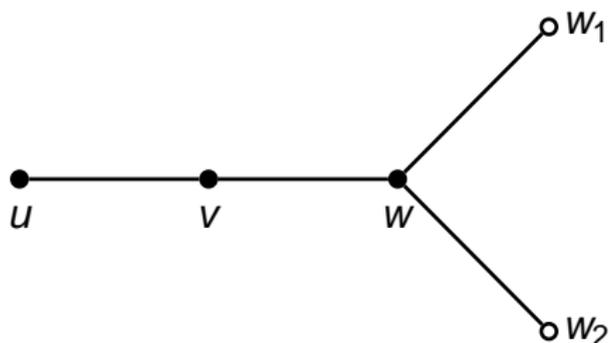


(C4)

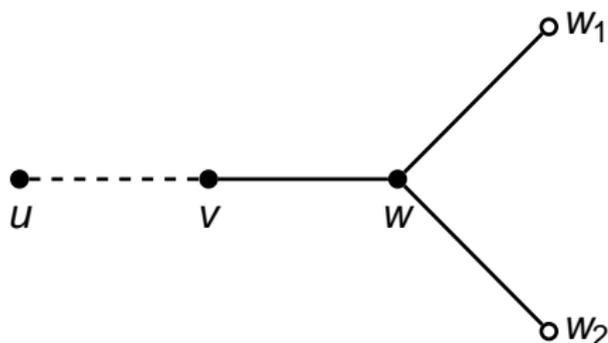


(C5)

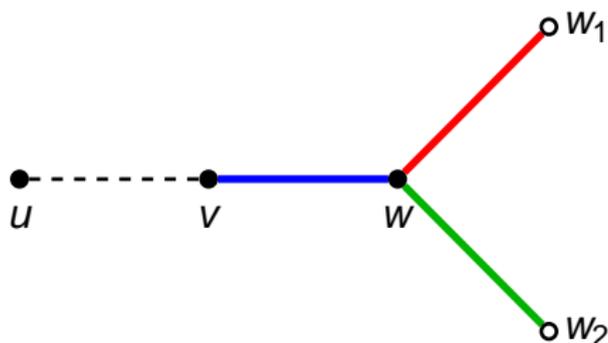
# Preuve de la configuration réductible (C1)



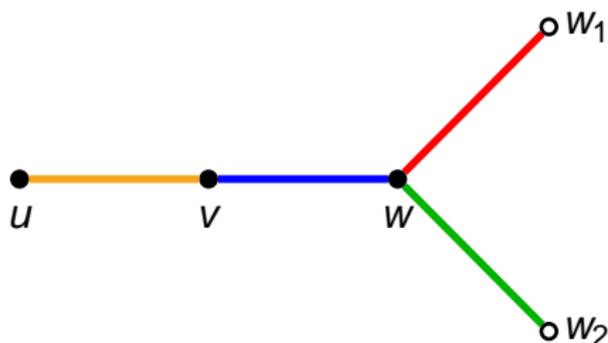
# Preuve de la configuration réductible (C1)



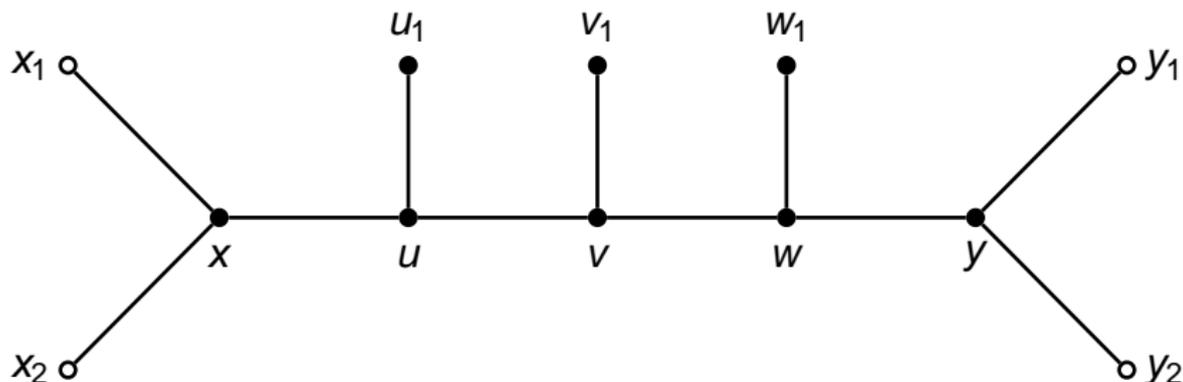
# Preuve de la configuration réductible (C1)



