

TD 1 : Limites-Dérivation

Exercice 1

Résoudre dans \mathbb{R} les équations et inéquations suivantes :

1. $\sqrt{x^3 + x^2 + 3x + 1} = \sqrt{x^2 - 2x + 7}$
2. $3 - 2x + \sqrt{x^2 - x + 1} = 1 - x$
3. $\sqrt{x^2 - 6x + 5} \leq \sqrt{x^2 + 7x + 18}$
4. $\sqrt{x^2 - x - 2} < 2x + 1$
5. $\sqrt{2x^2 + x - 6} \geq x + 2$

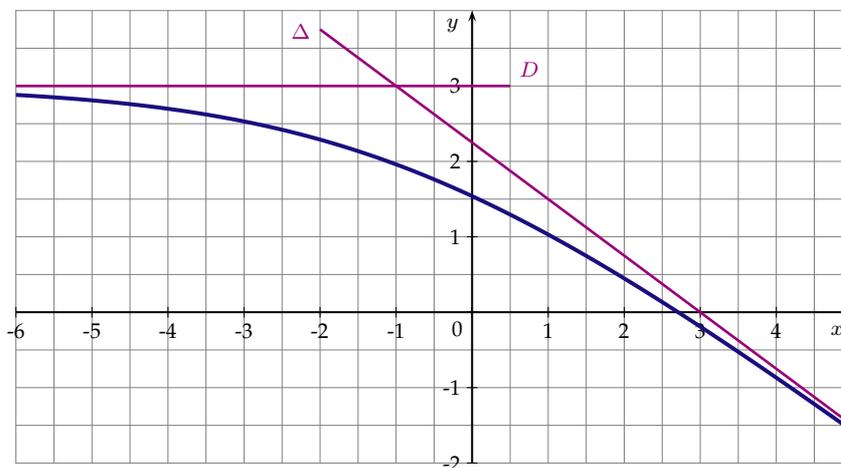
Exercice 2

Déterminer les limites suivantes :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x}(1 - 2x)$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \left(1 - \frac{12}{x}\right)$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 3x + 1}{2x^3 - x^2}$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} x + \sqrt{-2 + 3x^3}$
$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(1+x)^3}{x^2 - 2}$	$\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \frac{x^2 + 3}{2 - x}$	$\lim_{\substack{x \rightarrow -3 \\ x > -3}} \frac{x^2 + x - 6}{-3x^2 - 7x + 6}$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} 2 \left(\frac{-1}{3}\right)^n$
$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x - 6}{\sqrt{x + 1} - 2}$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{2x^2 - 3} + x$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n} - 3n}{2n - 4}$	$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{x - \sqrt{x}}{2x}$

Exercice 3

La courbe \mathcal{C}_f ci-dessous, représente une fonction f définie sur \mathbb{R} . Les droites D et Δ sont les asymptotes à la courbe respectivement en $-\infty$ et $+\infty$. La droite D est parallèle à l'axe des abscisses et coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0; 3)$. La droite Δ passe par les points de coordonnées $(-1; 3)$ et $(3; 0)$.



1. Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
2. Quelle est la limite en $+\infty$ de $f(x) + \frac{3x-9}{4}$?

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $\left] \frac{1}{2}; +\infty \right[$ par : $f(x) = \frac{2x^2 - 13x + 7}{4x - 2}$.

On appelle \mathcal{C}_f sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal.

