

Matrices

Hervé Hocquard

Université de Bordeaux, France

28 août 2019

université
de **BORDEAUX**

LABORATOIRE
BORDELAIS
DE RECHERCHE
EN INFORMATIQUE

LaBRI

Matrice

On appelle matrice de taille $n \times p$ à coefficients dans \mathbb{R} ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}) toute famille A de np éléments de \mathbb{R} présentée sous la

forme d'un tableau
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$$
 noté $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ où

$a_{ij} \in \mathbb{R}$ (ou \mathbb{C} ...on se limitera aux matrices à coefficients réels).

Pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket$, le scalaire a_{ij} est appelé

coefficient de A de position (i, j) , la matrice
$$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$$
 est appelée

la $j^{\text{ème}}$ colonne de A et la matrice $(a_{i1} \ a_{i2} \ \dots \ a_{ip})$ sa $i^{\text{ème}}$ ligne.

- L'ensemble des matrices de taille $n \times p$ à coefficients dans \mathbb{R} est noté $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.
- Lorsque $n = p$, on dit que A est carrée et la famille $(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$ est appelée diagonale de A . L'ensemble des matrices carrées de taille $n \times n$ (ou n) à coefficients dans \mathbb{R} est noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- Pour $p = 1$, on parle de matrices colonnes de taille n .
- Pour $n = 1$, on parle de matrices lignes de taille p .

Remarque

Une matrice de taille $n \times p$ à coefficients dans \mathbb{R} n'est rien de plus qu'un élément de \mathbb{R}^{np} , *i.e.* une famille de np éléments de \mathbb{R} , mais qu'on préfère écrire sous la forme d'un tableau à n lignes et p colonnes. Ainsi, en réalité :

$$\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{np}$$

Remarque

Une matrice de taille $n \times p$ à coefficients dans \mathbb{R} n'est rien de plus qu'un élément de \mathbb{R}^{np} , *i.e.* une famille de np éléments de \mathbb{R} , mais qu'on préfère écrire sous la forme d'un tableau à n lignes et p colonnes. Ainsi, en réalité :

$$\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{np}$$



Question

Pourquoi introduire les matrices dans ce cas ?



Réponse

Nous allons introduire une loi interne de produit sur les matrices...et vous verrez qu'il est plus pratique d'écrire les matrices comme des tableaux et non comme des familles.



Réponse

Nous allons introduire une loi interne de produit sur les matrices...et vous verrez qu'il est plus pratique d'écrire les matrices comme des tableaux et non comme des familles.

Définition

Muni de la structure vectorielle naturelle de \mathbb{R}^{np} , $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension np .

Pour tous $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

$$\lambda A + \mu B = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} + \mu b_{11} & \lambda a_{12} + \mu b_{12} & \dots & \lambda a_{1p} + \mu b_{1p} \\ \lambda a_{21} + \mu b_{21} & \lambda a_{22} + \mu b_{22} & \dots & \lambda a_{2p} + \mu b_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{n1} + \mu b_{n1} & \lambda a_{n2} + \mu b_{n2} & \dots & \lambda a_{np} + \mu b_{np} \end{pmatrix}$$

Définition et propriétés

- Une matrice élémentaire de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est une matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf un qui vaut 1. Il y a donc np matrices élémentaires dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

Définition et propriétés

- Une matrice élémentaire de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est une matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf un qui vaut 1. Il y a donc np matrices élémentaires dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.
- On note pour tout $(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket$, $E_{i,j}$ la matrice élémentaire dont le coefficient de position (i,j) est égal à 1 et dont tous les autres sont nuls.

Alors $(E_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ est une base de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, appelée sa base canonique.

Définition

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On appelle transposée de A la matrice $(a_{ji})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}}$ de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, notée ${}^t A$.

Définition

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On appelle transposée de A la matrice $(a_{ji})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}}$ de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, notée ${}^t A$.

