

# Matrices

Hervé Hocquard

Université de Bordeaux, France

8 janvier 2020

université  
de **BORDEAUX**

LABORATOIRE  
BORDELAIS  
DE RECHERCHE  
EN INFORMATIQUE

**LaBRI**

# Matrice d'une application linéaire

## Introduction

Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -e.v de dimension  $p$ , soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$  une base de  $E$ . Soit  $F$  un  $\mathbb{R}$ -e.v de dimension  $n$  et soit  $\mathcal{B}' = (u_1, \dots, u_n)$  une base de  $F$ . Soit  $f$  une application linéaire de  $E$  dans  $F$ . On sait que  $f$  est entièrement déterminée par la donnée de  $f(e_1), \dots, f(e_p)$ , mais chacun de ces vecteurs est lui-même déterminé par ses coordonnées dans la base  $\mathcal{B}'$  de  $F$ .

# Matrice d'une application linéaire

## Introduction

Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -e.v de dimension  $p$ , soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$  une base de  $E$ . Soit  $F$  un  $\mathbb{R}$ -e.v de dimension  $n$  et soit  $\mathcal{B}' = (u_1, \dots, u_n)$  une base de  $F$ . Soit  $f$  une application linéaire de  $E$  dans  $F$ . On sait que  $f$  est entièrement déterminée par la donnée de  $f(e_1), \dots, f(e_p)$ , mais chacun de ces vecteurs est lui-même déterminé par ses coordonnées dans la base  $\mathcal{B}'$  de  $F$ .

Notons  $\underset{\mathcal{B}'}{\text{coord}}(f(e_j)) = (a_{1j}, \dots, a_{nj})$  pour  $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$ , c'est-à-dire :

# Matrice d'une application linéaire

## Introduction

Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -e.v de dimension  $p$ , soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$  une base de  $E$ . Soit  $F$  un  $\mathbb{R}$ -e.v de dimension  $n$  et soit  $\mathcal{B}' = (u_1, \dots, u_n)$  une base de  $F$ . Soit  $f$  une application linéaire de  $E$  dans  $F$ . On sait que  $f$  est entièrement déterminée par la donnée de  $f(e_1), \dots, f(e_p)$ , mais chacun de ces vecteurs est lui-même déterminé par ses coordonnées dans la base  $\mathcal{B}'$  de  $F$ .

Notons  $\underset{\mathcal{B}'}{\text{coord}}(f(e_j)) = (a_{1j}, \dots, a_{nj})$  pour  $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$ , c'est-à-dire :

$$\forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket, f(e_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} u_i$$

# Matrice d'une application linéaire

## Introduction

Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -e.v de dimension  $p$ , soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$  une base de  $E$ . Soit  $F$  un  $\mathbb{R}$ -e.v de dimension  $n$  et soit  $\mathcal{B}' = (u_1, \dots, u_n)$  une base de  $F$ . Soit  $f$  une application linéaire de  $E$  dans  $F$ . On sait que  $f$  est entièrement déterminée par la donnée de  $f(e_1), \dots, f(e_p)$ , mais chacun de ces vecteurs est lui-même déterminé par ses coordonnées dans la base  $\mathcal{B}'$  de  $F$ .

Notons  ${}_{\mathcal{B}'} \text{coord}(f(e_j)) = (a_{1j}, \dots, a_{nj})$  pour  $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$ , c'est-à-dire :

$$\forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket, f(e_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} u_i$$

On obtient ainsi une matrice  $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$  cette matrice est définie par :  $c_j(A) = {}_{\mathcal{B}'} \text{coord}(f(e_j))$  où  $c_j(A)$  représente le  $j^{\text{ème}}$  vecteur colonne de la matrice  $A$ .

# Matrice d'une application linéaire

## Construction de cette matrice

$$\begin{array}{ccccccc} & f(e_1) & f(e_2) & \dots & f(e_p) & & \\ & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & & \\ \text{mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f) = & \left( \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{array} \right) & \begin{array}{l} \rightarrow u_1 \\ \rightarrow u_2 \\ \vdots \\ \rightarrow u_n \end{array} \end{array}$$

# Matrice d'une application linéaire

## Construction de cette matrice

$$\begin{array}{cccc} & f(e_1) & f(e_2) & \dots & f(e_p) \\ & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ \text{mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f) = & \left( \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{array} \right) & \begin{array}{l} \rightarrow U_1 \\ \rightarrow U_2 \\ \vdots \\ \rightarrow U_n \end{array} \end{array}$$

## Cas particuliers des endomorphismes



Lorsque l'espace d'arrivée est le même que celui de départ ( $F = E$ ), on choisit en général la même base à l'arrivée qu'au départ ( $\mathcal{B}' = \mathcal{B}$ ), on note  $\text{mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f) = \text{mat}_{\mathcal{B}}(f)$ , c'est une matrice carrée.

