

Tout graphe planaire sans cycle de longueurs 4 à 12 est acycliquement 3-liste coloriable

Hervé Hocquard Mickaël Montassier

Université Bordeaux 1, France

JGA 2009
6 Novembre 2009

L-coloration acyclique par listes

Un graphe G est *acycliquement L-coloriable* si pour l'assignation de listes de couleurs aux sommets de G , il existe une coloration acyclique c des sommets de G telle que $c(v) \in L(v)$ pour tout v de $V(G)$.

k-liste coloration acyclique

Si pour toute assignation de listes L satisfaisant $\forall v \in V(G)$, $|L(v)| \geq k$, le graphe G admet une L-coloration acyclique, alors G est dit *acycliquement k-liste coloriable*.

Théorème[Borodin, Fon-Der Flaas, Kostochka, Raspaud, Sopena '02]

Tout graphe planaire est acycliquement 7-liste coloriable.

Conjecture[Borodin, Fon-Der Flaas, Kostochka, Raspaud, Sopena '02]

Tout graphe planaire est acycliquement 5-liste coloriable.



O.V. Borodin, D.G. Fon-Der Flaass, A.V. Kostochka, A. Raspaud and É. Sopena
Acyclic list 7-coloring of planar graphs.
J. Graph Theory, 40(2) :83-90, 2002.

Conjecture de Steinberg

Tout graphe planaire sans cycle de longueurs 4 et 5 est 3-coloriable.



T.R. Jensen and B. Toft

Graph coloring problems.

Wiley Interscience, 1995.

Relaxation d'Erdős

Quel est le plus petit entier i tel que tout graphe planaire sans cycle de longueurs 4 à i est 3-coloriable.

La meilleure borne connue est $i = 7$.



O.V. Borodin, A.N. Glebov, A. Raspaud and M.R. Salavatipour

Planar graphs without cycles of length 4 to 7 are 3-colorable.

J. Combin. Theory, Ser. B 93 303-311, 2005.

Que peut-on dire de la coloration par listes ?

Le cas de la coloration par listes

Quel est le plus petit entier i tel que tout graphe planaire sans cycle de longueurs 4 à i est 3-liste coloriable.

En 2003, Voigt a prouvé que la Conjecture de Steinberg ne pouvait être étendue à la notion de coloration par listes ; d'où, $i \geq 6$.



M. Voigt

A non-3-choosable planar graph without cycles of length 4 and 5.

Discrete Math., 307(7-8) :1013-1015, 2006.

Que peut-on dire de la coloration par listes ?

Théorème[Borodin '96]

Tout graphe planaire sans cycle de longueurs 4 à 9 est 3-coloriable, en fait, 3-liste coloriable.



O.V. Borodin

Structural properties of plane graphs without adjacent triangles and an application to 3-colorings.

J. Graph Theory, 21(2) :183-186, 1996.

Problème

Quel est le plus petit entier i tel que tout graphe planaire sans cycle de longueurs 4 à i est acycliquement 3-liste coloriable.

Résultat

Théorème

Tout graphe planaire sans cycle de longueurs 4 à 12 est acycliquement 3-liste coloriable.

Déroulement de la preuve

Supposons que H est un contre-exemple d'ordre minimum au théorème.

1. Propriétés structurelles de H .
2. Procédure de déchargement.
 - 2.1 Une fonction poids ω .
 - 2.2 Règles de déchargement.[Redistribution des charges suivant les règles de déchargement établies. Création d'une nouvelle fonction poids ω^* telle que $\sum_x \omega(x) = \sum_x \omega^*(x)$.]
3. En utilisant la formule d'Euler sur un plongement de H tel que toute face est de longueur 3 ou au moins 13 et les propriétés structurelles de H nous aboutissons à une contradiction, $0 \leq \sum_x \omega^*(x) = \sum_x \omega(x) < 0$.

Donc aucun contre-exemple n'existe.