Exemples

$${}^t \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 2 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad {}^t \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = (\lambda_1 \quad \dots \quad \lambda_n)$$

Définition

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On appelle transposée de A la matrice $(a_{ji})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}}$ de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, notée ${}^t A$.

Exemples

$${}^t \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 2 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad {}^t \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = (\lambda_1 \quad \dots \quad \lambda_n)$$

Remarque

La transposition échange les lignes et les colonnes. Intérêt de la manœuvre : montrer que certains résultats théoriques sur les colonnes sont valables sur les lignes, et réciproquement.

Définition

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On appelle transposée de A la matrice $(a_{ji})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}}$ de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$, notée ${}^t A$.

Exemples

$${}^t \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 2 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad {}^t \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = (\lambda_1 \quad \dots \quad \lambda_n)$$

Remarque

La transposition échange le nombre de colonnes et le nombre de lignes : la transposée d'une matrice de taille $n \times p$ est donc une matrice de taille $p \times n$. Chose intéressante : la transposée d'une matrice carrée est une matrice carrée de même taille.

Propriétés de la transposition

- **Linéarité** : Soient $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$${}^t(\lambda A + \mu B) = \lambda {}^t A + \mu {}^t B$$

Propriétés de la transposition

- **Linéarité** : Soient $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$${}^t(\lambda A + \mu B) = \lambda {}^t A + \mu {}^t B$$

- **Involutivité** : Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

$${}^t({}^t A) = A$$

Définition

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on appelle trace de A le scalaire noté $\text{tr}(A)$ et défini par :

$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

c'est donc la somme des coefficients diagonaux.

Trace d'une matrice carrée

Définition

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on appelle trace de A le scalaire noté $\text{tr}(A)$ et défini par :

$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

c'est donc la somme des coefficients diagonaux.

Théorème

La trace est une forme linéaire non nulle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- **Matrice nulle** : la matrice nulle à n lignes et p colonnes est la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls, celle-ci est notée $\mathcal{O}_{n,p}$. Lorsque $p = n$, la matrice $\mathcal{O}_{n,n}$ est notée simplement \mathcal{O}_n .

- **Matrice nulle** : la matrice nulle à n lignes et p colonnes est la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls, celle-ci est notée $\mathcal{O}_{n,p}$. Lorsque $p = n$, la matrice $\mathcal{O}_{n,n}$ est notée simplement \mathcal{O}_n .
- **Matrice unité ou identité** : la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est la matrice de taille n , notée I_n , dont tous les coefficients diagonaux sont égaux à 1 et les autres (coefficients extra-diagonaux) sont tous nuls.

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ est la matrice unité de } \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

- **Matrice triangulaire supérieure** : c'est une matrice carrée dont tous les coefficients situés sous la diagonale principale sont nuls.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 6 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

- **Matrice triangulaire supérieure** : c'est une matrice carrée dont tous les coefficients situés sous la diagonale principale sont nuls.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 6 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

- **Matrice triangulaire inférieure** : c'est une matrice carrée dont tous les coefficients situés au-dessus de la diagonale principale sont nuls.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 6 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

- **Matrice symétrique** : c'est une matrice égale à sa transposée (elle est donc nécessairement carrée) : $A = {}^tA$.

- **Matrice symétrique** : c'est une matrice égale à sa transposée (elle est donc nécessairement carrée) : $A = {}^tA$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 6 \\ 7 & 2 & -2 \\ 6 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

- **Matrice symétrique** : c'est une matrice égale à sa transposée (elle est donc nécessairement carrée) : $A = {}^tA$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 6 \\ 7 & 2 & -2 \\ 6 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

- **Matrice antisymétrique** : c'est une matrice égale à l'opposé de sa transposée (elle est donc nécessairement carrée) : $A = -{}^tA$.