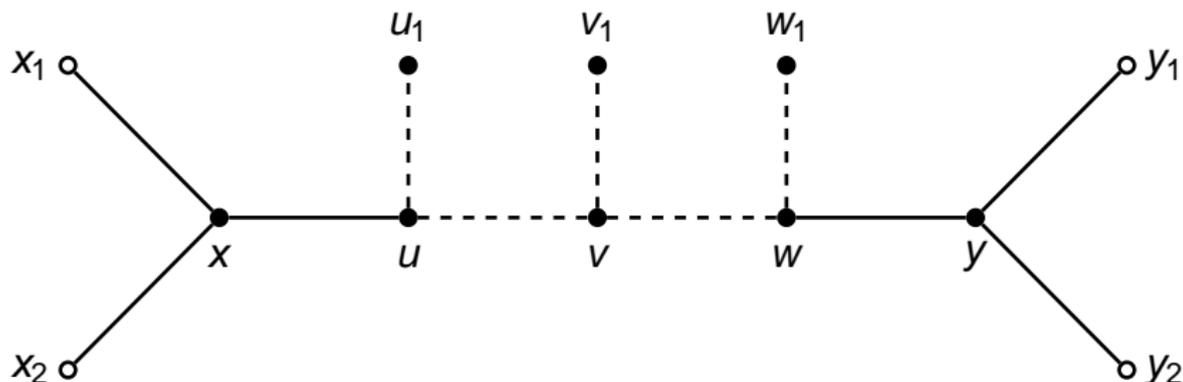
# Preuve de la configuration réductible (C1)



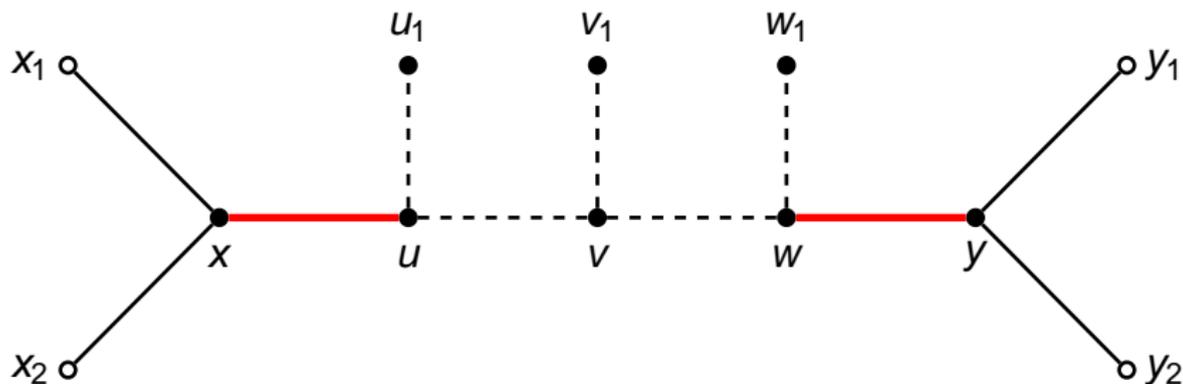
# Preuve de la configuration réductible (C5)



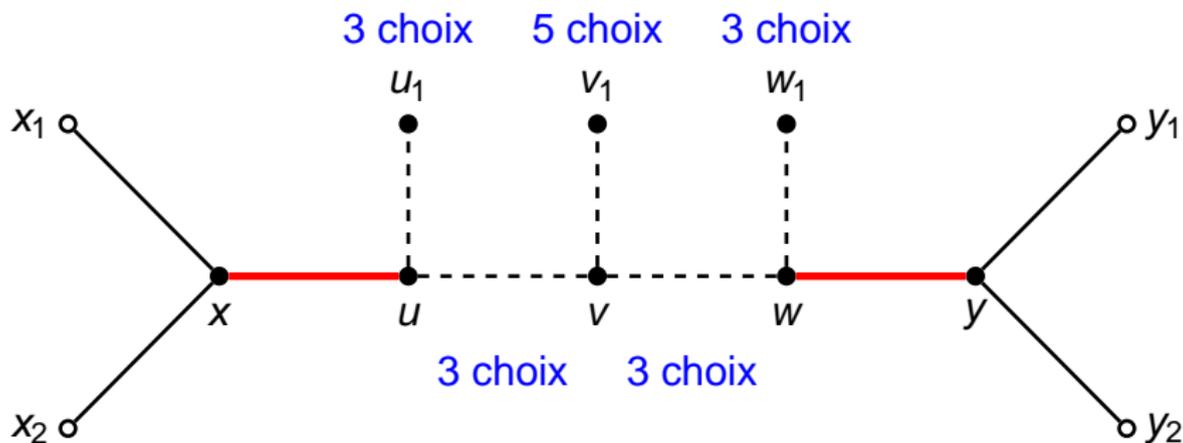
# Preuve de la configuration réductible (C5)



