

Systèmes d'équations linéaires

Hervé Hocquard

Université de Bordeaux, France

28 août 2019

université
de **BORDEAUX**

LABORATOIRE
BORDELAIS
DE RECHERCHE
EN INFORMATIQUE

LaBRI

Définition

Soit un système de m équations à n inconnues x_1, x_2, \dots, x_n :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

où les coefficients a_{ij} et b_i pour i entre 1 et m et j entre 1 et n sont des réels ou des complexes (des scalaires).

Définition

Soit un système de m équations à n inconnues x_1, x_2, \dots, x_n :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

où les coefficients a_{ij} et b_i pour i entre 1 et m et j entre 1 et n sont des réels ou des complexes (des scalaires).

Résoudre ce système consiste à trouver tous les réels (ou tous les complexes) x_1, \dots, x_n (s'il en existe), tels que les égalités soient vérifiées.

Définition

Soit un système de m équations à n inconnues x_1, x_2, \dots, x_n :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

où les coefficients a_{ij} et b_i pour i entre 1 et m et j entre 1 et n sont des réels ou des complexes (des scalaires).

Résoudre ce système consiste à trouver tous les réels (ou tous les complexes) x_1, \dots, x_n (s'il en existe), tels que les égalités soient vérifiées.

On dira que ce système comporte m lignes, notées L_1, \dots, L_m . Une ligne dont tous les éléments sont nuls sera dite nulle.

Définition

On associe également à ce système des matrices :

Définition

On associe également à ce système des matrices :

- une matrice $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ à m lignes et n colonnes, la matrice du système.

Définition

On associe également à ce système des matrices :

- une matrice $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ à m lignes et n colonnes, la matrice du système.

- une matrice $B = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$ à m lignes et $n + 1$ colonnes, la matrice complète du système.

Définition

On associe également à ce système des matrices :

- une matrice $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ à m lignes et n colonnes, la matrice du système.

- une matrice $B = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$ à m lignes et $n + 1$ colonnes, la matrice complète du système.

La colonne $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ s'appelle le second membre du système.

Définition

On utilise trois types d'opérations, dites élémentaires, pour résoudre ce problème :

- Remplacer une ligne du système par la somme de celle-ci et du multiple d'une autre ligne.

Définition

On utilise trois types d'opérations, dites élémentaires, pour résoudre ce problème :

- Remplacer une ligne du système par la somme de celle-ci et du multiple d'une autre ligne.
- Échanger deux lignes ou deux colonnes du système.

Définition

On utilise trois types d'opérations, dites élémentaires, pour résoudre ce problème :

- Remplacer une ligne du système par la somme de celle-ci et du multiple d'une autre ligne.
- Échanger deux lignes ou deux colonnes du système.
- Multiplier une ligne par un scalaire non nul.

Définition

On utilise trois types d'opérations, dites élémentaires, pour résoudre ce problème :

- Remplacer une ligne du système par la somme de celle-ci et du multiple d'une autre ligne.
- Échanger deux lignes ou deux colonnes du système.
- Multiplier une ligne par un scalaire non nul.

Remarque

Il est à peu près évident que par ces opérations élémentaires, on transforme un système en un système équivalent, c'est à dire ayant les mêmes solutions. Ces opérations se font indifféremment sur les lignes du système ou sur les lignes de la matrice complète du système.

Théorème

Par une suite d'opérations élémentaires, on peut transformer toute matrice en une matrice possédant la propriété suivante : le nombre de coefficients nuls au début de chaque ligne augmente à chaque ligne, l'augmentation étant stricte pour les lignes qui suivent une ligne non nulle.

Matrices à lignes échelonnées

Théorème

Par une suite d'opérations élémentaires, on peut transformer toute matrice en une matrice possédant la propriété suivante : le nombre de coefficients nuls au début de chaque ligne augmente à chaque ligne, l'augmentation étant stricte pour les lignes qui suivent une ligne non nulle.

Définition

Une matrice possédant la propriété ci-dessus sera dite à lignes échelonnées. Le premier élément non nul d'une ligne non nulle de cette matrice est appelé pivot.