- **Matrice symétrique** : c'est une matrice égale à sa transposée (elle est donc nécessairement carrée) : $A = {}^tA$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 6 \\ 7 & 2 & -2 \\ 6 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

- **Matrice antisymétrique** : c'est une matrice égale à l'opposé de sa transposée (elle est donc nécessairement carrée) : $A = -{}^tA$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 6 \\ -7 & 0 & 2 \\ -6 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

- **Matrice symétrique** : c'est une matrice égale à sa transposée (elle est donc nécessairement carrée) : $A = {}^tA$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 6 \\ 7 & 2 & -2 \\ 6 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

- **Matrice antisymétrique** : c'est une matrice égale à l'opposé de sa transposée (elle est donc nécessairement carrée) : $A = -{}^tA$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 6 \\ -7 & 0 & 2 \\ -6 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

La trace d'une matrice antisymétrique est égale à 0.

Produit matriciel

Définition

Soient $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{R})$. Par définition, le produit de A par B , noté $A \times B$ ou AB , est la matrice $\left(\sum_{k=1}^q a_{ik} b_{kj} \right)_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq r}}$ de taille $p \times r$.

The diagram illustrates the calculation of a single element in the product matrix AB . It shows three matrices:

- Matrix A on the left, with a row $(a_{i1} \ \dots \ a_{ip})$ highlighted in a pink box.
- Matrix B in the middle, with a column $(b_{1j} \ \vdots \ b_{pj})$ highlighted in a pink box.
- The resulting matrix AB on the right, with the element $\sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj}$ highlighted in a pink box.

A blue arrow labeled \times points from the highlighted row of A to the highlighted column of B . A second blue arrow labeled $=$ points from the highlighted column of B to the highlighted element in AB . The overall equation is $A \times B = AB$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ip} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1q} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{p1} & \dots & b_{pj} & \dots & b_{pq} \\ \bullet & \dots & & \dots & \bullet \\ \vdots & & & & \vdots \\ \bullet & \dots & & \dots & \bullet \\ \vdots & & & & \vdots \\ \bullet & \dots & & \dots & \bullet \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj} & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \bullet & \dots & \bullet & \dots & \bullet \end{pmatrix} = AB$$

Remarques

- Le produit $A \times B$ n'est possible que si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B . Le résultat a alors autant de lignes que A et autant de colonnes que B .

Remarques

- Le produit $A \times B$ n'est possible que si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B . Le résultat a alors autant de lignes que A et autant de colonnes que B .
- En général $A \times B \neq B \times A$ (le produit n'est pas commutatif), il se peut que $A \times B$ soit défini, mais pas $B \times A$.

Remarques

- Le produit $A \times B$ n'est possible que si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B . Le résultat a alors autant de lignes que A et autant de colonnes que B .
- En général $A \times B \neq B \times A$ (le produit n'est pas commutatif), il se peut que $A \times B$ soit défini, mais pas $B \times A$.
- Un produit de matrices peut être nul sans qu'aucune de ces matrices soit nulle.

Remarques

- Le produit $A \times B$ n'est possible que si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B . Le résultat a alors autant de lignes que A et autant de colonnes que B .
- En général $A \times B \neq B \times A$ (le produit n'est pas commutatif), il se peut que $A \times B$ soit défini, mais pas $B \times A$.
- Un produit de matrices peut être nul sans qu'aucune de ces matrices soit nulle.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice

$$(1 \quad -1 \quad 3) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = ?$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} (1 \quad -1 \quad 3) = ?$$

$$(1 \quad -1 \quad 2) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = ?$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = ?$$

Exercice

$$(1 \quad -1 \quad 3) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = (7 \quad 2)$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} (1 \quad -1 \quad 3) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 6 \\ 3 & -3 & 9 \end{pmatrix}$$

$$(1 \quad -1 \quad 2) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = (5)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = ?$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = ?$$

Exercice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \text{⚠ n'est pas défini !}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Théorème

- **Assosiativité** : Soient $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{R})$, $C \in \mathcal{M}_{r,s}(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$(AB)C = A(BC) \text{ et } \lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$$

- **Bilinéarité** : Soient $A, B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, $C \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{R})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$$(\lambda A + \mu B)C = \lambda AC + \mu BC \text{ et } C(\lambda A + \mu B) = \lambda CA + \mu CB$$

- **Élément neutre** : Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. $I_n A = A I_p = A$.

