

Matrices

Hervé Hocquard

Université de Bordeaux, France

8 janvier 2020



LABORATOIRE
BORDELAIS
DE RECHERCHE
EN INFORMATIQUE

LaBRI

Matrice d'une application linéaire

Introduction

Soit E un \mathbb{R} -e.v de dimension p , soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E . Soit F un \mathbb{R} -e.v de dimension n et soit $\mathcal{B}' = (u_1, \dots, u_n)$ une base de F . Soit f une application linéaire de E dans F . On sait que f est entièrement déterminée par la donnée de $f(e_1), \dots, f(e_p)$, mais chacun de ces vecteurs est lui-même déterminé par ses coordonnées dans la base \mathcal{B}' de F .

Matrice d'une application linéaire

Introduction

Soit E un \mathbb{R} -e.v de dimension p , soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E . Soit F un \mathbb{R} -e.v de dimension n et soit $\mathcal{B}' = (u_1, \dots, u_n)$ une base de F . Soit f une application linéaire de E dans F . On sait que f est entièrement déterminée par la donnée de $f(e_1), \dots, f(e_p)$, mais chacun de ces vecteurs est lui-même déterminé par ses coordonnées dans la base \mathcal{B}' de F .

Notons $\underset{\mathcal{B}'}{\text{coord}}(f(e_j)) = (a_{1j}, \dots, a_{nj})$ pour $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, c'est-à-dire :

Matrice d'une application linéaire

Introduction

Soit E un \mathbb{R} -e.v de dimension p , soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E . Soit F un \mathbb{R} -e.v de dimension n et soit $\mathcal{B}' = (u_1, \dots, u_n)$ une base de F . Soit f une application linéaire de E dans F . On sait que f est entièrement déterminée par la donnée de $f(e_1), \dots, f(e_p)$, mais chacun de ces vecteurs est lui-même déterminé par ses coordonnées dans la base \mathcal{B}' de F .

Notons $\underset{\mathcal{B}'}{\text{coord}}(f(e_j)) = (a_{1j}, \dots, a_{nj})$ pour $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, c'est-à-dire :

$$\forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad f(e_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} u_i$$

Matrice d'une application linéaire

Introduction

Soit E un \mathbb{R} -e.v de dimension p , soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E . Soit F un \mathbb{R} -e.v de dimension n et soit $\mathcal{B}' = (u_1, \dots, u_n)$ une base de F . Soit f une application linéaire de E dans F . On sait que f est entièrement déterminée par la donnée de $f(e_1), \dots, f(e_p)$, mais chacun de ces vecteurs est lui-même déterminé par ses coordonnées dans la base \mathcal{B}' de F .

Notons $coord_{\mathcal{B}'}(f(e_j)) = (a_{1j}, \dots, a_{nj})$ pour $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, c'est-à-dire :

$$\forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad f(e_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} u_i$$

On obtient ainsi une matrice $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ cette matrice est définie par : $c_j(A) = coord_{\mathcal{B}'}(f(e_j))$ où $c_j(A)$ représente le $j^{\text{ème}}$ vecteur colonne de la matrice A .

Matrice d'une application linéaire

Construction de cette matrice

$$mat(f)_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} f(e_1) & f(e_2) & \dots & f(e_p) \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{matrix}$$

Matrice d'une application linéaire

Construction de cette matrice

$$mat(f) = \begin{pmatrix} f(e_1) & f(e_2) & \dots & f(e_p) \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} \rightarrow \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{matrix}$$

Cas particuliers des endomorphismes

 Lorsque l'espace d'arrivée est le même que celui de départ ($F = E$), on choisit en général la même base à l'arrivée qu'au départ ($\mathcal{B}' = \mathcal{B}$), on note $mat(f) = mat(f)_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}$, c'est une matrice carrée.

Exemples

Exercice

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de \mathbb{R}^3 et soit $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2)$ la base canonique de \mathbb{R}^2 . Soit f l'application linéaire de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^2 définie pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ par $f(x, y, z) = (2x - y + z, x + 2y - 3z)$.