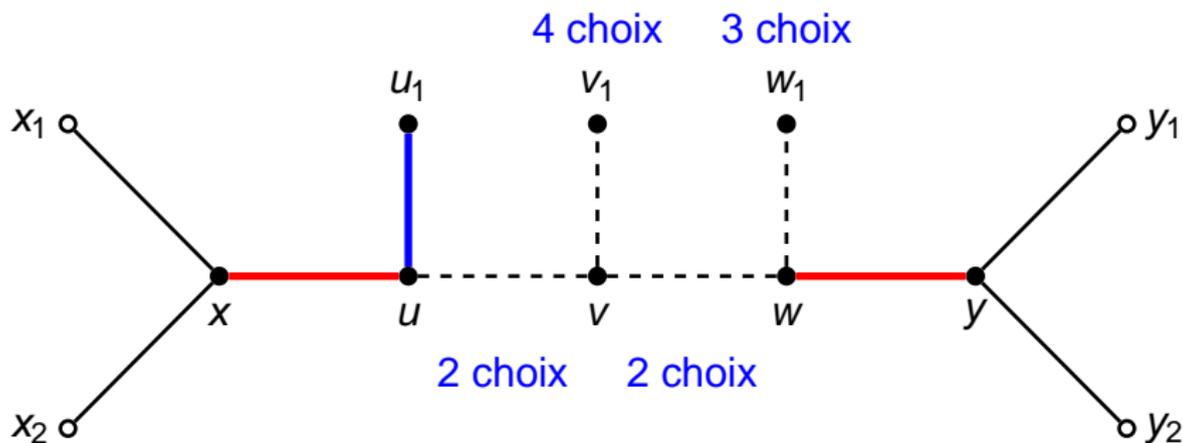
# Premier cas : $c(xu) = c(wy)$



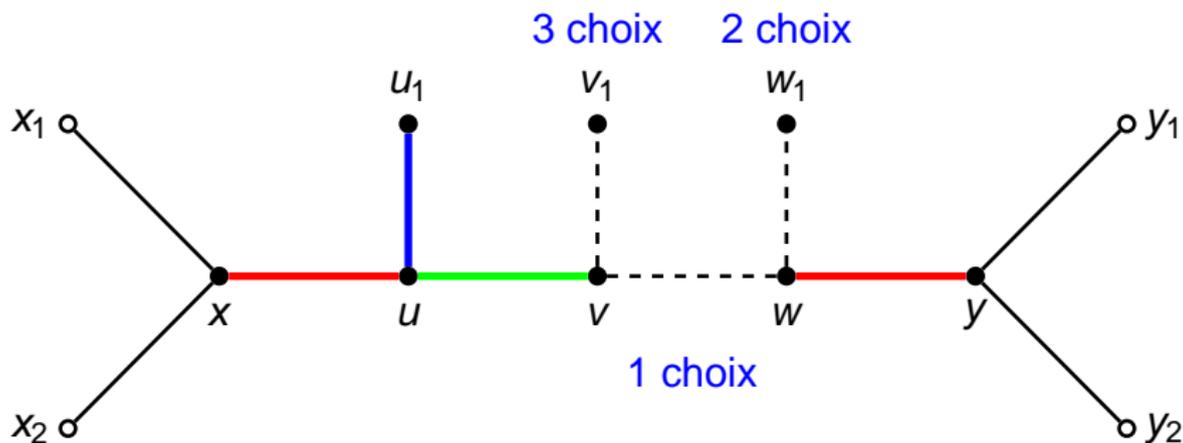
# Premier cas : $c(xu) = c(wy)$



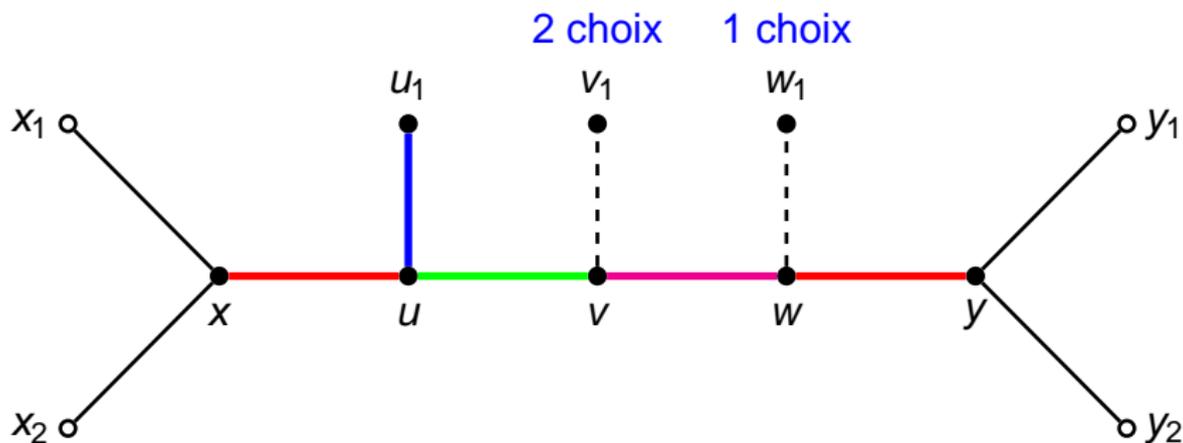
# Premier cas : $c(xu) = c(wy)$



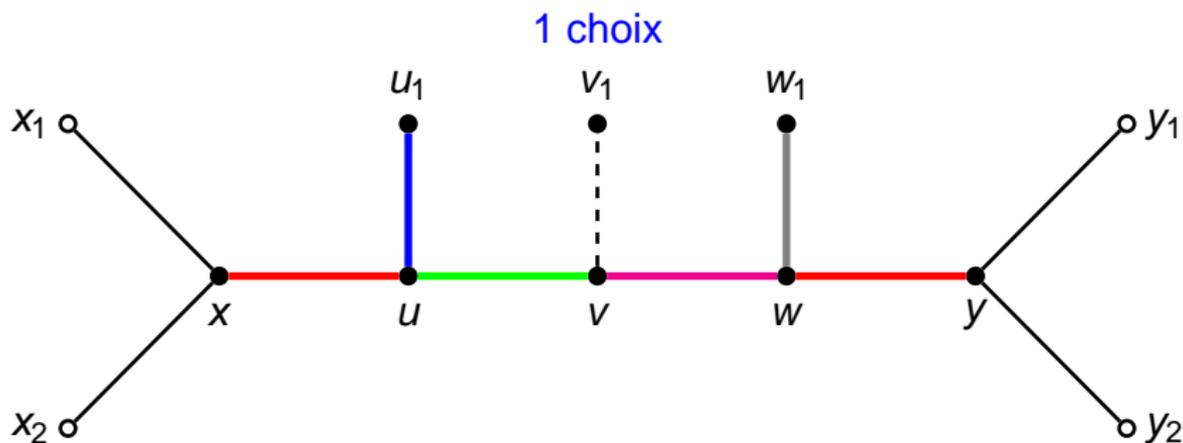
# Premier cas : $c(xu) = c(wy)$



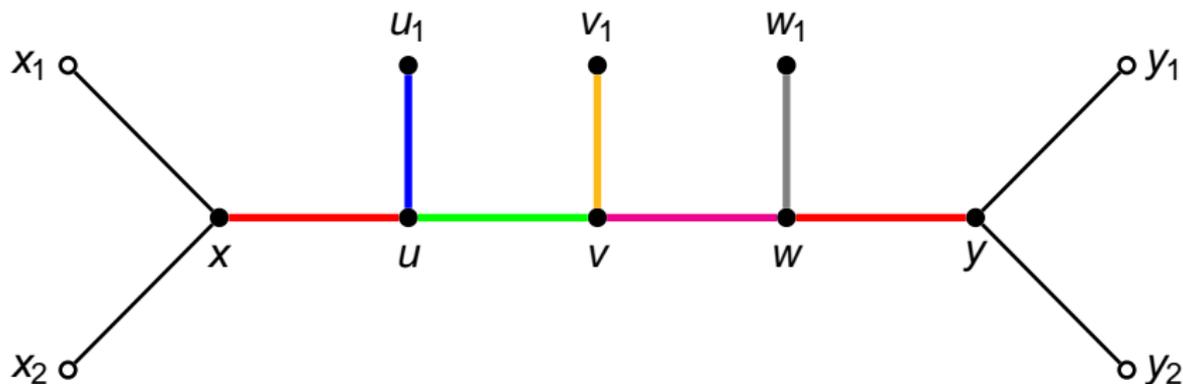
# Premier cas : $c(xu) = c(wy)$



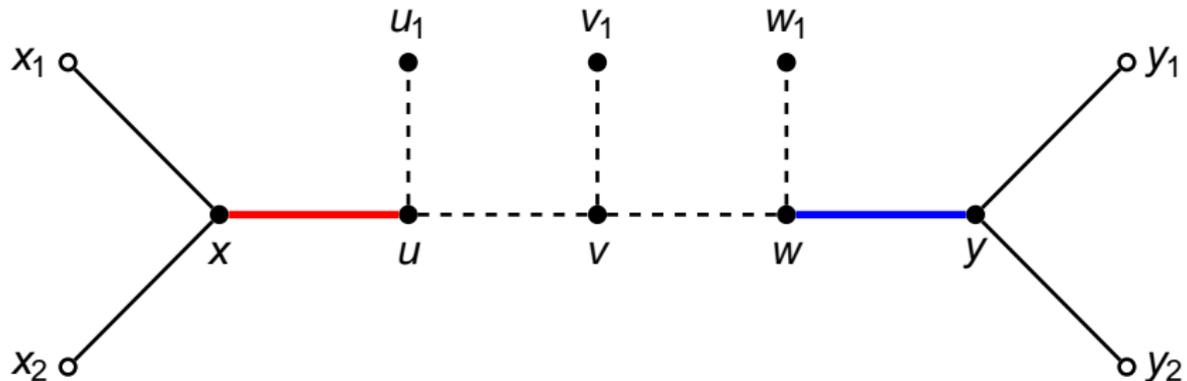