Théorème

- **Assosiativité** : Soient $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{R})$, $C \in \mathcal{M}_{r,s}(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$(AB)C = A(BC) \text{ et } \lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$$

- **Bilinéarité** : Soient $A, B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, $C \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{R})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$$(\lambda A + \mu B)C = \lambda AC + \mu BC \text{ et } C(\lambda A + \mu B) = \lambda CA + \mu CB$$

- **Élément neutre** : Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. $I_n A = A I_p = A$.

Transposée d'un produit

Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ alors :

$${}^t(A \times B) = {}^t B \times {}^t A$$

Introduction

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . On peut

décomposer A en lignes : $A = \begin{pmatrix} a_{1*} \\ \vdots \\ a_{n*} \end{pmatrix}$

ou en colonnes : $A = (a_{*1} \quad \cdots \quad a_{*p})$.

Introduction

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . On peut

décomposer A en lignes : $A = \begin{pmatrix} a_{1*} \\ \vdots \\ a_{n*} \end{pmatrix}$

ou en colonnes : $A = \begin{pmatrix} a_{*1} & \cdots & a_{*p} \end{pmatrix}$. On associe à A deux sev de \mathbb{K}^p :

$\mathcal{L}(A) = \text{Vect} \{a_{1*}, \dots, a_{n*}\}$ le sev engendré par les lignes de A .

Introduction

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . On peut

décomposer A en lignes : $A = \begin{pmatrix} a_{1*} \\ \vdots \\ a_{n*} \end{pmatrix}$

ou en colonnes : $A = \begin{pmatrix} a_{*1} & \cdots & a_{*p} \end{pmatrix}$. On associe à A deux sev de \mathbb{K}^p :

$\mathcal{L}(A) = \text{Vect}\{a_{1*}, \dots, a_{n*}\}$ le sev engendré par les lignes de A .

$\mathcal{C}(A) = \text{Vect}\{a_{*1}, \dots, a_{*p}\}$ le sev engendré par les colonnes de A .

Théorème

Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\dim \mathcal{L}(A) = \dim \mathcal{C}(A)$.

Théorème

Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\dim \mathcal{L}(A) = \dim \mathcal{C}(A)$.

Définition

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle rang de A la dimension de $\mathcal{C}(A)$ (ou de $\mathcal{L}(A)$). On a clairement :

$$\text{rang}A \leq \min(n,p) \text{ et } \text{rang}A = \text{rang}({}^tA)$$

Rang d'une matrice...pour faire simple

Définition

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ une matrice, on appelle rang de la matrice A , le rang dans \mathbb{R}^n du système constitué par ses p vecteurs colonnes, notation : $rg(A) = rg(c_1(A), \dots, c_p(A))$.

Rang d'une matrice...pour faire simple

Définition

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ une matrice, on appelle rang de la matrice A , le rang dans \mathbb{R}^n du système constitué par ses p vecteurs colonnes, notation : $rg(A) = rg(c_1(A), \dots, c_p(A))$.

Remarque

$$Im A = Vect\{c_1(A), \dots, c_p(A)\}$$

Rang d'une matrice...pour faire simple

Définition

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ une matrice, on appelle rang de la matrice A , le rang dans \mathbb{R}^n du système constitué par ses p vecteurs colonnes, notation : $rg(A) = rg(c_1(A), \dots, c_p(A))$.

Remarque

$$Im A = Vect\{c_1(A), \dots, c_p(A)\}$$

Théorème

Soit u une application linéaire de E dans F , soit \mathcal{B} une base de E , soit \mathcal{B}' une base de F , et soit $A = \underset{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}{mat}(u)$, alors

$$rg(u) = rg(A)$$

Théorème (Conséquence)

Soit E un espace vectoriel de dimension n , soit $\mathcal{S} = (x_1, \dots, x_p)$ une famille de p vecteurs de E et soit \mathcal{B} une base de E , alors le rang de la famille \mathcal{S} est égal au rang de la matrice de ce système dans la base \mathcal{B} .

