

# Coloration d'arêtes sommets adjacents distinguants de graphes de degré maximum $\Delta$

Hervé Hocquard et Mickaël Montassier

LaBRI - Université de Bordeaux  
351 cours de la libération, 33405 Talence, France

JGA 2011

# Coloration d'arêtes sommets distinguants

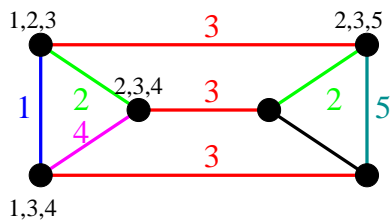
## Définition - vd-coloration

Une **coloration d'arêtes sommets distinguants** (vd-coloration) est une coloration d'arêtes

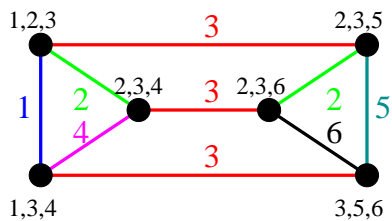
1. qui est **propre** : deux arêtes adjacentes ont des couleurs différentes
2. pour toutes paires de sommets  $u, v$ , nous avons  $S(u) \neq S(v)$ , où  $S(u)$  représente l'ensemble des couleurs utilisées par les arêtes incidentes à  $u$ .

Nous considèrerons des graphes avec au plus un sommet isolé et sans arêtes isolées.

# Exemple

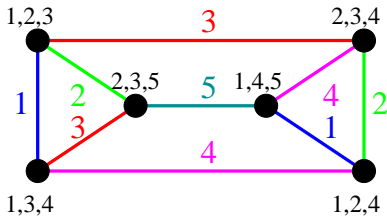


# Exemple



## Définition - observabilité

Le nombre minimum de couleurs tel que le graphe  $G$  admette une vd-coloration est appelé **observabilité** de  $G$  et est noté  $\text{Obs}(G)$ .



$$\text{Obs}(G) = 5$$

### Conjecture [A.C. Burr et R.H. Schelp, 1997]

Soit  $G$  un graphe qui contient au plus un sommet isolé et qui ne contient pas d'arêtes isolées. Considérons  $j$  le plus petit entier tel que  $\binom{j}{k} \geq n_k$  (pour  $1 \leq k \leq \Delta$ ), où  $n_k$  représente le nombre de sommets de degré  $k$ , alors  $\text{Obs}(G) = j$  ou  $j + 1$ .

Cette conjecture est vraie pour différentes classes de graphes.

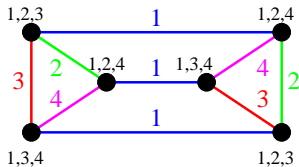
## Définition - avd-coloration

Une  **$k$ -coloration d'arêtes sommets adjacents distinguants** ( $k$ -avd-coloration) d'un graphe  $G$  est

1. une coloration propre d'arêtes de  $G$  qui utilise au plus  $k$  couleurs et
2. pour toutes paires de sommets **adjacents**  $u, v$ ,  $S(u) \neq S(v)$

## Définition - indice avd-chromatique

$\chi'_{avd}(G)$ : est le plus petit entier  $k$  tel que  $G$  admet une  $k$ -avd-coloration.



$$\chi'_{avd}(G) = 4$$

## Quelques résultats

**Théorème [Z. Zhang, L. Liu et J. Wang, 2002]**

Pour tout cycle  $C_p$  :

$$\chi'_{avd}(C_p) = \begin{cases} 3 & \text{si } p \equiv 0 \pmod{3} \\ 4 & \text{si } p \not\equiv 0 \pmod{3} \text{ et } p \neq 5 \\ 5 & \text{si } p = 5 \end{cases}$$

**Conjecture [Z. Zhang, L. Liu et J. Wang, 2002]**

Pour tout graphe connexe  $G$  tel que  $|V(G)| \geq 6$ ,  
 $\chi'_{avd}(G) \leq \Delta(G) + 2$ .

**Théorème [H. Hatami, 2005]**

Tout graphe de degré maximum  $\Delta$  et sans arêtes isolées est tel que  
 $\chi'_{avd}(G) \leq \Delta + 300$ , lorsque que  $\Delta > 10^{20}$ .