Exemples

- la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 5 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est à lignes échelonnées.

Exemples

- la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 5 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est à lignes échelonnées.

- la matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ n'est pas à lignes échelonnées.

Réduite de Gauss-Jordan vs Méthode du pivot de Gauss

Théorème

On peut, par une suite d'opérations élémentaires, transformer une matrice A en une matrice à lignes échelonnées dont les pivots valent 1 et dans laquelle tous les coefficients situés au-dessus de chaque pivot sont nuls. Une telle matrice sera appelée une réduite de Gauss-Jordan. On peut montrer qu'une telle réduite est unique.

Réduite de Gauss-Jordan vs Méthode du pivot de Gauss

Théorème

On peut, par une suite d'opérations élémentaires, transformer une matrice A en une matrice à lignes échelonnées dont les pivots valent 1 et dans laquelle tous les coefficients situés au-dessus de chaque pivot sont nuls. Une telle matrice sera appelée une réduite de Gauss-Jordan. On peut montrer qu'une telle réduite est unique.

Méthode du pivot de Gauss

Le principe général du pivot de Gauss est de transformer le système que l'on veut résoudre en un système triangulaire qui a les MÊMES SOLUTIONS.

$$\text{Soit le système } \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} .$$

Par une suite d'opérations élémentaires sur la matrice complète du système (ou, ce qui revient au même, sur les lignes du système), on transforme le système en un système équivalent dont la matrice complète est à lignes échelonnées. Les lignes nulles de ce système correspondent à des équations :

$$0x_1 + \dots + 0x_n = 0$$

On peut donc les ignorer. Soit r le nombre de lignes non nulles et p_1, \dots, p_r les pivots.

- Si le dernier pivot p_r est dans la dernière colonne (la $(n+1)^{\text{ème}}$), alors la dernière ligne non nulle du système est :

$$0x_1 + \dots + 0x_n = p_r$$

Le système n'admet pas de solution.

- Si le dernier pivot n'est pas dans la dernière colonne, appelons j_1, \dots, j_r les indices des colonnes des pivots, de sorte que :

$$1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_r \leq n$$

et que la matrice complète soit de la forme :

Application aux systèmes

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & p_1 & * & \dots & * & 0 & * & \dots & * & 0 & & 0 & & * \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & p_2 & * & \dots & * & 0 & & \vdots & & * \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & p_3 & & \vdots & & \vdots \\ & & & & & & & & & & & & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & p_r & * & \dots & * \end{pmatrix}$$

En faisant passer dans le membre de droite les variables d'indices différents de j_1, \dots, j_r , et en divisant par p_1, \dots, p_r , on peut exprimer les variables d'indices j_1, \dots, j_r en fonction des autres. Le système admet des solutions. En particulier, si $r = n$, il n'admet qu'une solution, et si $r < n$, il en admet une infinité.

Exercice 1

Résoudre les systèmes à inconnues réelles :

$$\begin{cases} 2x + 6y - z = -3 \\ x - y + z = 2 \\ -x - 3y + 3z = 9 \end{cases} \quad \begin{cases} x + 2y + 3z - 2t = 1 \\ x + y - z - t = 0 \\ x + 3y + 7z - 3t = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 3y - z = 0 \\ 2x + 5y + 3z = 5 \end{cases}$$

Exercice 2

Résoudre dans \mathbb{R} les systèmes suivants où m est un paramètre réel :

$$\begin{cases} 3x + 4y - 7z = -29 \\ x + y + z = 4 \\ mx + y + z = m + 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x - y - 2z = 6 \\ 3x + my + z = m \\ 2x + y - z = 6 \end{cases}$$

Correction Exercise 1

$$(S_1) \begin{cases} 2x + 6y - z = -3 \\ x - y + z = 2 \\ -x - 3y + 3z = 9 \end{cases}$$

Correction Exercise 1

$$(S_1) \begin{cases} 2x + 6y - z = -3 \\ x - y + z = 2 \\ -x - 3y + 3z = 9 \end{cases}$$

$$(S_1) \iff \begin{cases} x - y + z = 2 \\ 2x + 6y - z = -3 \\ -x - 3y + 3z = 9 \end{cases} \quad L_1 \leftrightarrow L_2$$