Théorème (Conséquence)

Soit E un espace vectoriel de dimension n , soit $\mathcal{S} = (x_1, \dots, x_p)$ une famille de p vecteurs de E et soit \mathcal{B} une base de E , alors le rang de la famille \mathcal{S} est égal au rang de la matrice de ce système dans la base \mathcal{B} .

Théorème : Invariance du rang

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $P \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ inversible et soit $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible. Alors :

- 1 $rg(AP) = rg(A)$ et $rg(QA) = rg(A)$.
- 2 Deux matrices semblables ont le même rang.
- 3 $rg(A) = rg({}^t A)$.

Définition

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, on appelle opérations élémentaires sur A les opérations suivantes :

- 1 Permuter deux lignes de A (ou deux colonnes), notation : $L_i \leftrightarrow L_j$ (resp. $C_i \leftrightarrow C_j$).
- 2 Multiplier une ligne (ou une colonne) par un scalaire non nul, notation : $L_i \leftarrow \alpha L_i$ (resp. $C_i \leftarrow \alpha C_i$).
- 3 Ajouter à une ligne (ou une colonne) un multiple d'une autre ligne (resp. une autre colonne), notation : $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$, avec $i \neq j$ (resp. $C_i \leftarrow C_i + \alpha C_j$).

Théorème

Effectuer une opération élémentaire sur une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ revient à multiplier A à gauche par une matrice inversible pour les opérations sur les lignes (à droite pour une opération sur les colonnes).

Remarque

Il est à peu près évident que les opérations élémentaires ne modifient pas le rang d'une matrice. Pour calculer le rang d'une matrice, il suffit donc de l'échelonner par rapport à ses lignes (resp. ses colonnes) et le rang est alors égal au nombre de lignes (resp. de colonnes) non nulles de la matrice échelonnée. C'est donc aussi le nombre de pivots non nuls d'une réduite de Gauss-Jordan de la matrice.

Remarque

Il est à peu près évident que les opérations élémentaires ne modifient pas le rang d'une matrice. Pour calculer le rang d'une matrice, il suffit donc de l'échelonner par rapport à ses lignes (resp. ses colonnes) et le rang est alors égal au nombre de lignes (resp. de colonnes) non nulles de la matrice échelonnée. C'est donc aussi le nombre de pivots non nuls d'une réduite de Gauss-Jordan de la matrice.

Théorème : propriétés d'invariance

- Les opérations élémentaires conservent le rang de la matrice.
- La suppression d'une colonne nulle ou d'une ligne nulle préserve le rang.

Calcul pratique du rang d'une matrice : pivot de Gauss

0) Si $A = 0$, alors $\text{rg}(A) = 0$ — sortie de l'algorithme.

1) Sinon au moins un coefficient de A est non nul. En permutant les lignes et les colonnes de A , on se ramène au calcul du rang d'une matrice de même rang que A dont le coefficient a de position $(1,1)$ est non nul. Ce coefficient a est alors qualifié de *pivot*.

2) A l'aide du pivot a , on annule par des opérations élémentaires sur les lignes tous les termes de la première colonne de la matrice obtenue à l'issue de l'étape 1) (à l'exception du pivot).

3) Toujours à l'aide du pivot a , on annule ensuite par des opérations élémentaires sur les colonnes tous les termes de la première ligne de la matrice obtenue à l'issue de l'étape 2) (à l'exception du pivot).