- Déterminer $A = \underset{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}{\text{mat}}(f)$.
- Déterminer $B = \underset{\mathcal{B}, \mathcal{B}''}{\text{mat}}(f)$ où $\mathcal{B}'' = (e'_1 + e'_2, e'_1 - e'_2)$.

Exemples

Exercice

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de \mathbb{R}^3 et soit $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2)$ la base canonique de \mathbb{R}^2 . Soit f l'application linéaire de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^2 définie pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ par $f(x, y, z) = (2x - y + z, x + 2y - 3z)$.

- Déterminer $A = \underset{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}{\text{mat}}(f)$.
- Déterminer $B = \underset{\mathcal{B}, \mathcal{B}''}{\text{mat}}(f)$ où $\mathcal{B}'' = (e'_1 + e'_2, e'_1 - e'_2)$.

Exercice

Déterminer l'application linéaire g définie de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^2 donnée par :

$$\underset{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}{\text{mat}}(g) = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 1 \\ 4 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

Matrice d'une application linéaire

Théorème : caractérisation de l'identité et de l'application nulle

Soit E un \mathbb{R} -ev de dimension n et soit \mathcal{B} une base de E .

- Soit f un endomorphisme de E , alors :

$$f = id_E \iff \underset{\mathcal{B}}{mat}(f) = I_n$$

- Soit F un \mathbb{R} -ev de dimension p et soit \mathcal{B}' une base de F .

Soit f une application linéaire de E dans F , alors :

$$f = 0 \iff \underset{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}{mat}(f) = \mathcal{O}_{p,n}$$

Matrice d'une application linéaire

Théorème

Soient E et F deux \mathbb{R} -ev, soit \mathcal{B} une base de E et soit \mathcal{B}' une base de F . Soient f et g deux applications linéaires de E dans F et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\underset{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}{\mathtt{mat}}(f+g) = \underset{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}{\mathtt{mat}}(f) + \underset{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}{\mathtt{mat}}(g) \text{ et } \underset{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}{\mathtt{mat}}(\lambda \cdot f) = \lambda \cdot \underset{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}{\mathtt{mat}}(f)$$

Matrice d'une application linéaire

Théorème

Soient E et F deux \mathbb{R} -ev, soit \mathcal{B} une base de E et soit \mathcal{B}' une base de F . Soient f et g deux applications linéaires de E dans F et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\underset{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}{\text{mat}}(f+g) = \underset{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}{\text{mat}}(f) + \underset{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}{\text{mat}}(g) \text{ et } \underset{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}{\text{mat}}(\lambda \cdot f) = \lambda \cdot \underset{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}{\text{mat}}(f)$$

Théorème : caractérisation du produit

Soient E , F et G trois \mathbb{R} -ev, soit \mathcal{B} une base de E , soit \mathcal{B}' une base de F et soit \mathcal{B}'' une base de G . Soit f (resp. g) une application linéaire de E dans F (resp. F dans G), avec $A = \underset{\mathcal{B}', \mathcal{B}''}{\text{mat}}(g)$ et $B = \underset{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}{\text{mat}}(f)$, alors :

$$\underset{\mathcal{B}, \mathcal{B}''}{\text{mat}}(g \circ f) = A \times B = \underset{\mathcal{B}', \mathcal{B}''}{\text{mat}}(g) \times \underset{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}{\text{mat}}(f)$$

Cas particulier

Soit E un \mathbb{R} -ev, soit \mathcal{B} une base de E et soient u et v deux endomorphismes de E avec $A = \underset{\mathcal{B}}{\text{mat}}(u)$ et $B = \underset{\mathcal{B}}{\text{mat}}(v)$, on a alors $\underset{\mathcal{B}}{\text{mat}}(u \circ v) = \underset{\mathcal{B}}{\text{mat}}(u) \times \underset{\mathcal{B}}{\text{mat}}(v) = A \times B$, en particulier :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \underset{\mathcal{B}}{\text{mat}}(u^n) = \left[\underset{\mathcal{B}}{\text{mat}}(u) \right]^n = A^n$$

Lien entre matrice et application linéaire

Théorème

Soient $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E et $\mathcal{B}' = (u_1, \dots, u_n)$ une base de F . Soit f une application linéaire de E dans F .