Correction Exercise 1

$$(S_1) \begin{cases} 2x + 6y - z = -3 \\ x - y + z = 2 \\ -x - 3y + 3z = 9 \end{cases} \quad (S_1) \iff \begin{cases} x - y + z = 2 \\ 2x + 6y - z = -3 \\ -x - 3y + 3z = 9 \end{cases} \quad L_1 \leftrightarrow L_2$$
$$(S_1) \iff \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & -1 & -3 \\ -1 & -3 & 3 & 9 \end{bmatrix}$$

Correction Exercise 1

$$(S_1) \begin{cases} 2x + 6y - z = -3 \\ x - y + z = 2 \\ -x - 3y + 3z = 9 \end{cases}$$

$$(S_1) \iff \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & -1 & -3 \\ -1 & -3 & 3 & 9 \end{bmatrix}$$

$$(S_1) \iff \begin{cases} x - y + z = 2 \\ 2x + 6y - z = -3 \\ -x - 3y + 3z = 9 \end{cases} \quad L_1 \leftrightarrow L_2$$

$$(S_1) \iff \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 8 & -3 & -7 \\ 0 & -4 & 4 & 11 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{array}$$

Correction Exercise 1

$$(S_1) \begin{cases} 2x + 6y - z = -3 \\ x - y + z = 2 \\ -x - 3y + 3z = 9 \end{cases} \quad (S_1) \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = 2 \\ 2x + 6y - z = -3 \\ -x - 3y + 3z = 9 \end{cases} \quad L_1 \leftrightarrow L_2$$

$$(S_1) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & -1 & -3 \\ -1 & -3 & 3 & 9 \end{bmatrix} \quad (S_1) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 8 & -3 & -7 \\ 0 & -4 & 4 & 11 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{array}$$

$$(S_1) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 8 & -3 & -7 \\ 0 & 0 & 5 & 15 \end{bmatrix} \quad L_3 \leftarrow 2L_3 + L_2$$

Correction Exercise 1

$$(S_1) \begin{cases} 2x + 6y - z = -3 \\ x - y + z = 2 \\ -x - 3y + 3z = 9 \end{cases} \quad (S_1) \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = 2 \\ 2x + 6y - z = -3 \\ -x - 3y + 3z = 9 \end{cases} \quad L_1 \leftrightarrow L_2$$

$$(S_1) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & -1 & -3 \\ -1 & -3 & 3 & 9 \end{bmatrix} \quad (S_1) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 8 & -3 & -7 \\ 0 & -4 & 4 & 11 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{array}$$

$$(S_1) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 8 & -3 & -7 \\ 0 & 0 & 5 & 15 \end{bmatrix} \quad L_3 \leftarrow 2L_3 + L_2 \quad (S_1) \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = 2 \\ 8y - 3z = -7 \\ 5z = 15 \end{cases}$$

Correction Exercise 1

$$(S_1) \begin{cases} 2x + 6y - z = -3 \\ x - y + z = 2 \\ -x - 3y + 3z = 9 \end{cases} \quad (S_1) \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = 2 \\ 2x + 6y - z = -3 \\ -x - 3y + 3z = 9 \end{cases} \quad L_1 \leftrightarrow L_2$$

$$(S_1) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & -1 & -3 \\ -1 & -3 & 3 & 9 \end{bmatrix} \quad (S_1) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 8 & -3 & -7 \\ 0 & -4 & 4 & 11 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{array}$$

$$(S_1) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 8 & -3 & -7 \\ 0 & 0 & 5 & 15 \end{bmatrix} \quad L_3 \leftarrow 2L_3 + L_2 \quad (S_1) \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = 2 \\ 8y - 3z = -7 \\ 5z = 15 \end{cases}$$

$$(S_1) \Leftrightarrow \begin{cases} z = 3 \\ y = \frac{1}{4} \\ x = -\frac{3}{4} \end{cases}$$