4) La première colonne de la matrice obtenue à l'issue de l'étape 3) est clairement non combinaison linéaire des autres colonnes de cette matrice. Ceci explique le résultat de l'étape 4) figuré ci-dessous.

$$\text{rg}(A) = \text{rg} \begin{matrix} \text{Etape 1)} \\ \begin{pmatrix} a & \times & \cdots & \times \\ \times & \times & \cdots & \times \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \times & \times & \cdots & \times \end{pmatrix} \end{matrix} = \text{rg} \begin{matrix} \text{Etape 2)} \\ \begin{pmatrix} a & \times & \cdots & \times \\ 0 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & & \\ 0 & \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ A' \\ \\ \end{matrix} \end{matrix} = \text{rg} \begin{matrix} \text{Etape 3)} \\ \underbrace{\begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & & \\ 0 & \vdots & & \vdots \end{pmatrix}}_{\text{Etape 4)}} \begin{matrix} \\ \\ A' \\ \\ \end{matrix} \end{matrix} = \text{rg}(A') + 1.$$

Cette étape n'a pas à figurer sur vos copies, vous pouvez directement passer à l'étape 4).

Finalement, on reprend les étapes 0) à 4) avec la matrice A' . L'algorithme se termine avec certitude car A' est strictement plus petite que A de par sa taille.

Exercice

Déterminer le rang de la matrice A ci-dessous :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & -4 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcul pratique du rang d'une matrice : exercice

$$\begin{aligned} \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & -4 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} &= \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} & C_1 \leftrightarrow C_2 &= \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} & L_1 \leftrightarrow L_4 \\ &= 1 + \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} &= 1 + \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} & L_4 \leftarrow \frac{1}{2} L_1 + \frac{1}{2} L_4 \end{aligned}$$

Calcul pratique du rang d'une matrice : exercice

$$\begin{aligned} \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & -4 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} &= \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} & C_1 \leftrightarrow C_2 &= \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} & L_1 \leftrightarrow L_4 \\ &= 1 + \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} &= 1 + \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} & L_4 \leftarrow \frac{1}{2} L_1 + \frac{1}{2} L_4 \\ &= 2 + \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2 + 2 = 4 \end{aligned}$$

Calcul pratique du rang d'une matrice : exercice

$$\begin{aligned} \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & -4 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} &= \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} & C_1 \leftrightarrow C_2 &= \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} & L_1 \leftrightarrow L_4 \\ &= 1 + \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} &= 1 + \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} & L_4 \leftarrow \frac{1}{2} L_1 + \frac{1}{2} L_4 \\ &= 2 + \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2 + 2 = 4 \end{aligned}$$

$$\operatorname{rg}(A) = 4$$

Proposition

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. A est inversible à gauche (resp. à droite) ssi $\text{rang}A = p$ (resp. $\text{rang}A = n$).

Proposition

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. A est inversible à gauche (resp. à droite) ssi $\text{rang}A = p$ (resp. $\text{rang}A = n$).

Corollaire

Toute matrice inversible est carrée, et pour une matrice carrée A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a :

$$A \text{ inversible} \iff \text{rang}A = n$$

On dit aussi régulière pour inversible.

Proposition

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. A est inversible à gauche (resp. à droite) ssi $\text{rang}A = p$ (resp. $\text{rang}A = n$).

Corollaire

Toute matrice inversible est carrée, et pour une matrice carrée A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a :

$$A \text{ inversible} \iff \text{rang}A = n$$

On dit aussi régulière pour inversible.

Corollaire

Le rang d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est égal à l'ordre de la plus grande sous matrice carrée régulière que l'on peut extraire de A .

Propriétés

Soit f une application linéaire de E dans F , soit \mathcal{B} une base de E avec $\dim(E) = p$, soit \mathcal{B}' une base de F avec $\dim(F) = n$, et soit $A = \underset{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}{\text{mat}}(f) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, on a :

Propriétés

Soit f une application linéaire de E dans F , soit \mathcal{B} une base de E avec $\dim(E) = p$, soit \mathcal{B}' une base de F avec $\dim(F) = n$, et soit $A = \underset{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}{\text{mat}}(f) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, on a :

- 1 $\text{rg}(A) \leq \min(n, p)$.
- 2 $\text{rg}(A) = n \iff f$ est surjective.
- 3 $\text{rg}(A) = p \iff f$ est injective.