Pour $x \in E$, on pose X la matrice colonne des coordonnées de x dans la base \mathcal{B} , que l'on note : $X = \underset{\mathcal{B}}{\text{coord}}(x) \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ et Y la matrice colonne des coordonnées de $y = f(x)$ dans la base \mathcal{B}' : $Y = \underset{\mathcal{B}'}{\text{coord}}(f(x)) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

En posant : $A = \underset{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}{\text{mat}}(f)$, on a la relation suivante :

$$Y = AX \quad i.e. \quad \underset{\mathcal{B}'}{\text{coord}}(f(x)) = \underset{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}{\text{mat}}(f) \times \underset{\mathcal{B}}{\text{coord}}(x)$$

Exercice

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de \mathbb{R}^3 et soit $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2)$ la base canonique de \mathbb{R}^2 . Soit f l'application linéaire de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^2 définie par sa matrice dans les bases \mathcal{B} et $\mathcal{B}' : A = \underset{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}{mat}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -5 \end{pmatrix}$, calculer $f(x, y, z)$.

Lien entre matrice et application linéaire

Définition : application linéaire canoniquement associée

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, on appelle application linéaire canoniquement associée à A l'application linéaire f de \mathbb{R}^p dans \mathbb{R}^n dont la matrice dans les bases canoniques de \mathbb{R}^p et \mathbb{R}^n est A .

Introduction

L'ensemble $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +, \times)$ a une structure particulière (structure d'anneau...), on peut donc s'intéresser aux éléments inversibles de cet ensemble. C'est à dire aux matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour lesquelles il existe une matrice $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M \times N = N \times M = I_n$. Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible, son inverse sera noté M^{-1} .

Matrices carrées inversibles

Introduction

L'ensemble $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +, \times)$ a une structure particulière (structure d'anneau...), on peut donc s'intéresser aux éléments inversibles de cet ensemble. C'est à dire aux matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour lesquelles il existe une matrice $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M \times N = N \times M = I_n$. Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible, son inverse sera noté M^{-1} .

Propriété

Si M et N sont deux matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors :

$$(M \times N)^{-1} = N^{-1} \times M^{-1}$$

Matrices carrées inversibles

Exemple : matrices diagonales inversibles

Soit $D = \text{diag}(a_1, \dots, a_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors D est inversible si et seulement si les coefficients diagonaux sont tous non nuls, auquel cas on a :

$$D^{-1} = \text{diag}\left(\frac{1}{a_1}, \dots, \frac{1}{a_n}\right)$$

Théorème

Soient E et F deux \mathbb{R} -ev de même dimension n , soit \mathcal{B} une base de E et \mathcal{B}' une base de F , soit u une application linéaire de E dans F , alors u est un isomorphisme de E vers F si et seulement si $\underset{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}{\text{mat}}(u)$ est inversible, si c'est le cas, alors :

$$\underset{\mathcal{B}', \mathcal{B}}{\text{mat}}(u^{-1}) = \left[\underset{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}{\text{mat}}(u) \right]^{-1}$$

Matrices carrées inversibles

Théorème : caractérisation des matrices carrées inversibles

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors les assertions suivantes sont équivalentes :

- ① A est inversible.
- ② Il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $BA = I_n$.
- ③ L'équation $AX = \mathcal{O}_{n,1}$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ admet une unique solution $X = \mathcal{O}_{n,1}$.
- ④ $\forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, l'équation $AX = Y$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ admet une unique solution.
- ⑤ $\forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, l'équation $AX = Y$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ admet au moins une solution.