Correction Exercise 1

$$(S_1) \begin{cases} 2x + 6y - z = -3 \\ x - y + z = 2 \\ -x - 3y + 3z = 9 \end{cases} \quad (S_1) \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = 2 \\ 2x + 6y - z = -3 \\ -x - 3y + 3z = 9 \end{cases} \quad L_1 \leftrightarrow L_2$$

$$(S_1) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & -1 & -3 \\ -1 & -3 & 3 & 9 \end{bmatrix} \quad (S_1) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 8 & -3 & -7 \\ 0 & -4 & 4 & 11 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{array}$$

$$(S_1) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 8 & -3 & -7 \\ 0 & 0 & 5 & 15 \end{bmatrix} \quad L_3 \leftarrow 2L_3 + L_2 \quad (S_1) \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = 2 \\ 8y - 3z = -7 \\ 5z = 15 \end{cases}$$

$$(S_1) \Leftrightarrow \begin{cases} z = 3 \\ y = \frac{1}{4} \\ x = -\frac{3}{4} \end{cases} \quad \text{d'où } \boxed{S = \left\{ \left(-\frac{3}{4} ; \frac{1}{4} ; 3 \right) \right\}} .$$

Correction Exercise 1

$$(S_2) \begin{cases} x + 2y + 3z - 2t = 1 \\ x + y - z - t = 0 \\ x + 3y + 7z - 3t = 2 \end{cases}$$

Correction Exercise 1

$$(S_2) \begin{cases} x + 2y + 3z - 2t = 1 \\ x + y - z - t = 0 \\ x + 3y + 7z - 3t = 2 \end{cases} \quad \text{on peut remarquer que } L_3 = 2L_1 - L_2, \text{ d'où :}$$

Correction Exercise 1

$$(S_2) \begin{cases} x+2y+3z-2t=1 \\ x+y-z-t=0 \\ x+3y+7z-3t=2 \end{cases} \quad \text{on peut remarquer que } L_3 = 2L_1 - L_2, \text{ d'où :}$$

$$(S_2) \iff \begin{cases} x+2y+3z-2t=1 \\ x+y-z-t=0 \end{cases}$$

Correction Exercice 1

$$(S_2) \begin{cases} x+2y+3z-2t=1 \\ x+y-z-t=0 \\ x+3y+7z-3t=2 \end{cases} \quad \text{on peut remarquer que } L_3 = 2L_1 - L_2, \text{ d'où :}$$

$$(S_2) \iff \begin{cases} x+2y+3z-2t=1 \\ x+y-z-t=0 \end{cases} \quad (S_2) \iff \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Correction Exercise 1

$$(S_2) \begin{cases} x+2y+3z-2t=1 \\ x+y-z-t=0 \\ x+3y+7z-3t=2 \end{cases} \quad \text{on peut remarquer que } L_3 = 2L_1 - L_2, \text{ d'où :}$$

$$(S_2) \iff \begin{cases} x+2y+3z-2t=1 \\ x+y-z-t=0 \end{cases} \quad (S_2) \iff \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(S_2) \iff \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1$$

Correction Exercice 1

$$(S_2) \begin{cases} x+2y+3z-2t=1 \\ x+y-z-t=0 \\ x+3y+7z-3t=2 \end{cases} \quad \text{on peut remarquer que } L_3 = 2L_1 - L_2, \text{ d'où :}$$

$$(S_2) \iff \begin{cases} x+2y+3z-2t=1 \\ x+y-z-t=0 \end{cases} \quad (S_2) \iff \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(S_2) \iff \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \quad (S_2) \iff \begin{cases} x+2y+3z-2t=1 \\ -y-4z+t=-1 \end{cases}$$