## Quelques résultats

### Définition - mad

Le **degré moyen maximum** d'un graphe  $G$ , noté  $\text{mad}(G)$ , est le maximum des degrés moyens de tous les sous-graphes de  $G$  :

$$\text{mad}(G) = \max \left\{ \frac{2|E(H)|}{|V(H)|}, H \subseteq G \right\}$$

### Théorème [W.Wang et Y.Wang, 2010]

Soit  $G$  un graphe de degré maximum  $\Delta(G)$  et de degré moyen maximum  $\text{mad}(G)$ .

1. Si  $\text{mad}(G) < 3$  et  $\Delta(G) \geq 3$ , alors  $\chi'_{avd}(G) \leq \Delta(G) + 2$ .
2. Si  $\text{mad}(G) < \frac{5}{2}$  et  $\Delta(G) \geq 4$ , ou  $\text{mad}(G) < \frac{7}{3}$  et  $\Delta(G) = 3$ , alors  $\chi'_{avd}(G) \leq \Delta(G) + 1$ .
3. Si  $\text{mad}(G) < \frac{5}{2}$  et  $\Delta(G) \geq 5$ , alors  $\chi'_{avd}(G) = \Delta(G) + 1$  ssi  $G$  contient des sommets adjacents de degré maximum.

## Notre résultat

[W.Wang et Y.Wang, 2010]

- ▶ Si  $\text{mad}(G) < \frac{7}{3}$  et  $\Delta(G) = 3$ , alors  $\chi'_{avd}(G) \leq \Delta(G) + 1$ .
- ▶ Si  $\text{mad}(G) < \frac{5}{2}$  et  $\Delta(G) \geq 4$ , alors  $\chi'_{avd}(G) \leq \Delta(G) + 1$ .

### Théorème

Si  $\text{mad}(G) < 3 - \frac{2}{\Delta(G)}$  et  $\Delta(G) \geq 5$ , alors  $\chi'_{avd}(G) \leq \Delta(G) + 1$ .

## Preuve

Soit  $G$  un contre-exemple au théorème minimisant  $|E(G)| + |V(G)|$ , i.e. un graphe  $G$  tel que  $\text{mad}(G) < 3 - \frac{2}{\Delta(G)}$  et  $\Delta(G) \geq 5$ , et  $\chi'_{avd}(G) > \Delta(G) + 1$ .

Considérons  $H = G \setminus \{v \in V(G), d_G(v) = 1\}$ .

1. On étudie les propriétés structurelles de  $H$ .
2. On aboutit à une contradiction en utilisant une méthode dite de déchargement sur  $H$ .

# Propriétés structurelles de $H$

## Lemme 1

$H$  possède les propriétés suivantes :

1.  $\delta(H) \geq 2$ , où  $\delta(H)$  est le degré minimum de  $H$ .
2. Soit  $v \in V(H)$  tel que  $d_H(v) = 2$ , alors  $d_G(v) = 2$ .
3. Soit  $uvwx$  une chaîne dans  $H$  telle que  $d_H(v) = d_H(w) = 2$ , alors  $d_G(u) = d_H(u)$  et  $d_G(x) = d_H(x)$ .

# Éléments de preuve

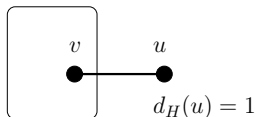
$$\delta(H) \geq 2.$$

Supposons que  $\delta(H) \leq 1$ .

$\delta(H) = 0$   $G = K_{1,\Delta(G)}$  et  $\chi'_{avd}(G) = \Delta(G)$ , une contradiction.

$\delta(H) = 1$

$H$



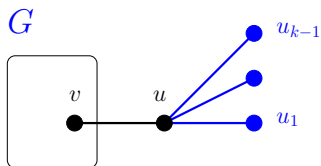
# Éléments de preuve

$$\delta(H) \geq 2.$$

Supposons que  $\delta(H) \leq 1$ .

$\delta(H) = 0$   $G = K_{1, \Delta(G)}$  et  $\chi'_{avd}(G) = \Delta(G)$ , une contradiction.

$\delta(H) = 1$



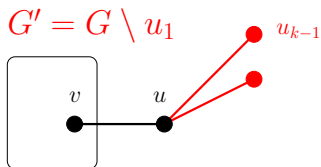
# Éléments de preuve

$$\delta(H) \geq 2.$$

Supposons que  $\delta(H) \leq 1$ .

$\delta(H) = 0$   $G = K_{1, \Delta(G)}$  et  $\chi'_{avd}(G) = \Delta(G)$ , une contradiction.