Matrices carrées inversibles

Théorème : caractérisation des matrices carrées inversibles

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors les assertions suivantes sont équivalentes :

- ① A est inversible.
- ② Il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $BA = I_n$.
- ③ L'équation $AX = \mathcal{O}_{n,1}$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ admet une unique solution $X = \mathcal{O}_{n,1}$.
- ④ $\forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, l'équation $AX = Y$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ admet une unique solution.
- ⑤ $\forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, l'équation $AX = Y$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ admet au moins une solution.

Conséquence

Si $BA = I_n$ alors $AB = I_n$ (car A est inversible et donc $B = A^{-1}$).

Matrices carrées inversibles

Exercice

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si A est inversible alors ${}^t A$ est inversible et $({}^t A)^{-1} = {}^t(A^{-1})$.

Matrices carrées inversibles

Exercice

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si A est inversible alors ${}^t A$ est inversible et $({}^t A)^{-1} = {}^t(A^{-1})$.

Exercice

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Déterminer en fonction de λ si A est inversible ou non, si c'est le cas, calculer A^{-1} .

Matrices carrées inversibles

Exercice

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si A est inversible alors ${}^t A$ est inversible et $({}^t A)^{-1} = {}^t(A^{-1})$.

Exercice

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Déterminer en fonction de λ si A est inversible ou non, si c'est le cas, calculer A^{-1} .

Exercice

Soit $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice triangulaire supérieure.

Montrer que T est diagonalisable si et seulement si ses éléments diagonaux sont tous non nuls. Si c'est le cas, montrer que T^{-1} est également triangulaire supérieure.

Matrices de passage

Définition

Soit E un \mathbb{R} -ev, soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E , soit $\mathcal{S} = (x_1, \dots, x_p)$ une famille de vecteurs de E , on appelle matrice du système \mathcal{S} dans la base \mathcal{B} , la matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ définie par : $\forall (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket$, a_{ij} est la coordonnée sur e_i de x_j . En d'autres termes, pour $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, le $j^{\text{ème}}$ vecteur colonne de A est $c_j(A) = \underset{\mathcal{B}}{\text{coord}}(x_j)$. Cette matrice est notée $\mathcal{P}_{\mathcal{B}, \mathcal{S}}$ et appelée matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{S} , elle exprime les vecteurs de \mathcal{S} dans la base \mathcal{B} .

Matrices de passage

Construction de cette matrice de passage

$$\mathcal{P}_{\mathcal{B}, \mathcal{S}} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_p \\ \downarrow & \downarrow & \dots & \downarrow \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$$

→ vecteurs de \mathcal{S}

→ coordonnée sur e_1 premier vecteur de \mathcal{B}

→ coordonnée sur e_2 deuxième vecteur de \mathcal{B}

⋮

→ coordonnée sur e_n dernier vecteur de \mathcal{B}

Matrices de passage

Exercice

Soit \mathcal{B} la base canonique de \mathbb{R}^3 et $\mathcal{S} = \{(1, -1, 0); (2, -1, 3)\}$.
Déterminer la matrice de passage de la base \mathcal{B} au système \mathcal{S} .

Matrices de passage

Exercice

Soit \mathcal{B} la base canonique de \mathbb{R}^3 et $\mathcal{S} = \{(1, -1, 0); (2, -1, 3)\}$.
Déterminer la matrice de passage de la base \mathcal{B} au système \mathcal{S} .

Exercice

Soit $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de \mathbb{R}^3 et
 $\mathcal{B}' = \{e_1, e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3\}$.

- ➊ Montrer que \mathcal{B}' est une base de \mathbb{R}^3 .
- ➋ Déterminer la matrice de passage de la base \mathcal{B} à la base \mathcal{B}' .

Matrices de passage

Théorème : caractérisation des bases

Soit \mathcal{B} une base de E , et soit $\mathcal{B}' = (x_1, \dots, x_n)$ une famille de n vecteurs de E , alors \mathcal{B}' est une base de E si et seulement si la matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}' est inversible.