Correction Exercice 1

$$(S_2) \begin{cases} x+2y+3z-2t=1 \\ x+y-z-t=0 \\ x+3y+7z-3t=2 \end{cases} \quad \text{on peut remarquer que } L_3 = 2L_1 - L_2, \text{ d'où :}$$

$$(S_2) \iff \begin{cases} x+2y+3z-2t=1 \\ x+y-z-t=0 \end{cases} \quad (S_2) \iff \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(S_2) \iff \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \quad (S_2) \iff \begin{cases} x+2y+3z-2t=1 \\ -y-4z+t=-1 \end{cases}$$

$$(S_2) \iff \begin{cases} y=1-4z+t \\ x=-1+5z \end{cases}$$

Correction Exercice 1

$$(S_2) \begin{cases} x+2y+3z-2t=1 \\ x+y-z-t=0 \\ x+3y+7z-3t=2 \end{cases} \quad \text{on peut remarquer que } L_3 = 2L_1 - L_2, \text{ d'où :}$$

$$(S_2) \iff \begin{cases} x+2y+3z-2t=1 \\ x+y-z-t=0 \end{cases} \quad (S_2) \iff \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(S_2) \iff \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \quad (S_2) \iff \begin{cases} x+2y+3z-2t=1 \\ -y-4z+t=-1 \end{cases}$$

$$(S_2) \iff \begin{cases} y=1-4z+t \\ x=-1+5z \end{cases} \quad \text{d'où } \boxed{S = \{(-1+5z; 1-4z+t; z; t); (z; t) \in \mathbb{R}^2\}}.$$

Correction Exercise 1

$$(S_3) \begin{cases} x + 3y - z = 0 \\ 2x + 5y + 3z = 5 \end{cases}$$

Correction Exercise 1

$$(S_3) \begin{cases} x + 3y - z = 0 \\ 2x + 5y + 3z = 5 \end{cases}$$

$$(S_3) \iff \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Correction Exercise 1

$$(\mathcal{S}_3) \begin{cases} x+3y-z=0 \\ 2x+5y+3z=5 \end{cases} \quad (\mathcal{S}_3) \iff \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$(\mathcal{S}_3) \iff \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 5 \end{bmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$$

Correction Exercise 1

$$(\mathcal{S}_3) \begin{cases} x+3y-z=0 \\ 2x+5y+3z=5 \end{cases} \quad (\mathcal{S}_3) \iff \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$(\mathcal{S}_3) \iff \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 5 \end{bmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$$

$$(\mathcal{S}_3) \iff \begin{cases} x+3y-z=0 \\ -y+5z=5 \end{cases}$$

Correction Exercise 1

$$(\mathcal{S}_3) \begin{cases} x+3y-z=0 \\ 2x+5y+3z=5 \end{cases} \quad (\mathcal{S}_3) \iff \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$(\mathcal{S}_3) \iff \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 5 \end{bmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$$

$$(\mathcal{S}_3) \iff \begin{cases} x+3y-z=0 \\ -y+5z=5 \end{cases}$$

$$(\mathcal{S}_3) \iff \begin{cases} y = -5 + 5z \\ x = 15 - 14z \end{cases}$$

Correction Exercise 1

$$(\mathcal{S}_3) \begin{cases} x+3y-z=0 \\ 2x+5y+3z=5 \end{cases} \quad (\mathcal{S}_3) \iff \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$(\mathcal{S}_3) \iff \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 5 \end{bmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$$

$$(\mathcal{S}_3) \iff \begin{cases} x+3y-z=0 \\ -y+5z=5 \end{cases}$$

$$(\mathcal{S}_3) \iff \begin{cases} y = -5 + 5z \\ x = 15 - 14z \end{cases}$$

d'où $S = \{(15 - 14z ; -5 + 5z ; z) ; z \in \mathbb{R}\}$.

Correction Exercise 2

$$(S_1) \begin{cases} 3x + 4y - 7z = -29 \\ x + y + z = 4 \\ mx + y + z = m + 3 \end{cases}$$

Correction Exercise 2

$$(S_1) \begin{cases} 3x + 4y - 7z = -29 \\ x + y + z = 4 \\ mx + y + z = m + 3 \end{cases} \quad (S_1) \iff \begin{cases} x + y + z = 4 \\ 3x + 4y - 7z = -29 \\ mx + y + z = m + 3 \end{cases} \quad L_1 \leftrightarrow L_2$$

Correction Exercise 2

$$(S_1) \begin{cases} 3x + 4y - 7z = -29 \\ x + y + z = 4 \\ mx + y + z = m + 3 \end{cases} \quad (S_1) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 4 \\ 3x + 4y - 7z = -29 \\ mx + y + z = m + 3 \end{cases} \quad L_1 \leftrightarrow L_2$$

$$(S_1) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & -7 & -29 \\ m & 1 & 1 & m+3 \end{bmatrix}$$