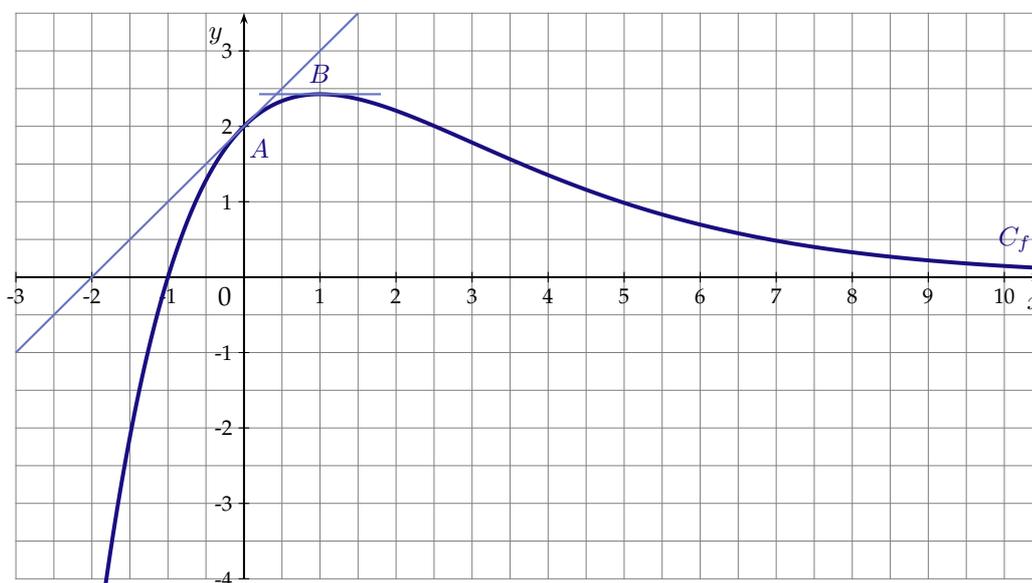
1. Déterminer $\lim_{\substack{x \rightarrow \frac{1}{2} \\ x > \frac{1}{2}}} f(x)$, qu'en déduit-on pour la courbe \mathcal{C}_f ?
2. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

- (a) Déterminer les réels a, b et c tels que $f(x) = ax + b + \frac{c}{4x - 2}$.
- (b) En déduire que la courbe C_f admet pour asymptote la droite Δ d'équation $y = \frac{x}{2} - 3$.
- (c) Étudier les positions relatives de la courbe C_f et de la droite Δ
- (d) Résoudre l'inéquation $\frac{1}{4x - 2} \leq 0,001$.
- (e) Calculer mentalement, une valeur approchée au millième près de l'image par f de 500.
3. Calculer la dérivée de la fonction f .
4. Étudier les variations de f .
5. Donner une équation de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse 1.

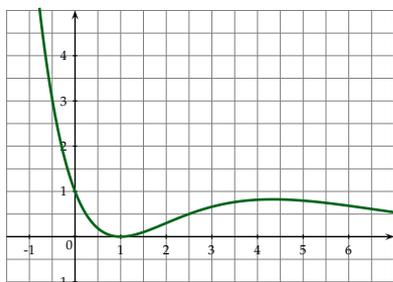
Exercice 5

La courbe C_f ci-dessous représente une fonction f définie et dérivable sur \mathbb{R} . On note f' la fonction dérivée de la fonction f . On sait que :

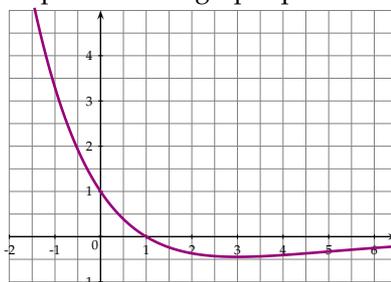
- la courbe coupe l'axe des ordonnées au point A et la tangente à la courbe au point A passe par le point de coordonnées $(-2; 0)$;
- la courbe admet au point B d'abscisse 1 une tangente parallèle à l'axe des abscisses ;
- l'axe des abscisses est asymptote à la courbe C_f .



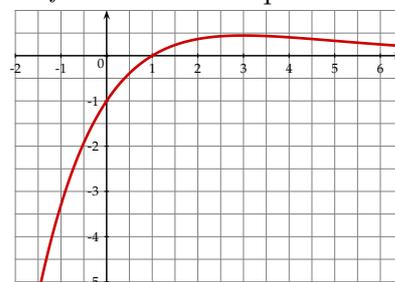
1. À partir du graphique et des renseignements fournis :
- (a) Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- (b) Déterminer $f'(0)$ et $f'(1)$.
2. Une des trois courbes ci-dessous est la représentation graphique de la fonction f' . Déterminer laquelle.



courbe C_1



courbe C_2



courbe C_3

Exercice 6

Déterminer la fonction dérivée de chacune des fonctions suivantes dérivables sur leur ensemble de définition :

1. f_1 est définie sur \mathbb{R} par $f_1(x) = \frac{5}{3x^2 + x + 1}$
2. f_2 est définie sur $]0; +\infty[$ par $f_2(x) = \left(1 + \frac{2}{x^2}\right)^2$
3. f_3 est définie sur \mathbb{R} par $f_3(x) = \sqrt{x^2 - x + 2}$
4. f_4 est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par $f_4(x) = \frac{x^2 + 3}{2 - x}$