Matrices de passage

Théorème : caractérisation des bases

Soit \mathcal{B} une base de E , et soit $\mathcal{B}' = (x_1, \dots, x_n)$ une famille de n vecteurs de E , alors \mathcal{B}' est une base de E si et seulement si la matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}' est inversible.

Interprétation de la matrice de passage entre deux bases

Soient \mathcal{B} et \mathcal{B}' deux bases de E .

On considère $id_E : (E, \mathcal{B}') \longrightarrow (E, \mathcal{B})$ avec \mathcal{B}' comme base au départ et \mathcal{B} comme base à l'arrivée, on a la relation :

$$\mathcal{P}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} = \text{mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(id_E)$$

Matrices de passage

Théorème : application

Soient \mathcal{B} , \mathcal{B}' et \mathcal{B}'' trois bases de E , on a :

$$\mathcal{P}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}} = [\mathcal{P}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}]^{-1} \text{ et } \mathcal{P}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}''} = \mathcal{P}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} \times \mathcal{P}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}''}$$

Formules du changement de bases

Théorème

Soient \mathcal{B} et \mathcal{B}' deux bases de E , soit $x \in E$, on pose
 $X = \underset{\mathcal{B}}{\textit{coord}}(x)$ et $X' = \underset{\mathcal{B}'}{\textit{coord}}(x)$, on a les formules suivantes :

$$X = \mathcal{P}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} \times X' \text{ et } X' = \mathcal{P}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}} \times X = [\mathcal{P}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}]^{-1} \times X$$

Formules du changement de bases

Théorème

Soient \mathcal{B} et \mathcal{B}' deux bases de E , soit $x \in E$, on pose
 $X = \underset{\mathcal{B}}{\textit{coord}}(x)$ et $X' = \underset{\mathcal{B}'}{\textit{coord}}(x)$, on a les formules suivantes :

$$X = \mathcal{P}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} \times X' \text{ et } X' = \mathcal{P}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}} \times X = [\mathcal{P}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}]^{-1} \times X$$

Exercice

Soient $u_1 = (1, 1, -1)$, $u_2 = (-1, 1, 1)$ et $u_3 = (1, -2, 1)$.

- ➊ Montrer que la famille $\{u_1, u_2, u_3\}$ forme une base de \mathbb{R}^3 .
- ➋ Exprimer les coordonnées de $v = (1, 0, 1)$ dans cette nouvelle base.

Formules du changement de bases

Théorème

Soient $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}'_1$ deux bases de E et $P = \mathcal{P}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}'_1}$ la matrice de passage, soient $\mathcal{B}_2, \mathcal{B}'_2$ deux bases de F et soit $Q = \mathcal{P}_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}'_2}$ la matrice de passage, soit u une application linéaire de E dans F , on pose $A = \underset{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}{\text{mat}}(u)$, $A' = \underset{\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}'_2}{\text{mat}}(u)$, on a la relation :

$$A' = Q^{-1} \times A \times P$$

Formules du changement de bases

Théorème cas des endomorphismes

Soient \mathcal{B} et \mathcal{B}' deux bases de E et soit $P = \mathcal{P}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$ la matrice de passage, soit u un endomorphisme de E , si on pose $A = \underset{\mathcal{B}}{\text{mat}}(u)$ et $A' = \underset{\mathcal{B}'}{\text{mat}}(u)$, alors on a la relation :

$$A' = P^{-1} \times A \times P$$

Formules du changement de bases

Théorème cas des endomorphismes

Soient \mathcal{B} et \mathcal{B}' deux bases de E et soit $P = \mathcal{P}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$ la matrice de passage, soit u un endomorphisme de E , si on pose $A = \underset{\mathcal{B}}{\text{mat}}(u)$ et $A' = \underset{\mathcal{B}'}{\text{mat}}(u)$, alors on a la relation :

$$A' = P^{-1} \times A \times P$$

Exercice

Soit \mathcal{B} la base canonique de \mathbb{R}^2 et soit u un endomorphisme de \mathbb{R}^2 défini par $A = \underset{\mathcal{B}}{\text{mat}}(u) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

On pose $\mathcal{B}' = \{(1, 1); (1, -1)\}$ une base de \mathbb{R}^2 .