Correction Exercise 2

$$(S_1) \begin{cases} 3x + 4y - 7z = -29 \\ x + y + z = 4 \\ mx + y + z = m + 3 \end{cases} \quad (S_1) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 4 \\ 3x + 4y - 7z = -29 \\ mx + y + z = m + 3 \end{cases} \quad L_1 \leftrightarrow L_2$$

$$(S_1) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & -7 & -29 \\ m & 1 & 1 & m+3 \end{bmatrix}$$

$$(S_1) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -10 & -41 \\ 0 & 1-m & 1-m & 3(1-m) \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - mL_1 \end{array}$$

Correction Exercise 2

$$(S_1) \begin{cases} 3x + 4y - 7z = -29 \\ x + y + z = 4 \\ mx + y + z = m + 3 \end{cases} \quad (S_1) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 4 \\ 3x + 4y - 7z = -29 \\ mx + y + z = m + 3 \end{cases} \quad L_1 \leftrightarrow L_2$$

$$(S_1) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & -7 & -29 \\ m & 1 & 1 & m+3 \end{bmatrix}$$

$$(S_1) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -10 & -41 \\ 0 & 1-m & 1-m & 3(1-m) \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - mL_1 \end{array}$$

$$(S_1) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -10 & -41 \\ 0 & 0 & 11(1-m) & 44(1-m) \end{bmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - (1-m)L_2$$

Correction Exercise 2

$$(S_1) \begin{cases} 3x + 4y - 7z = -29 \\ x + y + z = 4 \\ mx + y + z = m + 3 \end{cases} \quad (S_1) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 4 \\ 3x + 4y - 7z = -29 \\ mx + y + z = m + 3 \end{cases} \quad L_1 \leftrightarrow L_2$$

$$(S_1) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & -7 & -29 \\ m & 1 & 1 & m+3 \end{bmatrix}$$

$$(S_1) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -10 & -41 \\ 0 & 1-m & 1-m & 3(1-m) \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - mL_1 \end{array}$$

$$(S_1) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -10 & -41 \\ 0 & 0 & 11(1-m) & 44(1-m) \end{bmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - (1-m)L_2$$

$$(S_1) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 4 \\ y - 10z = -41 \\ (1-m)z = 4(1-m) \end{cases}$$

Correction Exercise 2

$$(S_1) \begin{cases} 3x+4y-7z = -29 \\ x+y+z = 4 \\ mx+y+z = m+3 \end{cases} \quad (S_1) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z = 4 \\ 3x+4y-7z = -29 \\ mx+y+z = m+3 \end{cases} \quad L_1 \leftrightarrow L_2$$

$$(S_1) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & -7 & -29 \\ m & 1 & 1 & m+3 \end{bmatrix}$$

$$(S_1) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -10 & -41 \\ 0 & 1-m & 1-m & 3(1-m) \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - mL_1 \end{array}$$

$$(S_1) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -10 & -41 \\ 0 & 0 & 11(1-m) & 44(1-m) \end{bmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - (1-m)L_2$$

$$(S_1) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z = 4 \\ y-10z = -41 \\ (1-m)z = 4(1-m) \end{cases}$$

- si $m=1$; $S = \{(45 - 11z; -41 + 10z; z); z \in \mathbb{R}\}$.

Correction Exercise 2

$$(S_1) \begin{cases} 3x+4y-7z = -29 \\ x+y+z = 4 \\ mx+y+z = m+3 \end{cases} \quad (S_1) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z = 4 \\ 3x+4y-7z = -29 \\ mx+y+z = m+3 \end{cases} \quad L_1 \leftrightarrow L_2$$

$$(S_1) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & -7 & -29 \\ m & 1 & 1 & m+3 \end{bmatrix}$$

$$(S_1) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -10 & -41 \\ 0 & 1-m & 1-m & 3(1-m) \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - mL_1 \end{array}$$

$$(S_1) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -10 & -41 \\ 0 & 0 & 11(1-m) & 44(1-m) \end{bmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - (1-m)L_2$$

$$(S_1) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z = 4 \\ y-10z = -41 \\ (1-m)z = 4(1-m) \end{cases}$$

• si $m=1$; $S = \{(45 - 11z; -41 + 10z; z); z \in \mathbb{R}\}$.