Propriétés

- 1 Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ alors
 $rg(A \times B) \leq \min(rg(A), rg(B))$.
- 2 Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et A inversible, $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ alors
 $rg(A \times B) = rg(B)$.
- 3 Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et B inversible alors
 $rg(A \times B) = rg(A)$.

Introduction

Soit

$$(S) : \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Introduction

Soit

$$(S) : \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

On l'écrit $AX = B$ avec $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m1}(\mathbb{K})$. On note aussi A' la matrice complète du système.

Proposition

Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) (S) admet au moins une solution.
- (ii) $\text{rang}A' = \text{rang}A$.
- (iii) $B \in \mathcal{C}(A)$.

Notations

Soit A une matrice carrée (a_{ij}) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ($n \geq 1$). On écrit :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1*} \\ \vdots \\ a_{n*} \end{pmatrix} \text{ où } a_{i*} \text{ est la } i^{\text{ème}} \text{ ligne de la matrice.}$$

Théorème

Il existe une unique application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans \mathbb{K} , appelée déterminant et notée \det , possédant les trois propriétés suivantes :

Définition et propriétés

Théorème

Il existe une unique application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans \mathbb{K} , appelée déterminant et notée \det , possédant les trois propriétés suivantes :

(1) $\forall i = 1, \dots, n \quad \forall a_{1*}, \dots, a_{i-1*}, a_{i+1*}, \dots, a_{n*} \quad \forall \alpha$ et β de \mathbb{K} et $\forall x$ et y de \mathbb{K}^n

$$\det \begin{pmatrix} a_{1*} \\ \vdots \\ a_{i-1*} \\ \alpha x + \beta y \\ a_{i+1*} \\ \vdots \\ a_{n*} \end{pmatrix} = \alpha \det \begin{pmatrix} a_{1*} \\ \vdots \\ a_{i-1*} \\ x \\ a_{i+1*} \\ \vdots \\ a_{n*} \end{pmatrix} + \beta \det \begin{pmatrix} a_{1*} \\ \vdots \\ a_{i-1*} \\ y \\ a_{i+1*} \\ \vdots \\ a_{n*} \end{pmatrix}$$

(\det est une forme n – linéaire par rapport aux lignes)

Théorème

Il existe une unique application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans \mathbb{K} , appelée déterminant et notée \det , possédant les trois propriétés suivantes :

Théorème

Il existe une unique application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans \mathbb{K} , appelée déterminant et notée \det , possédant les trois propriétés suivantes :

(2) \det est alternée par rapport aux lignes, c'est à dire que :

$$a_{i*} = a_{j*} \text{ pour } i \neq j \implies \det \begin{pmatrix} a_{1*} \\ \vdots \\ a_{i*} \\ \vdots \\ a_{j*} \\ \vdots \\ a_{n*} \end{pmatrix} = 0.$$

(3) $\det(I_n) = 1$.

Conséquences

- La valeur de $\det A$ ne change pas si on remplace une ligne par la somme de cette ligne et d'un multiple d'une autre ligne.
- La valeur de $\det A$ est changée en son opposée si on échange deux lignes.
- La valeur de $\det A$ est multipliée par λ si on multiplie une ligne par λ , et donc $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$.

Proposition

Pour toutes matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a :

(i) $\det A \neq 0 \iff A$ régulière

(ii) $\det(AB) = \det A \cdot \det B$

(iii) $\det({}^t A) = \det A$.

Proposition

Pour toutes matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a :

(i) $\det A \neq 0 \iff A$ régulière

(ii) $\det(AB) = \det A \cdot \det B$

(iii) $\det({}^t A) = \det A$.

Conséquences

$\det({}^t A) = \det A$ montre que \det est une forme n -linéaire alternée des colonnes et $\det(AB) = \det A \cdot \det B$ montre que si A est régulière, $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$ et que $\det(ABA^{-1}) = \det B$ pour toute matrice B .