## Exercice

Soit  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  et soit  $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^2$ . Soit  $f$  l'application linéaire de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}^2$  définie pour tout  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  par  $f(x, y, z) = (2x - y + z, x + 2y - 3z)$ .

- Déterminer  $A = \underset{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}{\text{mat}}(f)$ .
- Déterminer  $B = \underset{\mathcal{B}, \mathcal{B}''}{\text{mat}}(f)$  où  $\mathcal{B}'' = (e'_1 + e'_2, e'_1 - e'_2)$ .



## Exercice

Soit  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  et soit  $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^2$ . Soit  $f$  l'application linéaire de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}^2$  définie pour tout  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  par  $f(x, y, z) = (2x - y + z, x + 2y - 3z)$ .

- Déterminer  $A = \underset{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}{\text{mat}}(f)$ .
- Déterminer  $B = \underset{\mathcal{B}, \mathcal{B}''}{\text{mat}}(f)$  où  $\mathcal{B}'' = (e'_1 + e'_2, e'_1 - e'_2)$ .

## Exercice

Déterminer l'application linéaire  $g$  définie de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}^2$  donnée par :

$$\underset{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}{\text{mat}}(g) = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 1 \\ 4 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

## Théorème : caractérisation de l'identité et de l'application nulle

Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -ev de dimension  $n$  et soit  $\mathcal{B}$  une base de  $E$ .

- Soit  $f$  un endomorphisme de  $E$ , alors :

$$f = id_E \iff \underset{\mathcal{B}}{mat}(f) = I_n$$

- Soit  $F$  un  $\mathbb{R}$ -ev de dimension  $p$  et soit  $\mathcal{B}'$  une base de  $F$ .  
Soit  $f$  une application linéaire de  $E$  dans  $F$ , alors :

$$f = 0 \iff \underset{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}{mat}(f) = \mathcal{O}_{p,n}$$

## Théorème

Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{R}$ -ev, soit  $\mathcal{B}$  une base de  $E$  et soit  $\mathcal{B}'$  une base de  $F$ . Soient  $f$  et  $g$  deux applications linéaires de  $E$  dans  $F$  et soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ . On a :

$$\underset{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}{mat}(f + g) = \underset{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}{mat}(f) + \underset{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}{mat}(g) \text{ et } \underset{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}{mat}(\lambda.f) = \lambda . \underset{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}{mat}(f)$$

# Matrice d'une application linéaire

## Théorème

Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{R}$ -ev, soit  $\mathcal{B}$  une base de  $E$  et soit  $\mathcal{B}'$  une base de  $F$ . Soient  $f$  et  $g$  deux applications linéaires de  $E$  dans  $F$  et soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ . On a :

$$\underset{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}{\text{mat}}(f + g) = \underset{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}{\text{mat}}(f) + \underset{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}{\text{mat}}(g) \text{ et } \underset{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}{\text{mat}}(\lambda.f) = \lambda. \underset{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}{\text{mat}}(f)$$

## Théorème : caractérisation du produit

Soient  $E$ ,  $F$  et  $G$  trois  $\mathbb{R}$ -ev, soit  $\mathcal{B}$  une base de  $E$ , soit  $\mathcal{B}'$  une base de  $F$  et soit  $\mathcal{B}''$  une base de  $G$ . Soit  $f$  (resp.  $g$ ) une application linéaire de  $E$  dans  $F$  (resp.  $F$  dans  $G$ ), avec  $A = \underset{\mathcal{B}', \mathcal{B}''}{\text{mat}}(g)$  et  $B = \underset{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}{\text{mat}}(f)$ , alors :

$$\underset{\mathcal{B}, \mathcal{B}''}{\text{mat}}(g \circ f) = A \times B = \underset{\mathcal{B}', \mathcal{B}''}{\text{mat}}(g) \times \underset{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}{\text{mat}}(f)$$