- ➊ Calculer la matrice de u dans la base \mathcal{B}' .
- ➋ En déduire l'expression de $u^n(x, y)$.

Définition

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on dit que les matrices A et B sont semblables si et seulement si il existe une matrice carrée inversible P telle que :

$$A = P^{-1} \times B \times P$$

Matrices semblables

Définition

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on dit que les matrices A et B sont semblables si et seulement si il existe une matrice carrée inversible P telle que :

$$A = P^{-1} \times B \times P$$

Remarques

- 1 Les matrices d'un endomorphisme dans deux bases sont semblables.
- 2 Deux matrices sont semblables lorsque ce sont deux matrices d'un même endomorphisme exprimées dans deux bases (P étant la matrice de passage).

Trace d'un endomorphisme

Théorème

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a la propriété suivante :

$$tr(A \times B) = tr(B \times A)$$

Trace d'un endomorphisme

Théorème

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a la propriété suivante :

$$tr(A \times B) = tr(B \times A)$$

Théorème : conséquence

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et si P est inversible alors :

$$tr(A) = tr(P^{-1} \times A \times P)$$

Trace d'un endomorphisme

Définition

Soit u un endomorphisme de E et soit \mathcal{B} une base de E , on appelle trace de l'endomorphisme u le scalaire noté $tr(u)$ et défini par :

$$tr(u) = tr \left(\underset{\mathcal{B}}{mat}(u) \right)$$

ce scalaire est indépendant de la base \mathcal{B} choisie.

Trace d'un endomorphisme

Définition

Soit u un endomorphisme de E et soit \mathcal{B} une base de E , on appelle trace de l'endomorphisme u le scalaire noté $tr(u)$ et défini par :

$$tr(u) = tr \left(\underset{\mathcal{B}}{mat}(u) \right)$$

ce scalaire est indépendant de la base \mathcal{B} choisie.

Théorème : rappel

L'application trace est une forme linéaire non nulle qui vérifie :

$$tr(u \circ v) = tr(v \circ u)$$

où u et v sont deux endomorphismes de E .

Pour se rassurer ou pas...

Sujet de mai 2011 modifié

Soit $u_1 = (1, 1, 0)$, $u_2 = (0, 1, 1)$, $u_3 = (1, 0, 1)$ et $u_4 = (-1, 2, -1)$ quatre éléments de \mathbb{R}^3 .

- 1) La famille $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ peut-elle être une base de \mathbb{R}^3 ?

Pour se rassurer ou pas...

Sujet de mai 2011 modifié

Soit $u_1 = (1, 1, 0)$, $u_2 = (0, 1, 1)$, $u_3 = (1, 0, 1)$ et $u_4 = (-1, 2, -1)$ quatre éléments de \mathbb{R}^3 .

- 1) La famille $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ peut-elle être une base de \mathbb{R}^3 ?

Non car la famille $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ n'est pas libre, en effet,
 $\text{card}(\{u_1, u_2, u_3, u_4\}) = 4 \neq \dim \mathbb{R}^3$.

Pour se rassurer ou pas...

Sujet de mai 2011 modifié

Soit $u_1 = (1, 1, 0)$, $u_2 = (0, 1, 1)$, $u_3 = (1, 0, 1)$ et $u_4 = (-1, 2, -1)$ quatre éléments de \mathbb{R}^3 .

- 2) Soit $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de \mathbb{R}^3 . Quelle est la matrice de passage P de la base canonique $\{e_1, e_2, e_3\}$ à la famille $\{u_1, u_2, u_3\}$?

Pour se rassurer ou pas...

Sujet de mai 2011 modifié

Soit $u_1 = (1, 1, 0)$, $u_2 = (0, 1, 1)$, $u_3 = (1, 0, 1)$ et $u_4 = (-1, 2, -1)$ quatre éléments de \mathbb{R}^3 .