Configurations réductibles

Supposons que H est un contre-exemple d'ordre minimum au théorème. Soit L une assignation de listes avec $|L(v)| = 3$ pour tout $v \in V(H)$ telle que H n'admet pas de L -coloration acyclique.

(C1) H ne possède pas de 1-sommet.

(C2) Une 3-face n'a pas de 2-sommet sur son bord.

(C3) Un 2-sommet n'est pas adjacent à un 2-sommet.

Configurations réductibles

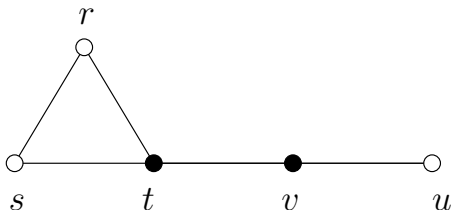
Supposons que H est un contre-exemple d'ordre minimum au théorème. Soit L une assignation de listes avec $|L(v)| = 3$ pour tout $v \in V(H)$ telle que H n'admet pas de L -coloration acyclique.

- (C1) H ne possède pas de 1-sommet.
- (C2) Une 3-face n'a pas de 2-sommet sur son bord.
- (C3) Un 2-sommet n'est pas adjacent à un 2-sommet.

Configurations réductibles

3*-sommets

Un 3-sommet est un **3*-sommets** si il est incident à une 3-face et adjacent à un 2-sommet.



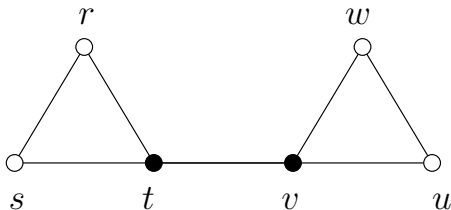
Le sommet t est un 3*-sommets

(C4) Une 3-face a au plus un 3*-sommets sur son bord.

Configurations réductibles

3*-face et face liée

1. Une 3-face rst telle que $d(r) = d(s) = d(t) = 3$ qui a un 3*-sommet sur son bord est appelée une **3*-face**.
2. **Deux 3-faces rst et uvw sont dites liées** s'il existe une arête tv qui relie ces deux 3-faces de telle sorte que $d(t) = d(v) = 3$.

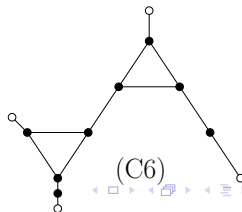
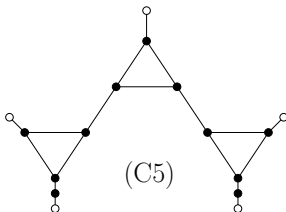
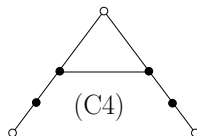
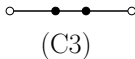
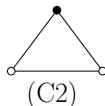
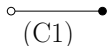


Les deux 3-faces $[rst]$ et $[uvw]$ sont liées

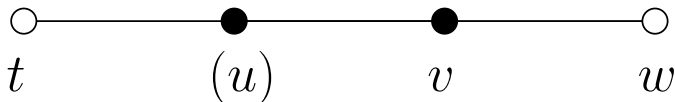
Configurations réductibles

- (C5) Une 3-face rst avec $d(r) = d(s) = d(t) = 3$ est liée à au plus une 3^* -face.
- (C6) Deux 3^* -faces ne peuvent être liées.

Ensemble des configurations réductibles

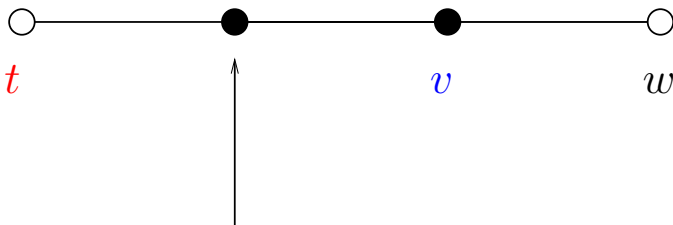


Preuve de la configuration réductible (C3)