## Cas particulier

Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -ev, soit  $\mathcal{B}$  une base de  $E$  et soient  $u$  et  $v$  deux endomorphismes de  $E$  avec  $A = \underset{\mathcal{B}}{\text{mat}}(u)$  et  $B = \underset{\mathcal{B}}{\text{mat}}(v)$ , on a alors  $\underset{\mathcal{B}}{\text{mat}}(u \circ v) = \underset{\mathcal{B}}{\text{mat}}(u) \times \underset{\mathcal{B}}{\text{mat}}(v) = A \times B$ , en particulier :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \underset{\mathcal{B}}{\text{mat}}(u^n) = \left[ \underset{\mathcal{B}}{\text{mat}}(u) \right]^n = A^n$$

## Théorème

Soient  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$  une base de  $E$  et  $\mathcal{B}' = (u_1, \dots, u_n)$  une base de  $F$ . Soit  $f$  une application linéaire de  $E$  dans  $F$ .

Pour  $x \in E$ , on pose  $X$  la matrice colonne des coordonnées de  $x$  dans la base  $\mathcal{B}$ , que l'on note :  $X = \underset{\mathcal{B}}{\text{coord}}(x) \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$

et  $Y$  la matrice colonne des coordonnées de  $y = f(x)$  dans la base  $\mathcal{B}'$  :  $Y = \underset{\mathcal{B}'}{\text{coord}}(f(x)) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ .

En posant :  $A = \underset{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}{\text{mat}}(f)$ , on a la relation suivante :

$$Y = AX \quad \text{i.e.} \quad \underset{\mathcal{B}'}{\text{coord}}(f(x)) = \underset{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}{\text{mat}}(f) \times \underset{\mathcal{B}}{\text{coord}}(x)$$

## Exercice

Soit  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  et soit  $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^2$ . Soit  $f$  l'application linéaire de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}^2$  définie par sa matrice dans les bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  :  $A = \underset{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}{\text{mat}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -5 \end{pmatrix}$ , calculer  $f(x, y, z)$ .

## Définition : application linéaire canoniquement associée

Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ , on appelle application linéaire canoniquement associée à  $A$  l'application linéaire  $f$  de  $\mathbb{R}^p$  dans  $\mathbb{R}^n$  dont la matrice dans les bases canoniques de  $\mathbb{R}^p$  et  $\mathbb{R}^n$  est  $A$ .



# Matrices carrées inversibles

## Introduction

L'ensemble  $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +, \times)$  a une structure particulière (structure d'anneau...), on peut donc s'intéresser aux éléments inversibles de cet ensemble. C'est à dire aux matrices  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  pour lesquelles il existe une matrice  $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que  $M \times N = N \times M = I_n$ . Si  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est inversible, son inverse sera noté  $M^{-1}$ .

## Introduction

L'ensemble  $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +, \times)$  a une structure particulière (structure d'anneau...), on peut donc s'intéresser aux éléments inversibles de cet ensemble. C'est à dire aux matrices  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  pour lesquelles il existe une matrice  $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que  $M \times N = N \times M = I_n$ . Si  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est inversible, son inverse sera noté  $M^{-1}$ .

## Propriété

Si  $M$  et  $N$  sont deux matrices inversibles de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  alors :

$$(M \times N)^{-1} = N^{-1} \times M^{-1}$$

## Exemple : matrices diagonales inversibles

Soit  $D = \text{diag}(a_1, \dots, a_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , alors  $D$  est inversible si et seulement si les coefficients diagonaux sont tous non nuls, auquel cas on a :

$$D^{-1} = \text{diag}\left(\frac{1}{a_1}, \dots, \frac{1}{a_n}\right)$$

## Théorème

Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{R}$ -ev de même dimension  $n$ , soit  $\mathcal{B}$  une base de  $E$  et  $\mathcal{B}'$  une base de  $F$ , soit  $u$  une application linéaire de  $E$  dans  $F$ , alors  $u$  est un isomorphisme de  $E$  vers  $F$  si et seulement si  $\underset{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}{mat}(u)$  est inversible, si c'est le cas, alors :

$$\underset{\mathcal{B}', \mathcal{B}}{mat}(u^{-1}) = \left[ \underset{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}{mat}(u) \right]^{-1}$$