# Premier cas : $c(xu) = c(wy)$



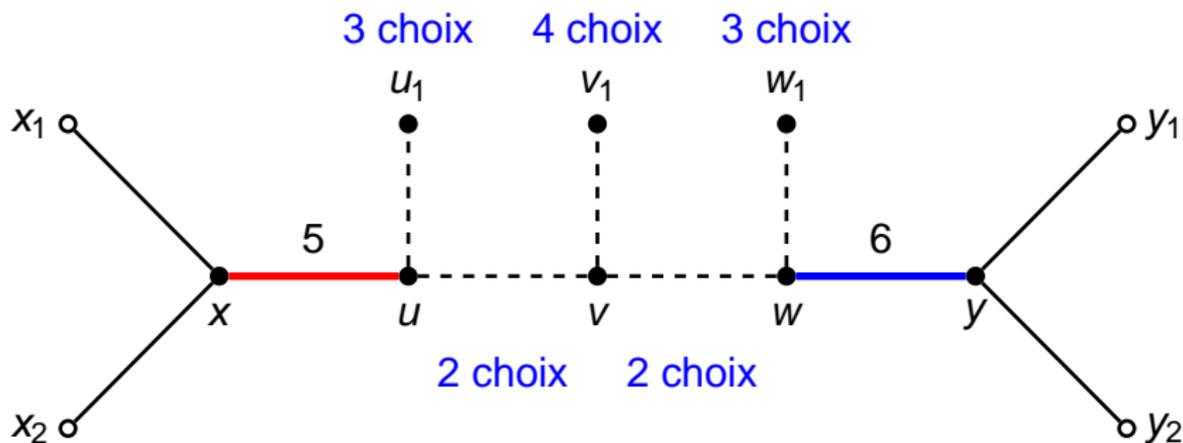
# Premier cas : $c(xu) = c(wy)$



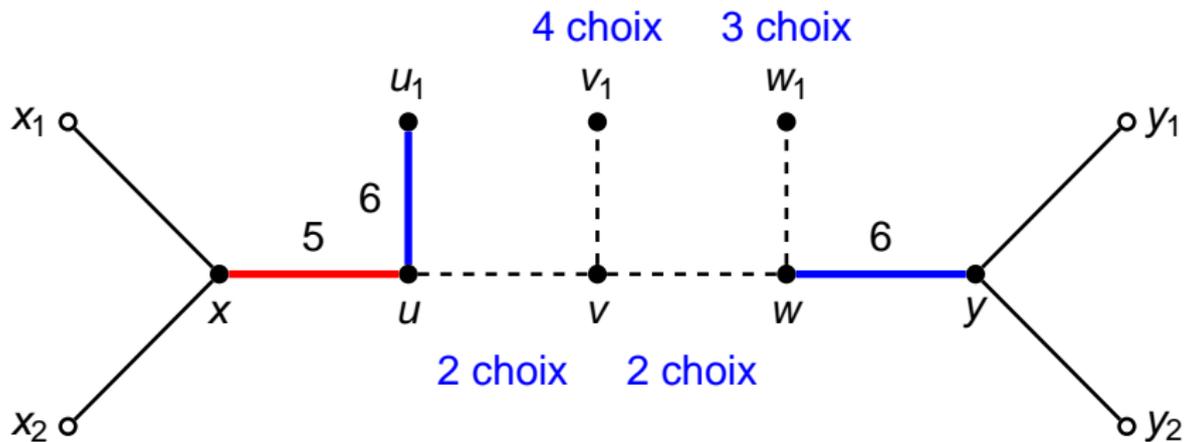
## Second cas : $c(xu) \neq c(wy)$



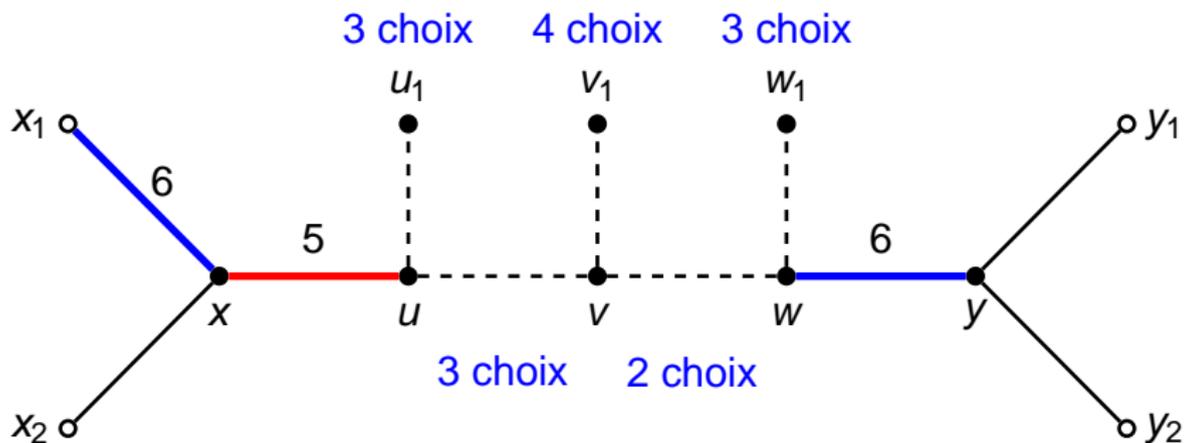
## Second cas : $c(xu) \neq c(wy)$



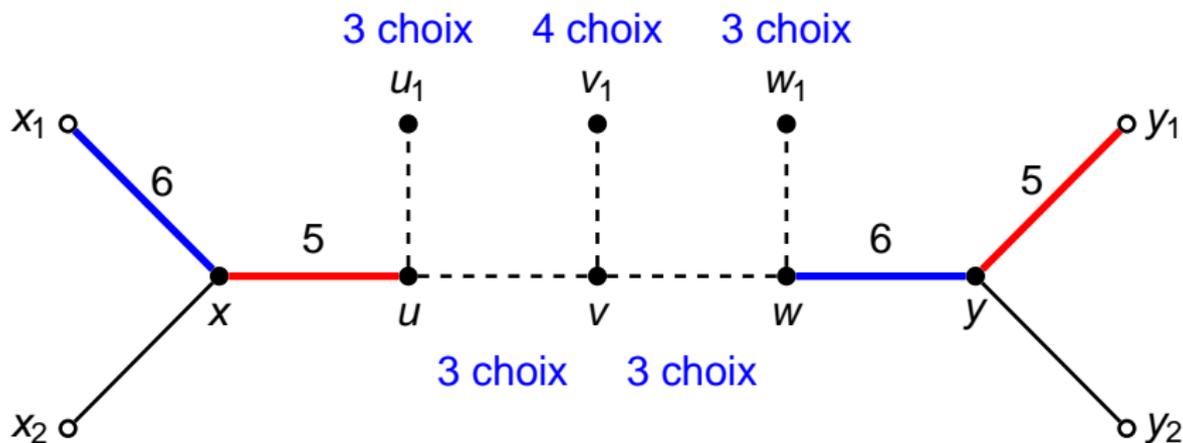
# Second cas : $c(xu) \neq c(wy)$



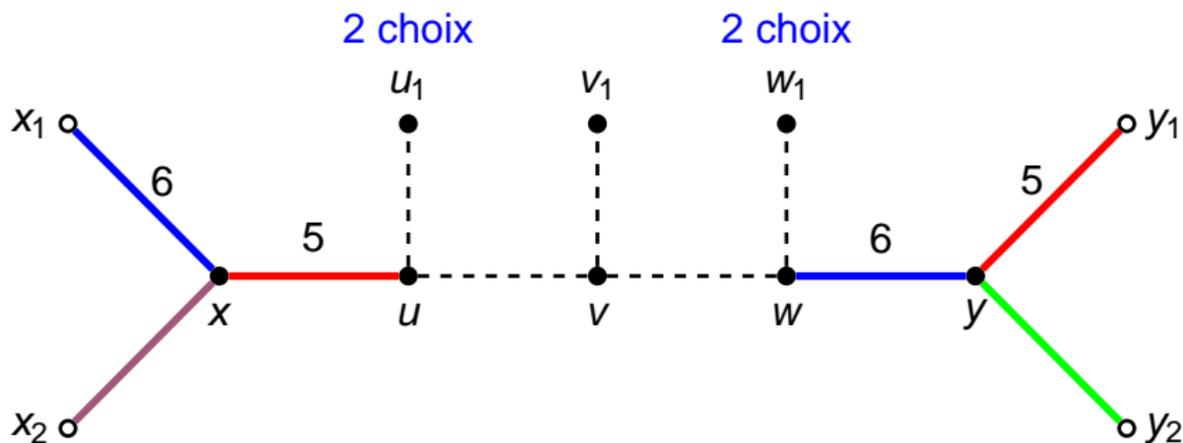
# Second cas : $c(xu) \neq c(wy)$



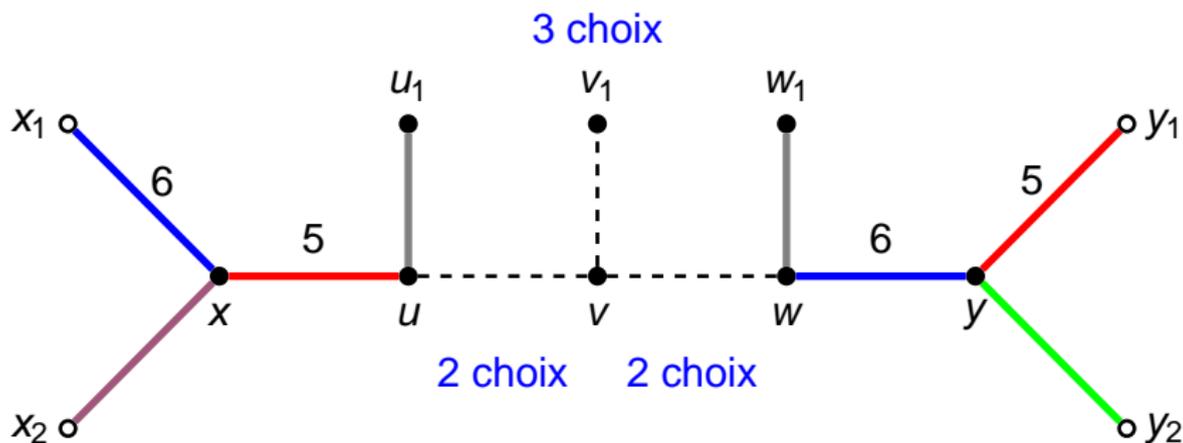