• si $m \neq 1$; $S = \{(1; -1; 4)\}$.

Correction Exercise 2

$$(S_2) \begin{cases} x - y - 2z = 6 \\ 3x + my + z = m \\ 2x + y - z = 6 \end{cases}$$

Correction Exercise 2

$$(S_2) \begin{cases} x - y - 2z = 6 \\ 3x + my + z = m \\ 2x + y - z = 6 \end{cases}$$

$$(S_2) \iff \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 6 \\ 3 & m & 1 & m \\ 2 & 1 & -1 & 6 \end{bmatrix}$$

Correction Exercise 2

$$(S_2) \begin{cases} x - y - 2z = 6 \\ 3x + my + z = m \\ 2x + y - z = 6 \end{cases} \quad (S_2) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 6 \\ 3 & m & 1 & m \\ 2 & 1 & -1 & 6 \end{bmatrix}$$

$$(S_2) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 6 \\ 0 & m+3 & 7 & m-18 \\ 0 & 3 & 3 & -6 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{array}$$

Correction Exercise 2

$$(S_2) \begin{cases} x - y - 2z = 6 \\ 3x + my + z = m \\ 2x + y - z = 6 \end{cases} \quad (S_2) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 6 \\ 3 & m & 1 & m \\ 2 & 1 & -1 & 6 \end{bmatrix}$$

$$(S_2) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 6 \\ 0 & m+3 & 7 & m-18 \\ 0 & 3 & 3 & -6 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{array}$$

$$(S_2) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 6 \\ 0 & 3 & 3 & -6 \\ 0 & m+3 & 7 & m-18 \end{bmatrix} \quad L_2 \leftrightarrow L_3$$

Correction Exercise 2

$$(S_2) \begin{cases} x - y - 2z = 6 \\ 3x + my + z = m \\ 2x + y - z = 6 \end{cases} \quad (S_2) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 6 \\ 3 & m & 1 & m \\ 2 & 1 & -1 & 6 \end{bmatrix}$$

$$(S_2) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 6 \\ 0 & m+3 & 7 & m-18 \\ 0 & 3 & 3 & -6 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{array}$$

$$(S_2) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 6 \\ 0 & 3 & 3 & -6 \\ 0 & m+3 & 7 & m-18 \end{bmatrix} \quad L_2 \leftrightarrow L_3$$

$$(S_2) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & m+3 & 7 & m-18 \end{bmatrix} \quad L_2 \leftarrow \frac{1}{3}L_2$$

Correction Exercise 2

$$(S_2) \iff \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 4-m & -3(4-m) \end{bmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - (m+3)L_2$$

Correction Exercise 2

$$(S_2) \iff \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 4-m & -3(4-m) \end{bmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - (m+3)L_2$$

$$(S_2) \iff \begin{cases} x - y - 2z = 6 \\ y + z = -2 \\ (4-m)z = -3(4-m) \end{cases}$$

Correction Exercise 2

$$(S_2) \iff \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 4-m & -3(4-m) \end{bmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - (m+3)L_2$$

$$(S_2) \iff \begin{cases} x - y - 2z = 6 \\ y + z = -2 \\ (4-m)z = -3(4-m) \end{cases}$$

- si $m=4$; $S = \{(4+z; -2-z; z); z \in \mathbb{R}\}$.

Correction Exercise 2

$$(S_2) \iff \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 4-m & -3(4-m) \end{bmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - (m+3)L_2$$

$$(S_2) \iff \begin{cases} x - y - 2z = 6 \\ y + z = -2 \\ (4-m)z = -3(4-m) \end{cases}$$

- si $m=4$; $S = \{(4+z; -2-z; z); z \in \mathbb{R}\}$.

- si $m \neq 4$; $S = \{(1; 1; -3)\}$