## Théorème : caractérisation des matrices carrées inversibles

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , alors les assertions suivantes sont équivalentes :

- 1  $A$  est inversible.
- 2 Il existe une matrice  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que  $BA = I_n$ .
- 3 L'équation  $AX = \mathcal{O}_{n,1}$  d'inconnue  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  admet une unique solution  $X = \mathcal{O}_{n,1}$ .
- 4  $\forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ , l'équation  $AX = Y$  d'inconnue  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  admet une unique solution.
- 5  $\forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ , l'équation  $AX = Y$  d'inconnue  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  admet au moins une solution.

## Théorème : caractérisation des matrices carrées inversibles

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , alors les assertions suivantes sont équivalentes :

- 1  $A$  est inversible.
- 2 Il existe une matrice  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que  $BA = I_n$ .
- 3 L'équation  $AX = \mathcal{O}_{n,1}$  d'inconnue  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  admet une unique solution  $X = \mathcal{O}_{n,1}$ .
- 4  $\forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ , l'équation  $AX = Y$  d'inconnue  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  admet une unique solution.
- 5  $\forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ , l'équation  $AX = Y$  d'inconnue  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  admet au moins une solution.

## Conséquence

Si  $BA = I_n$  alors  $AB = I_n$  (car  $A$  est inversible et donc  $B = A^{-1}$ ).

## Exercice

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Montrer que si  $A$  est inversible alors  ${}^tA$  est inversible et  $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$ .

## Exercice

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Montrer que si  $A$  est inversible alors  ${}^tA$  est inversible et  $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$ .

## Exercice

Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  avec  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Déterminer en fonction de  $\lambda$  si  $A$  est inversible ou non, si c'est le cas, calculer  $A^{-1}$ .



# Matrices carrées inversibles

## Exercice

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Montrer que si  $A$  est inversible alors  ${}^t A$  est inversible et  $({}^t A)^{-1} = {}^t(A^{-1})$ .

## Exercice

Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  avec  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Déterminer en fonction de  $\lambda$  si  $A$  est inversible ou non, si c'est le cas, calculer  $A^{-1}$ .

## Exercice

Soit  $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  une matrice triangulaire supérieure. Montrer que  $T$  est diagonalisable si et seulement si ses éléments diagonaux sont tous non nuls. Si c'est le cas, montrer que  $T^{-1}$  est également triangulaire supérieure.

## Définition

Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -ev, soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ , soit  $\mathcal{S} = (x_1, \dots, x_p)$  une famille de vecteurs de  $E$ , on appelle matrice du système  $\mathcal{S}$  dans la base  $\mathcal{B}$ , la matrice  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$  définie par :  $\forall (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket$ ,  $a_{ij}$  est la coordonnée sur  $e_i$  de  $x_j$ . En d'autres termes, pour  $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$ , le  $j^{\text{ème}}$  vecteur colonne de  $A$  est  $c_j(A) = \underset{\mathcal{B}}{\text{coord}}(x_j)$ . Cette matrice est notée  $\mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{S}}$  et appelée matrice de passage de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{S}$ , elle exprime les vecteurs de  $\mathcal{S}$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

## Construction de cette matrice de passage

$$\mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{I}} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_p \\ \downarrow & \downarrow & \dots & \downarrow \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$$

→ vecteurs de  $\mathcal{I}$

→ coordonnée sur  $e_1$  premier vecteur de  $\mathcal{B}$

→ coordonnée sur  $e_2$  deuxième vecteur de  $\mathcal{B}$

→ coordonnée sur  $e_n$  dernier vecteur de  $\mathcal{B}$

## Exercice

Soit  $\mathcal{B}$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  et  $\mathcal{S} = \{(1, -1, 0); (2, -1, 3)\}$ .  
Déterminer la matrice de passage de la base  $\mathcal{B}$  au système  $\mathcal{S}$ .

## Exercice

Soit  $\mathcal{B}$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  et  $\mathcal{S} = \{(1, -1, 0); (2, -1, 3)\}$ . Déterminer la matrice de passage de la base  $\mathcal{B}$  au système  $\mathcal{S}$ .

## Exercice

Soit  $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  et  $\mathcal{B}' = \{e_1, e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3\}$ .