## Second cas : $c(xu) \neq c(wy)$



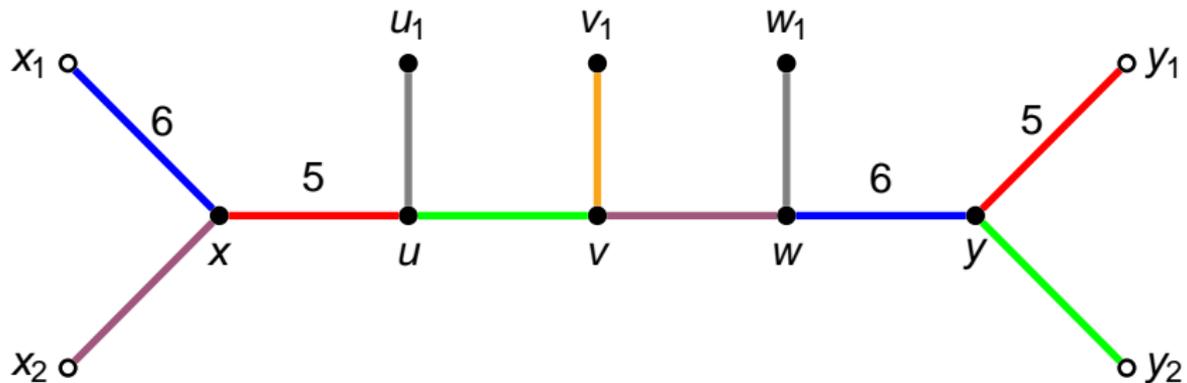
## Second cas : $c(xu) \neq c(wy)$



## Second cas : $c(xu) \neq c(wy)$



## Second cas : $c(xu) \neq c(wy)$



# Charge initiale

Nous définissons une fonction poids  $\omega : V(H) \longrightarrow \mathbb{R}$  par

$$\omega(x) = d(x) - \frac{15}{7}.$$

# Charge initiale

Nous définissons une fonction poids  $\omega : V(H) \longrightarrow \mathbb{R}$  par