- 2) Soit $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de \mathbb{R}^3 . Quelle est la matrice de passage P de la base canonique $\{e_1, e_2, e_3\}$ à la famille $\{u_1, u_2, u_3\}$?

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour se rassurer ou pas...

Sujet de mai 2011 modifié

Soit $u_1 = (1, 1, 0)$, $u_2 = (0, 1, 1)$, $u_3 = (1, 0, 1)$ et $u_4 = (-1, 2, -1)$ quatre éléments de \mathbb{R}^3 .

- 3) Montrer que $\{u_1, u_2, u_3\}$ est une base de \mathbb{R}^3 .

Pour se rassurer ou pas...

Sujet de mai 2011 modifié

Soit $u_1 = (1, 1, 0)$, $u_2 = (0, 1, 1)$, $u_3 = (1, 0, 1)$ et $u_4 = (-1, 2, -1)$ quatre éléments de \mathbb{R}^3 .

- 3) Montrer que $\{u_1, u_2, u_3\}$ est une base de \mathbb{R}^3 .

$$\det(P) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2 \neq 0$$

donc d'après le théorème de caractérisations des bases,
 $\{u_1, u_2, u_3\}$ est une base de \mathbb{R}^3 .

Pour se rassurer ou pas...

Sujet de mai 2011 modifié

Soit $u_1 = (1, 1, 0)$, $u_2 = (0, 1, 1)$, $u_3 = (1, 0, 1)$ et $u_4 = (-1, 2, -1)$ quatre éléments de \mathbb{R}^3 .

- 4) Calculer P^{-1} en utilisant la méthode de votre choix.

Pour se rassurer ou pas...

Sujet de mai 2011 modifié

Soit $u_1 = (1, 1, 0)$, $u_2 = (0, 1, 1)$, $u_3 = (1, 0, 1)$ et $u_4 = (-1, 2, -1)$ quatre éléments de \mathbb{R}^3 .

- 4) Calculer P^{-1} en utilisant la méthode de votre choix.

$$P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour se rassurer ou pas...

Sujet de mai 2011 modifié

- 5) Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

- (a) En utilisant les matrices de changement de base, donner la matrice J de f dans la base $\{u_1, u_2, u_3\}$.

Pour se rassurer ou pas...

Sujet de mai 2011 modifié

- 5) Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

- (a) En utilisant les matrices de changement de base, donner la matrice J de f dans la base $\{u_1, u_2, u_3\}$.

$$J = P^{-1} \times A \times P = \dots = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Pour se rassurer ou pas...

Sujet de mai 2011 modifié

- 5) (b) Utiliser A pour calculer $f(u_1)$, $f(u_2)$ et $f(u_3)$ en fonction de u_1 , u_2 et u_3 . Retrouver ainsi la matrice J .

Pour se rassurer ou pas...

Sujet de mai 2011 modifié

- 5) (b) Utiliser A pour calculer $f(u_1)$, $f(u_2)$ et $f(u_3)$ en fonction de u_1 , u_2 et u_3 . Retrouver ainsi la matrice J .

$$A \times U_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \times U_1 \Rightarrow f(u_1) = 2.u_1 + 0.u_2 + 0.u_3$$

Pour se rassurer ou pas...

Sujet de mai 2011 modifié

- 5) (b) Utiliser A pour calculer $f(u_1)$, $f(u_2)$ et $f(u_3)$ en fonction de u_1 , u_2 et u_3 . Retrouver ainsi la matrice J .

$$A \times U_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \times U_1 \Rightarrow f(u_1) = 2.u_1 + 0.u_2 + 0.u_3$$

$$A \times U_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = U_1 + 2 \times U_2 \Rightarrow f(u_2) = 1.u_1 + 2.u_2 + 0.u_3$$

Pour se rassurer ou pas...