Proposition

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ($n \geq 2$). Pour tout couple (i, j) , on appelle A_{ij} la matrice de $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ obtenue en supprimant dans A la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne. On a alors :

- $\forall k = 1, 2, \dots, n \quad \det A = \sum_{l=1}^n (-1)^{l+k} a_{lk} \det A_{lk}$
(développement suivant la $k^{\text{ème}}$ colonne)
- $\forall i = 1, 2, \dots, n \quad \det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}$
(développement suivant la $i^{\text{ème}}$ ligne)

Proposition

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ($n \geq 2$). Pour tout couple (i, j) , on appelle A_{ij} la matrice de $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ obtenue en supprimant dans A la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne. On a alors :

- $\forall k = 1, 2, \dots, n \quad \det A = \sum_{l=1}^n (-1)^{l+k} a_{lk} \det A_{lk}$
(développement suivant la $k^{\text{ème}}$ colonne)
- $\forall i = 1, 2, \dots, n \quad \det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}$
(développement suivant la $i^{\text{ème}}$ ligne)

Propriété

Le déterminant d'une matrice diagonale ou triangulaire est égal au produit de ses coefficients diagonaux.

Remarque

Le scalaire $\det A_{ij}$ s'appelle le mineur de a_{ij} dans A et le scalaire $(-1)^{i+j} \det A_{ij}$ s'appelle son cofacteur. On associe à A la matrice des cofacteurs, que l'on notera $\text{cof}A$, qui vaut donc
$$\text{cof}A = \left((-1)^{i+j} \det A_{ij} \right)_{(i,j)}.$$

Calcul du déterminant : exemples

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \times d - b \times c$$

Calcul du déterminant : exemples

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \times d - b \times c$$

Ceci ne doit pas figurer sur vos copies, c'est juste pour vous expliquer.

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = +1 \begin{vmatrix} \textcircled{1} & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ \textcircled{2} & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ \textcircled{3} & 6 & 9 \end{vmatrix}$$

Calcul du déterminant : exemples

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \times d - b \times c$$

Ceci ne doit pas figurer sur vos copies, c'est juste pour vous expliquer.

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = +1 \begin{vmatrix} \textcircled{1} & 4 & 7 \\ \text{X} & 5 & 8 \\ \text{X} & 6 & 9 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ \text{X} & 5 & 8 \\ \text{X} & 6 & 9 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ \text{X} & 6 & 9 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = 0.$$

Calcul du déterminant : exemples

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \times d - b \times c$$

Ceci ne doit pas figurer sur vos copies, c'est juste pour vous expliquer.

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = +1 \begin{vmatrix} \textcircled{1} & 4 & 7 \\ \text{X} & \text{X} & \text{X} \\ \text{X} & \text{X} & \text{X} \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} \text{X} & 4 & 7 \\ \text{X} & \text{X} & \text{X} \\ \text{X} & 6 & 9 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} \text{X} & 4 & 7 \\ \text{X} & 5 & 8 \\ \text{X} & \text{X} & \text{X} \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = 0.$$



La nullité du déterminant de cette matrice montre qu'elle n'est pas inversible...

Calcul du déterminant : exemples

Exercice

Calculer le déterminant des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 9 & 12 \\ 1 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

Exercice

Sans "calcul", montrer que $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix}$ est divisible par 17.

Proposition

Soit A une matrice carrée régulière. On a :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} {}^t(\text{cof}A)$$

Proposition

Soit A une matrice carrée régulière. On a :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} {}^t(\text{cof}A)$$

Corollaire (Formules de Cramer)

Soit $AX = B$ un système linéaire où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et X et B appartiennent à $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$. Soit B_i la matrice obtenue en remplaçant dans A la $i^{\text{ème}}$ colonne par B . Si A est régulière, les solutions x_i sont données par :

$$x_i = \frac{\det B_i}{\det A} \text{ pour } i = 1, 2, \dots, n.$$