$\delta(H) = 1$



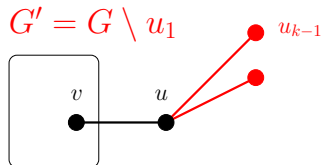
# Éléments de preuve

$$\delta(H) \geq 2.$$

Supposons que  $\delta(H) \leq 1$ .

$\delta(H) = 0$   $G = K_{1, \Delta(G)}$  et  $\chi'_{avd}(G) = \Delta(G)$ , une contradiction.

$\delta(H) = 1$



$$\Delta(G') < \Delta(G):$$

$\phi$   $(\Delta(G') + 2)$ -avd-coloration [Wang, Wang]

$\Rightarrow \phi$   $(\Delta(G) + 1)$ -avd-coloration



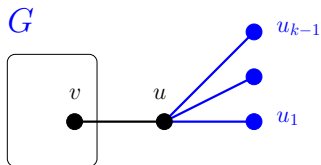
# Éléments de preuve

$$\delta(H) \geq 2.$$

Supposons que  $\delta(H) \leq 1$ .

$\delta(H) = 0$   $G = K_{1, \Delta(G)}$  et  $\chi'_{avd}(G) = \Delta(G)$ , une contradiction.

$\delta(H) = 1$



$\phi(\Delta(G) + 1)$ -avd-coloration

Colorier  $uu_1$  proprement

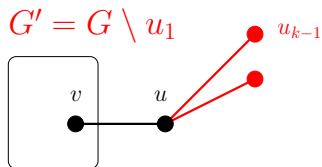
# Éléments de preuve

$$\delta(H) \geq 2.$$

Supposons que  $\delta(H) \leq 1$ .

$\delta(H) = 0$   $G = K_{1, \Delta(G)}$  et  $\chi'_{avd}(G) = \Delta(G)$ , une contradiction.

$\delta(H) = 1$



$$\Delta(G') = \Delta(G):$$

$\phi$   $(\Delta(G) + 1)$ -avd-coloration

[minimalité de  $G$ ]

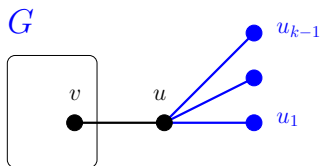
# Éléments de preuve

$$\delta(H) \geq 2.$$

Suppose  $\delta(H) \leq 1$ .

$\delta(H) = 0$   $G = K_{1, \Delta(G)}$  et  $\chi'_{avd}(G) = \Delta(G)$ , une contradiction.

$\delta(H) = 1$



$\phi$   $(\Delta(G) + 1)$ -avd-coloration

Colorier  $uu_1$  proprement tel que

$$S(u) \neq S(v)$$

# Propriétés structurelles de $H$

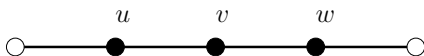
## Lemme 2

$H$  ne contient pas la configuration suivante :



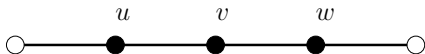
## Preuve du Lemme 2

$H$



## Preuve du Lemme 2

$G$



Lemme 1.2 :  $d_G(u) = d_H(u) = 2 = d_G(v) = d_G(w)$

## Preuve du Lemme 2



$$\Delta(G') = \Delta(G)$$

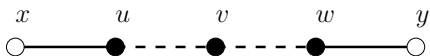
$$\text{mad}(G') \leq \text{mad}(G)$$

$\phi$   $(\Delta(G) + 1)$ -avd-coloration [minimalité de  $G$ ]

Effacer la couleur de  $vw$

## Preuve du Lemme 2

$G$



$vw$ :  $\phi(vw) \neq \phi(wy), \phi(xu)$   
tel que  $S(w) \neq S(y)$  si  $d(y) = 2$

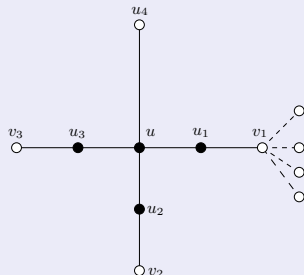
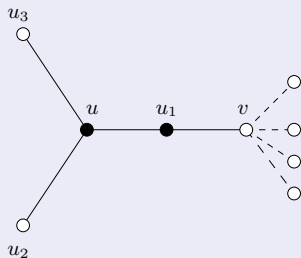
$uv$ :  $\phi(uv) \neq \phi(xu), \phi(vw), \phi(wy)$   
tel que  $S(u) \neq S(x)$  si  $d(x) = 2$