Sujet de mai 2011 modifié

- 5) (b) Utiliser A pour calculer $f(u_1)$, $f(u_2)$ et $f(u_3)$ en fonction de u_1 , u_2 et u_3 . Retrouver ainsi la matrice J .

$$A \times U_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \times U_1 \Rightarrow f(u_1) = 2.u_1 + 0.u_2 + 0.u_3$$

$$A \times U_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = U_1 + 2 \times U_2 \Rightarrow f(u_2) = 1.u_1 + 2.u_2 + 0.u_3$$

$$A \times U_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = U_2 + 2 \times U_3 \Rightarrow f(u_3) = 0.u_1 + 1.u_2 + 2.u_3$$

Pour se rassurer ou pas...

Sujet de mai 2011 modifié

- 5) (b) Utiliser A pour calculer $f(u_1)$, $f(u_2)$ et $f(u_3)$ en fonction de u_1 , u_2 et u_3 . Retrouver ainsi la matrice J .

$$A \times U_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \times U_1 \Rightarrow f(u_1) = 2.u_1 + 0.u_2 + 0.u_3$$

$$A \times U_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = U_1 + 2 \times U_2 \Rightarrow f(u_2) = 1.u_1 + 2.u_2 + 0.u_3$$

$$A \times U_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = U_2 + 2 \times U_3 \Rightarrow f(u_3) = 0.u_1 + 1.u_2 + 2.u_3$$

D'où :

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Pour se rassurer ou pas...

Sujet de mai 2011 modifié

- 6) Montrer que l'on peut écrire $J = D + N$ où D est une matrice diagonale, N est nilpotente d'ordre 3 (*i.e.* $N^3 = \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$). Montrer que D et N commutent.

Pour se rassurer ou pas...

Sujet de mai 2011 modifié

- 6) Montrer que l'on peut écrire $J = D + N$ où D est une matrice diagonale, N est nilpotente d'ordre 3 (*i.e.* $N^3 = \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$). Montrer que D et N commutent.

$$J = D + N \text{ avec } D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I_3 \text{ et } N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour se rassurer ou pas...

Sujet de mai 2011 modifié

- 6) Montrer que l'on peut écrire $J = D + N$ où D est une matrice diagonale, N est nilpotente d'ordre 3 (*i.e.* $N^3 = \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$). Montrer que D et N commutent.

$$J = D + N \text{ avec } D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I_3 \text{ et } N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On remarque que $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, donc pour tout $k \geq 3$, $N^k = (0)$.

Pour se rassurer ou pas...

Sujet de mai 2011 modifié

- 6) Montrer que l'on peut écrire $J = D + N$ où D est une matrice diagonale, N est nilpotente d'ordre 3 (*i.e.* $N^3 = \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$). Montrer que D et N commutent.

$$J = D + N \text{ avec } D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I_3 \text{ et } N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On remarque que $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

donc pour tout $k \geq 3$, $N^k = (0)$.

$D \times N = 2I_3 \times N = 2N = N \times D$ donc D et N commutent.

Pour se rassurer ou pas...

Sujet de mai 2011 modifié

- 7) En déduire J^n pour n entier naturel. Comment calculer A^n ?

Pour se rassurer ou pas...

Sujet de mai 2011 modifié

- 7) En déduire J^n pour n entier naturel. Comment calculer A^n ?

Les matrices D et N commutent, on peut alors appliquer la formule du binôme de Newton et en déduire que pour tout entier naturel $n \geq 2$:

$$J^n = (D+N)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D^{n-k} \cdot N^k = D^n + n \cdot D^{n-1} \cdot N + \binom{n}{2} D^{n-2} \cdot N^2$$

soit pour tout entier naturel $n \geq 2$

$$J^n = \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2}2^{n-2} \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

Pour se rassurer ou pas...

Sujet de mai 2011 modifié

- 7) En déduire J^n pour n entier naturel. Comment calculer A^n ?

Pour se rassurer ou pas...

Sujet de mai 2011 modifié

- 7) En déduire J^n pour n entier naturel. Comment calculer A^n ?

De $J = P^{-1}AP$, on en déduit :

$$J^n = P^{-1}AP \times \cdots \times P^{-1}AP = P^{-1}A^nP \text{ soit } A^n = PJ^nP^{-1}.$$