- 1 Montrer que  $\mathcal{B}'$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .
- 2 Déterminer la matrice de passage de la base  $\mathcal{B}$  à la base  $\mathcal{B}'$ .

## Théorème : caractérisation des bases

Soit  $\mathcal{B}$  une base de  $E$ , et soit  $\mathcal{B}' = (x_1, \dots, x_n)$  une famille de  $n$  vecteurs de  $E$ , alors  $\mathcal{B}'$  est une base de  $E$  si et seulement si la matrice de passage de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{B}'$  est inversible.

## Théorème : caractérisation des bases

Soit  $\mathcal{B}$  une base de  $E$ , et soit  $\mathcal{B}' = (x_1, \dots, x_n)$  une famille de  $n$  vecteurs de  $E$ , alors  $\mathcal{B}'$  est une base de  $E$  si et seulement si la matrice de passage de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{B}'$  est inversible.

## Interprétation de la matrice de passage entre deux bases

Soient  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  deux bases de  $E$ .

On considère  $id_E : (E, \mathcal{B}') \rightarrow (E, \mathcal{B})$  avec  $\mathcal{B}'$  comme base au départ et  $\mathcal{B}$  comme base à l'arrivée, on a la relation :

$$\mathcal{P}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} = \underset{\mathcal{B}', \mathcal{B}}{\text{mat}}(id_E)$$

## Théorème : application

Soient  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{B}'$  et  $\mathcal{B}''$  trois bases de  $E$ , on a :

$$\mathcal{P}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = [\mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}]^{-1} \quad \text{et} \quad \mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}''} = \mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \times \mathcal{P}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}$$



## Théorème

Soient  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  deux bases de  $E$ , soit  $x \in E$ , on pose  $X = \underset{\mathcal{B}}{\text{coord}}(x)$  et  $X' = \underset{\mathcal{B}'}{\text{coord}}(x)$ , on a les formules suivantes :

$$X = \mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \times X' \text{ et } X' = \mathcal{P}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} \times X = [\mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}]^{-1} \times X$$

## Théorème

Soient  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  deux bases de  $E$ , soit  $x \in E$ , on pose  $X = \underset{\mathcal{B}}{\text{coord}}(x)$  et  $X' = \underset{\mathcal{B}'}{\text{coord}}(x)$ , on a les formules suivantes :

$$X = \mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \times X' \text{ et } X' = \mathcal{P}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} \times X = [\mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}]^{-1} \times X$$

## Exercice

Soient  $u_1 = (1, 1, -1)$ ,  $u_2 = (-1, 1, 1)$  et  $u_3 = (1, -2, 1)$ .

- 1 Montrer que la famille  $\{u_1, u_2, u_3\}$  forme une base de  $\mathbb{R}^3$ .
- 2 Exprimer les coordonnées de  $v = (1, 0, 1)$  dans cette nouvelle base.

## Théorème

Soient  $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}'_1$  deux bases de  $E$  et  $P = \mathcal{P}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}'_1}$  la matrice de passage, soient  $\mathcal{B}_2, \mathcal{B}'_2$  deux bases de  $F$  et soit  $Q = \mathcal{P}_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}'_2}$  la matrice de passage, soit  $u$  une application linéaire de  $E$  dans  $F$ , on pose  $A = \underset{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}{\text{mat}}(u)$ ,  $A' = \underset{\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}'_2}{\text{mat}}(u)$ , on a la relation :

$$A' = Q^{-1} \times A \times P$$

## Théorème cas des endomorphismes

Soient  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  deux bases de  $E$  et soit  $P = \mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$  la matrice de passage, soit  $u$  un endomorphisme de  $E$ , si on pose  $A = \underset{\mathcal{B}}{\text{mat}}(u)$  et  $A' = \underset{\mathcal{B}'}{\text{mat}}(u)$ , alors on a la relation :

$$A' = P^{-1} \times A \times P$$

## Théorème cas des endomorphismes

Soient  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  deux bases de  $E$  et soit  $P = \mathcal{P}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$  la matrice de passage, soit  $u$  un endomorphisme de  $E$ , si on pose  $A = \underset{\mathcal{B}}{\text{mat}}(u)$  et  $A' = \underset{\mathcal{B}'}{\text{mat}}(u)$ , alors on a la relation :

$$A' = P^{-1} \times A \times P$$

## Exercice

Soit  $\mathcal{B}$  la base canonique de  $\mathbb{R}^2$  et soit  $u$  un endomorphisme de  $\mathbb{R}^2$  défini par  $A = \underset{\mathcal{B}}{\text{mat}}(u) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ .

On pose  $\mathcal{B}' = \{(1, 1); (1, -1)\}$  une base de  $\mathbb{R}^2$ .

- 1 Calculer la matrice de  $u$  dans la base  $\mathcal{B}'$ .
- 2 En déduire l'expression de  $u^n(x, y)$ .

## Définition

Soient  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , on dit que les matrices  $A$  et  $B$  sont semblables si et seulement si il existe une matrice carrée inversible  $P$  telle que :

$$A = P^{-1} \times B \times P$$

## Définition

Soient  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , on dit que les matrices  $A$  et  $B$  sont semblables si et seulement si il existe une matrice carrée inversible  $P$  telle que :

$$A = P^{-1} \times B \times P$$

## Remarques

- 1 Les matrices d'un endomorphisme dans deux bases sont semblables.
- 2 Deux matrices sont semblables lorsque ce sont deux matrices d'un même endomorphisme exprimées dans deux bases ( $P$  étant la matrice de passage).

## Théorème

Soient  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , on a la propriété suivante :

$$\text{tr}(A \times B) = \text{tr}(B \times A)$$



## Théorème

Soient  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , on a la propriété suivante :

$$\text{tr}(A \times B) = \text{tr}(B \times A)$$

## Théorème : conséquence

Si  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et si  $P$  est inversible alors :

$$\text{tr}(A) = \text{tr}(P^{-1} \times A \times P)$$

# Trace d'un endomorphisme

## Définition

Soit  $u$  un endomorphisme de  $E$  et soit  $\mathcal{B}$  une base de  $E$ , on appelle trace de l'endomorphisme  $u$  le scalaire noté  $tr(u)$  et défini par :

$$tr(u) = tr \left( \underset{\mathcal{B}}{mat}(u) \right)$$

ce scalaire est indépendant de la base  $\mathcal{B}$  choisie.

# Trace d'un endomorphisme

## Définition

Soit  $u$  un endomorphisme de  $E$  et soit  $\mathcal{B}$  une base de  $E$ , on appelle trace de l'endomorphisme  $u$  le scalaire noté  $tr(u)$  et défini par :

$$tr(u) = tr \left( \underset{\mathcal{B}}{mat}(u) \right)$$

ce scalaire est indépendant de la base  $\mathcal{B}$  choisie.

## Théorème : rappel

L'application trace est une forme linéaire non nulle qui vérifie :

$$tr(u \circ v) = tr(v \circ u)$$

où  $u$  et  $v$  sont deux endomorphismes de  $E$ .

## Sujet de mai 2011 modifié

Soit  $u_1 = (1, 1, 0)$ ,  $u_2 = (0, 1, 1)$ ,  $u_3 = (1, 0, 1)$  et  $u_4 = (-1, 2, -1)$  quatre éléments de  $\mathbb{R}^3$ .

- 1) La famille  $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$  peut-elle être une base de  $\mathbb{R}^3$  ?

## Sujet de mai 2011 modifié

Soit  $u_1 = (1, 1, 0)$ ,  $u_2 = (0, 1, 1)$ ,  $u_3 = (1, 0, 1)$  et  $u_4 = (-1, 2, -1)$  quatre éléments de  $\mathbb{R}^3$ .

1) La famille  $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$  peut-elle être une base de  $\mathbb{R}^3$  ?

Non car la famille  $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$  n'est pas libre, en effet,  $\text{card}(\{u_1, u_2, u_3, u_4\}) = 4 \neq \dim \mathbb{R}^3$ .

## Sujet de mai 2011 modifié

Soit  $u_1 = (1, 1, 0)$ ,  $u_2 = (0, 1, 1)$ ,  $u_3 = (1, 0, 1)$  et  $u_4 = (-1, 2, -1)$  quatre éléments de  $\mathbb{R}^3$ .

- 2) Soit  $\{e_1, e_2, e_3\}$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ . Quelle est la matrice de passage  $P$  de la base canonique  $\{e_1, e_2, e_3\}$  à la famille  $\{u_1, u_2, u_3\}$  ?