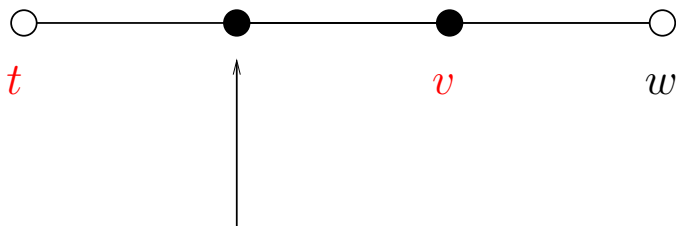
Par minimalité de H , $H' = H \setminus \{u\}$ est acycliquement 3-liste coloriable. Il existe donc une L -coloration acyclique c de H' .

Premier cas : $c(t) \neq c(v)$



$$c(u) \in L(u) \setminus \{c(t); c(v)\}$$

Second cas : $c(t) = c(v)$



$$c(u) \in L(u) \setminus \{c(t); c(w)\}$$

Charge initiale

Nous définissons une fonction poids $\omega : V(H) \cup F(H) \longrightarrow \mathbb{R}$
par $\omega(x) = 11d(x) - 26$ si $x \in V(H)$
et $\omega(x) = 2r(x) - 26$ si $x \in F(H)$.

$$\omega(3f) = -20, \quad \omega(\geq 13f) \geq 0$$

$$\omega(2V) = -4, \quad \omega(3V) = 7, \quad \omega(4V) = 18$$

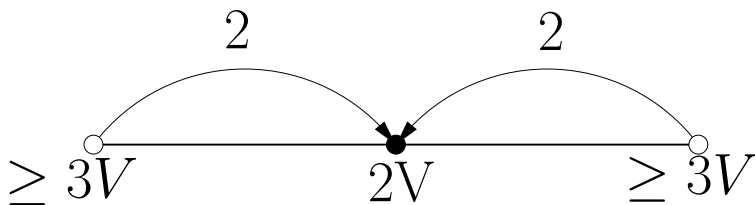
Charge initiale

Nous définissons une fonction poids $\omega : V(H) \cup F(H) \longrightarrow \mathbb{R}$
par $\omega(x) = 11d(x) - 26$ si $x \in V(H)$
et $\omega(x) = 2r(x) - 26$ si $x \in F(H)$.

$$\omega(3f) = -20 \quad , \quad \omega(\geq 13f) \geq 0$$

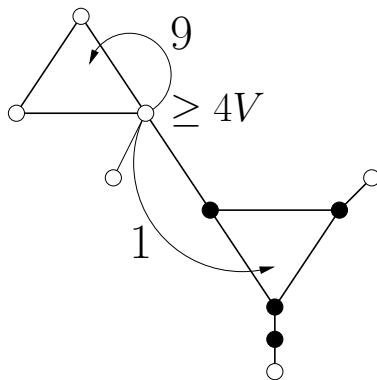
$$\omega(2V) = -4 \quad , \quad \omega(3V) = 7 \quad , \quad \omega(4V) = 18$$

Règles de déchargement



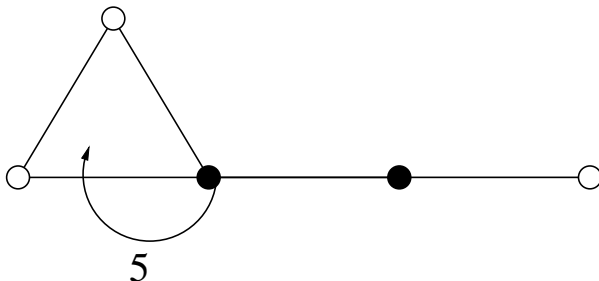
(R1.1) Chaque ≥ 3 -sommet v donne 2 à chaque 2 -sommet adjacent.