# Propriétés structurelles de $H$

## Lemme 3

$H$  ne contient pas les configurations suivantes :

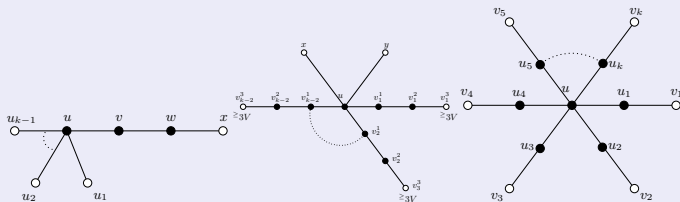


un 3-sommet adjacent à un 2-sommet  
un 4-sommet adjacent à trois 2-sommets

# Propriétés structurelles de $H$

## Lemme 4

$H$  ne contient pas les configurations suivantes :



un  $k$ -sommets adjacent à un 2-sommets léger pour  $3 \leq k \leq \lceil \frac{\Delta}{2} \rceil$

un  $k$ -sommets adjacent à  $(k - 2)$  2-sommets légers  
pour  $\lceil \frac{\Delta}{2} \rceil + 1 \leq k \leq \Delta - 1$

un  $k$ -sommets adjacent à  $k$  2-sommets pour  $k \geq 5$

## Procédure de déchargement

On affecte une *charge* à chaque sommet de  $H$ :

$$\forall x \in V(H), \omega(x) = d_H(x)$$

Par hypothèses  $\text{mad}(H) < 3 - \frac{2}{\Delta}$ , et nous avons

$$\sum_{x \in V(H)} \omega(x) = 2|E(H)| < \left(3 - \frac{2}{\Delta}\right)|V(H)|$$

# Procédure de déchargement

Règles de déchargement :

- (R1) Chaque  $(\lceil \frac{\Delta}{2} \rceil + 1)^+$ -sommet donne  $1 - \frac{2}{\Delta}$  à chaque 2-sommet léger adjacent.
- (R2) Chaque  $4^+$ -sommet donne  $\frac{1}{2} - \frac{1}{\Delta}$  à chaque 2-sommet fort adjacent.

Nous prouvons que  $\forall x \in V(H), \omega^*(x) \geq 3 - \frac{2}{\Delta}$

$$\left(3 - \frac{2}{\Delta}\right) |V(H)| \leq \sum_{x \in V(H)} \omega^*(x) = \sum_{x \in V(H)} \omega(x) < \left(3 - \frac{2}{\Delta}\right) |V(H)|$$

Aucun contre-exemple n'existe.



# Conclusion

On sait que :

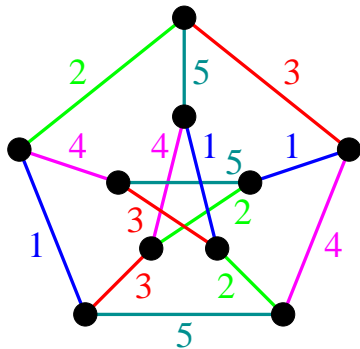
Si  $\text{mad}(G) < 3 - \frac{2}{\Delta(G)}$  et  $\Delta(G) \geq 5$ , alors  $\chi'_{\text{avd}}(G) \leq \Delta(G) + 1$ .

## Problème

Trouver  $G$  et  $f(\Delta)$  tels que  $\text{mad}(G) = f(\Delta)$  et  $\chi'_{\text{avd}}(G) > \Delta + 1$ .

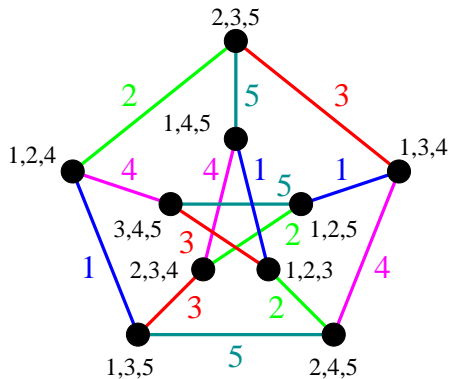
Merci

# Exemple



$$\text{Obs}(P_{10}) = 5$$

# Exemple



$$\text{Obs}(P_{10}) = 5$$