$$\omega(x) = d(x) - \frac{15}{7}.$$

$$\omega(1V) = -\frac{8}{7}$$

$$\omega(2V) = -\frac{1}{7}$$

$$\omega(3V) = \frac{6}{7}$$

# Règles de déchargement

La procédure de déchargement se déroule en deux étapes :

- 1 Chaque 3-sommet fort (*i.e.* qui n'est pas adjacent à un 1-sommet) donne  $\frac{2}{7}$  à chaque 3-sommet faible et  $\frac{1}{7}$  à chaque 2-sommet adjacent.
- 2 Chaque 3-sommet faible donne  $\frac{8}{7}$  à son unique 1-sommet.

# Étape finale

Lorsque la procédure de déchargement est terminée, nous avons montré que :

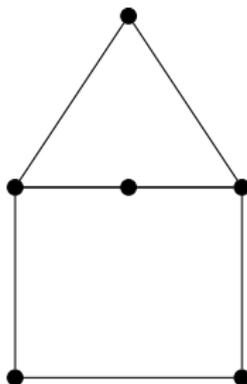
- 1 La somme totale des poids est inchangée.
- 2 Pour tout  $x \in V(H)$ ,  $\omega^*(x) \geq 0$ .

D'où,

$$0 \leq \sum_{x \in V(H)} \omega^*(x) = \sum_{x \in V(H)} \omega(x) < 0$$

donc aucun contre-exemple ne peut exister.

# Exemple



Un graphe  $G$  tel que  $mad(G) = \frac{7}{3}$  et  $\chi'_s(G) > 6$ .

# Conclusion

Soit  $f(n) = \inf\{\text{mad}(\mathbf{G}) \mid \chi'_s(\mathbf{G}) > n\}$ .

On a,  $f(5) = 2$ , et nous avons démontré que pour  $n = 6$  (7, 8, 9 resp.) :

$$\frac{45}{21} = \frac{15}{7} < f(6) \leq \frac{7}{3} = \frac{49}{21}$$

$$\frac{54}{22} = \frac{27}{11} < f(7) \leq \frac{5}{2} = \frac{55}{22}$$

$$\frac{252}{91} = \frac{36}{13} < f(9) \leq \frac{20}{7} = \frac{260}{91}$$