Règles de déchargement



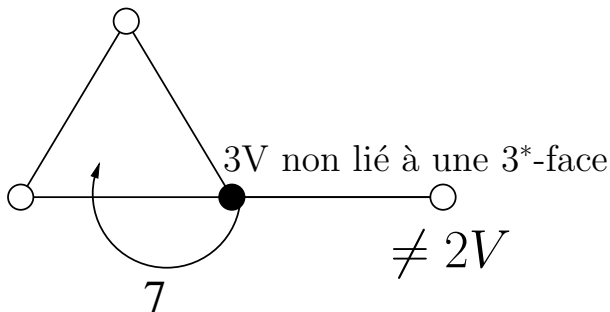
(R1.2) Chaque ≥ 4 -sommet v donne 9 à chaque 3-face incidente et 1 à chaque 3*-face liée.

Règles de déchargement



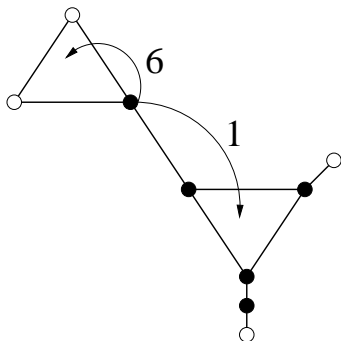
(R2.1) Chaque 3^* -sommet v donne 5 à sa 3-face incidente.

Règles de déchargement



(R2.2) Chaque 3-sommet v , différent d'un 3*-sommet, qui n'est pas lié à une 3*-face, donne 7 à la 3-face incidente si elle existe.

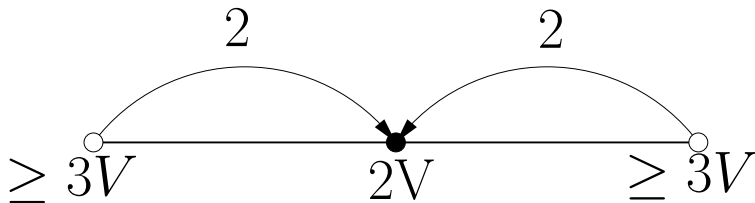
Règles de déchargement



(R2.3) Chaque 3-sommet v , différent d'un 3^* -sommet, qui est lié à une 3^* -face, donne 1 à chaque 3^* -face liée et 6 à la 3-face incidente si elle existe.

Bilan des charges sur les sommets

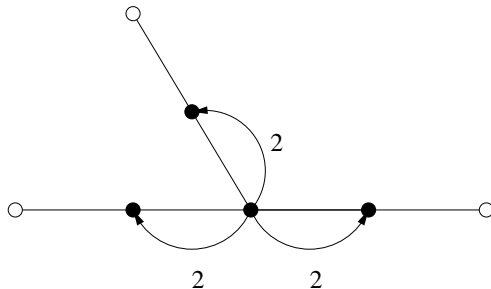
Soit v un k -sommet alors $k \geq 2$ d'après (C1).



Si $k = 2$, alors $\omega(v) = -4$ et v est adjacent à deux ≥ 3 -sommets par (C3). Par (R1.1), $\omega^*(v) = -4 + 2 \cdot 2 = 0$.

Bilan des charges sur les sommets

Si $k = 3$, alors $\omega(v) = 7$. Puisque H ne contient pas de 4-cycles, v est incident à au plus une 3-face.

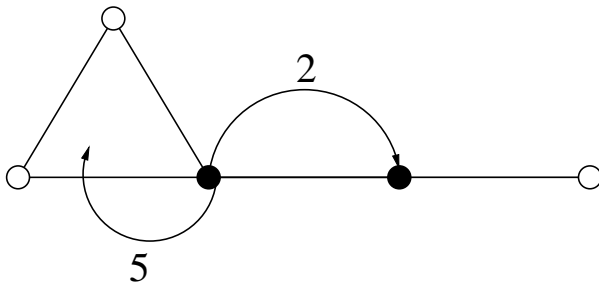


Supposons que v n'est pas incident à une 3-face. Alors par (R1.1) et (R2.3), v donne au plus 3 fois 2.

D'où, $\omega^*(v) \geq 7 - 3 \cdot 2 \geq 1$.