## Sujet de mai 2011 modifié

Soit  $u_1 = (1, 1, 0)$ ,  $u_2 = (0, 1, 1)$ ,  $u_3 = (1, 0, 1)$  et  $u_4 = (-1, 2, -1)$  quatre éléments de  $\mathbb{R}^3$ .

- 2) Soit  $\{e_1, e_2, e_3\}$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ . Quelle est la matrice de passage  $P$  de la base canonique  $\{e_1, e_2, e_3\}$  à la famille  $\{u_1, u_2, u_3\}$  ?

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

## Sujet de mai 2011 modifié

Soit  $u_1 = (1, 1, 0)$ ,  $u_2 = (0, 1, 1)$ ,  $u_3 = (1, 0, 1)$  et  $u_4 = (-1, 2, -1)$  quatre éléments de  $\mathbb{R}^3$ .

3) Montrer que  $\{u_1, u_2, u_3\}$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .



## Sujet de mai 2011 modifié

Soit  $u_1 = (1, 1, 0)$ ,  $u_2 = (0, 1, 1)$ ,  $u_3 = (1, 0, 1)$  et  $u_4 = (-1, 2, -1)$  quatre éléments de  $\mathbb{R}^3$ .

3) Montrer que  $\{u_1, u_2, u_3\}$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .

$$\det(P) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2 \neq 0$$

donc d'après le théorème de caractérisations des bases,  $\{u_1, u_2, u_3\}$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .

## Sujet de mai 2011 modifié

Soit  $u_1 = (1, 1, 0)$ ,  $u_2 = (0, 1, 1)$ ,  $u_3 = (1, 0, 1)$  et  $u_4 = (-1, 2, -1)$  quatre éléments de  $\mathbb{R}^3$ .

4) Calculer  $P^{-1}$  en utilisant la méthode de votre choix.

## Sujet de mai 2011 modifié

Soit  $u_1 = (1, 1, 0)$ ,  $u_2 = (0, 1, 1)$ ,  $u_3 = (1, 0, 1)$  et  $u_4 = (-1, 2, -1)$  quatre éléments de  $\mathbb{R}^3$ .

4) Calculer  $P^{-1}$  en utilisant la méthode de votre choix.

$$P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

## Sujet de mai 2011 modifié

- 5) Soit  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

- (a) En utilisant les matrices de changement de base, donner la matrice  $J$  de  $f$  dans la base  $\{u_1, u_2, u_3\}$ .

## Sujet de mai 2011 modifié

- 5) Soit  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

- (a) En utilisant les matrices de changement de base, donner la matrice  $J$  de  $f$  dans la base  $\{u_1, u_2, u_3\}$ .

$$J = P^{-1} \times A \times P = \dots = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

## Sujet de mai 2011 modifié

- 5) (b) Utiliser  $A$  pour calculer  $f(u_1)$ ,  $f(u_2)$  et  $f(u_3)$  en fonction de  $u_1$ ,  $u_2$  et  $u_3$ . Retrouver ainsi la matrice  $J$ .

## Sujet de mai 2011 modifié

- 5) (b) Utiliser  $A$  pour calculer  $f(u_1)$ ,  $f(u_2)$  et  $f(u_3)$  en fonction de  $u_1$ ,  $u_2$  et  $u_3$ . Retrouver ainsi la matrice  $J$ .

$$A \times U_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \times U_1 \Rightarrow f(u_1) = 2.u_1 + 0.u_2 + 0.u_3$$

## Sujet de mai 2011 modifié

- 5) (b) Utiliser  $A$  pour calculer  $f(u_1)$ ,  $f(u_2)$  et  $f(u_3)$  en fonction de  $u_1$ ,  $u_2$  et  $u_3$ . Retrouver ainsi la matrice  $J$ .

$$A \times U_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \times U_1 \Rightarrow f(u_1) = 2.u_1 + 0.u_2 + 0.u_3$$

$$A \times U_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = U_1 + 2 \times U_2 \Rightarrow f(u_2) = 1.u_1 + 2.u_2 + 0.u_3$$



## Sujet de mai 2011 modifié

- 5) (b) Utiliser  $A$  pour calculer  $f(u_1)$ ,  $f(u_2)$  et  $f(u_3)$  en fonction de  $u_1$ ,  $u_2$  et  $u_3$ . Retrouver ainsi la matrice  $J$ .

$$A \times U_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \times U_1 \Rightarrow f(u_1) = 2.u_1 + 0.u_2 + 0.u_3$$

$$A \times U_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = U_1 + 2 \times U_2 \Rightarrow f(u_2) = 1.u_1 + 2.u_2 + 0.u_3$$

$$A \times U_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = U_2 + 2 \times U_3 \Rightarrow f(u_3) = 0.u_1 + 1.u_2 + 2.u_3$$

## Sujet de mai 2011 modifié

- 5) (b) Utiliser  $A$  pour calculer  $f(u_1)$ ,  $f(u_2)$  et  $f(u_3)$  en fonction de  $u_1$ ,  $u_2$  et  $u_3$ . Retrouver ainsi la matrice  $J$ .

$$A \times U_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \times U_1 \Rightarrow f(u_1) = 2.u_1 + 0.u_2 + 0.u_3$$

$$A \times U_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = U_1 + 2 \times U_2 \Rightarrow f(u_2) = 1.u_1 + 2.u_2 + 0.u_3$$

$$A \times U_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = U_2 + 2 \times U_3 \Rightarrow f(u_3) = 0.u_1 + 1.u_2 + 2.u_3$$

D'où :

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

## Sujet de mai 2011 modifié

- 6) Montrer que l'on peut écrire  $J = D + N$  où  $D$  est une matrice diagonale,  $N$  est nilpotente d'ordre 3 (*i.e.*  $N^3 = \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ ). Montrer que  $D$  et  $N$  commutent.

## Sujet de mai 2011 modifié

- 6) Montrer que l'on peut écrire  $J = D + N$  où  $D$  est une matrice diagonale,  $N$  est nilpotente d'ordre 3 (*i.e.*  $N^3 = \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ ). Montrer que  $D$  et  $N$  commutent.

$$J = D + N \text{ avec } D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I_3 \text{ et } N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

## Sujet de mai 2011 modifié

- 6) Montrer que l'on peut écrire  $J = D + N$  où  $D$  est une matrice diagonale,  $N$  est nilpotente d'ordre 3 (i.e.  $N^3 = \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ ). Montrer que  $D$  et  $N$  commutent.

$$J = D + N \text{ avec } D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I_3 \text{ et } N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{On remarque que } N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

donc pour tout  $k \geq 3$ ,  $N^k = (0)$ .

## Sujet de mai 2011 modifié

- 6) Montrer que l'on peut écrire  $J = D + N$  où  $D$  est une matrice diagonale,  $N$  est nilpotente d'ordre 3 (i.e.  $N^3 = \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ ). Montrer que  $D$  et  $N$  commutent.

$$J = D + N \text{ avec } D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I_3 \text{ et } N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{On remarque que } N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

donc pour tout  $k \geq 3$ ,  $N^k = (0)$ .

$$D \times N = 2I_3 \times N = 2N = N \times D \text{ donc } D \text{ et } N \text{ commutent.}$$

## Sujet de mai 2011 modifié

7) En déduire  $J^n$  pour  $n$  entier naturel. Comment calculer  $A^n$  ?

## Sujet de mai 2011 modifié

7) En déduire  $J^n$  pour  $n$  entier naturel. Comment calculer  $A^n$  ?

Les matrices  $D$  et  $N$  commutent, on peut alors appliquer la formule du binôme de Newton et en déduire que pour tout entier naturel  $n \geq 2$  :

$$J^n = (D+N)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D^{n-k} \cdot N^k = D^n + n \cdot D^{n-1} \cdot N + \binom{n}{2} D^{n-2} \cdot N^2$$

soit pour tout entier naturel  $n \geq 2$

$$J^n = \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2} 2^{n-2} \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$



## Sujet de mai 2011 modifié

7) En déduire  $J^n$  pour  $n$  entier naturel. Comment calculer  $A^n$  ?

## Sujet de mai 2011 modifié

7) En déduire  $J^n$  pour  $n$  entier naturel. Comment calculer  $A^n$  ?

De  $J = P^{-1}AP$ , on en déduit :

$$J^n = P^{-1}AP \times \dots \times P^{-1}AP = P^{-1}A^nP \text{ soit } A^n = PJ^nP^{-1}.$$