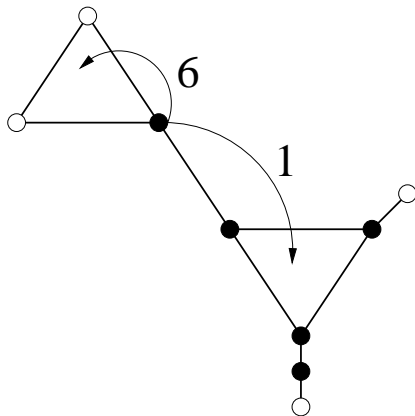
Bilan des charges sur les sommets

Supposons que v est incident à une 3-face.



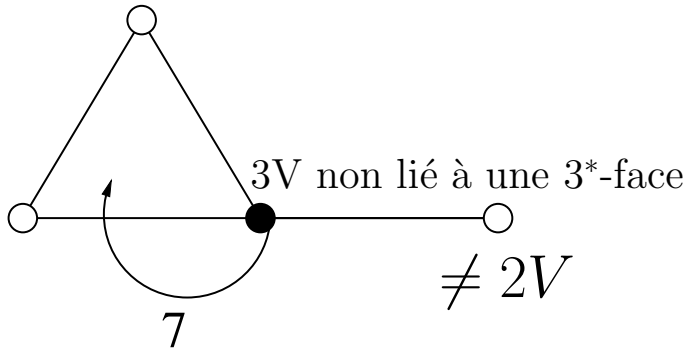
Si v est un 3^* -sommet, alors $\omega^*(v) = 7 - 5 - 2 = 0$ par (R1.1) et (R2.1).

Bilan des charges sur les sommets



Si v est lié à une 3^* -face alors $\omega^*(v) \geq 7 - 6 - 1 = 0$ par (R2.3).

Bilan des charges sur les sommets



Si v n'est pas adjacent à un 2-sommet et non lié à une 3*-face
 alors $\omega^*(v) = 7 - 7 = 0$ par (R2.2).

Etape finale

Lorsque la procédure de déchargement est terminée, nous avons montré que :

- 1 La somme totale des poids est inchangée.
- 2 Pour tout $x \in V(H) \cup F(H)$, $\omega^*(x) \geq 0$.

D'où,

$$0 \leq \sum_{x \in V(H) \cup F(H)} \omega^*(x) = \sum_{x \in V(H) \cup F(H)} \omega(x) = -52 < 0$$

donc aucun contre-exemple ne peut exister.

Problèmes

1. Prouver que tout graphe planaire sans cycle de longueurs 4 à i est acycliquement 3-liste coloriable pour $6 \leq i \leq 10$.
2. Prouver que tout graphe planaire de maille au moins 6 est acycliquement 3-liste coloriable.
3. Etant donné $i \geq 6$, existe-t-il une constante d telle que tout graphe planaire sans cycle de longueurs 4 à i avec $d_{\Delta}(G) \geq d$ est acycliquement 3-liste coloriable, où $d_{\Delta}(G)$ désigne la plus petite distance entre deux triangles de G . Pour i donné, si d existe, quelle est la plus petite valeur de d ?

Résultat

Théorème

Soit G un graphe planaire. Si G satisfait une des conditions suivantes :

1. G ne contient pas de cycle de longueurs 4 à 10, et $d_{\Delta}(G) \geq 2$
 2. G ne contient pas de cycle de longueurs 4 à 9, et $d_{\Delta}(G) \geq 3$
 3. G ne contient pas de cycle de longueurs 4 à 8, et $d_{\Delta}(G) \geq 5$
 4. G ne contient pas de cycle de longueurs 4 à 7, et $d_{\Delta}(G) \geq 7$
- alors G est acycliquement 3-liste coloriable.

Problème

Déterminer s'il existe une valeur de d pour laquelle tout graphe planaire sans cycle de longueurs 4 à 6 et $d_{\Delta}(G) \geq d$ est acycliquement 3-liste coloriable.