

## Épisode I : Nombres complexes et récurrences linéaires

### EXERCICE 1

On donne  $z = 2 + 3i$  et  $z' = 3 + 2i$ . Calculer les quantités suivantes :

$$z + z'; \quad zz'; \quad (zz')^2; \quad z + \bar{z}; \quad z\bar{z}; \quad |z|^2; \quad zz' + \bar{z}\bar{z}'; \quad \frac{z'}{z}; \quad \frac{z}{z'}$$

### EXERCICE 2

Effectuer les produits et quotients suivants :

$$1. z_1 = \left(\frac{1}{2}e^{i\pi/6}\right) \times \left(\frac{2}{5}e^{i\pi/3}\right)$$

$$4. z_4 = \frac{e^{i\pi/3}}{2e^{i\pi/4}}$$

$$2. z_2 = (\sqrt{2}e^{i\pi/3}) \times (2\sqrt{2}e^{2i\pi/3})$$

$$5. z_5 = \frac{e^{i\pi/2}}{e^{i\pi}}$$

$$3. z_3 = (\sqrt{5}e^{3i\pi/4}) \times (2\sqrt{5}e^{i\pi/8})$$

$$6. z_6 = \frac{e^{5i\pi/8}}{3e^{-3i\pi/8}}$$

### EXERCICE 3

Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

$$z_1 = e^{i\pi/2}; \quad z_2 = \sqrt{2}e^{3i\pi/4}; \quad z_3 = \frac{1+i}{1-i}; \quad z_4 = \frac{1+i}{1-i} + \frac{1-i}{1+i}; \quad z_5 = \frac{2i+1}{(1+i)(1-3i)}$$

### EXERCICE 4

Déterminer le module et l'argument des nombres complexes suivants :

$$z_1 = 1 + i\sqrt{3}; \quad z_2 = -2(\sqrt{3} + i); \quad z_3 = 1 + i; \quad z_4 = (1 + i)^2; \quad z_5 = \frac{\sqrt{3} + i}{-1 + i\sqrt{3}}$$

### EXERCICE 5

Mettre sous forme exponentielle les nombres complexes suivants :

$$z_1 = -\sqrt{3} + 3i; \quad z_2 = \sqrt{3} + i; \quad z_3 = \frac{-\sqrt{3} + 3i}{\sqrt{3} + i}; \quad z_4 = 5\sqrt{2} + 5i\sqrt{2}; \quad z_5 = -2 + 2i; \quad z_6 = \frac{5\sqrt{2} + 5i\sqrt{2}}{-2 + 2i}$$

### EXERCICE 6

Résoudre dans  $\mathbb{C}$  :

$$1. 2z^2 - 6z + 5 = 0$$

$$4. z^3 + 1 = 0$$

$$2. z^2 + 3 = 0$$

$$5. z^4 - 1 = 0$$

$$3. z^2 + z + 1 = 0$$

$$6. z^4 - 2z^3 - z^2 - 2z + 1 = 0 \text{ (on pourra poser } Z = z + \frac{1}{z}\text{)}$$

### EXERCICE 7

Résoudre les équations de récurrence suivantes en exprimant les solutions en fonction du premier terme  $u_0$  :

1.  $u_t - 4u_{t-1} = 3$  avec  $u_0 = 0$ , puis  $u_0 = -1$  et  $v_t = b$ .
2.  $4u_t - 3u_{t-1} = 12 \left(\frac{3}{4}\right)^t$  avec  $u_0 = 1$  et  $v_t = bt \left(\frac{3}{4}\right)^t$ .
3.  $3u_t + 2u_{t-1} = 10 + 14 \left(\frac{1}{2}\right)^t$  avec  $u_0 = 2$  et  $v_t = b$  et  $w_t = c \left(\frac{1}{2}\right)^t$ .
4.  $u_t - u_{t-1} = 4t + 3$  avec  $u_0 = 1$  et  $v_t = t(at + b)$ .

### EXERCICE 8

Résoudre les équations de récurrence suivantes en exprimant les solutions en fonction des deux premiers termes  $u_0$  et  $u_1$  :

1.  $6u_{t+2} - 5u_{t+1} + u_t = -2t - 3$  ( $u_0 = 0, u_1 = -1$ ) avec  $v_t = at + b$ .
2.  $4u_{t+2} - 12u_{t+1} + 9u_t = 2^t$  ( $u_0 = 0, u_1 = 1$ ) avec  $v_t = b \times 2^t$ .
3.  $u_{t+2} - 1/2 u_{t+1} + 1/4 u_t = 3t^2 + 9t + 17$  ( $u_0 = 16, u_1 = 13$ ) avec  $v_t = at^2 + bt + c$ .
4.  $4u_{t+2} - 9u_t = 36 \times 3^t$  ( $u_0 = -1, u_1 = 1$ ) avec  $v_t = b \times 3^t$ .

### EXERCICE 9

$C_t$  désigne la consommation durant la période  $t$ ,  $Y_t$  le revenu durant cette période et  $I_t$  l'investissement pendant cette période. On suppose que :

$$\begin{cases} C_t = 0.8Y_{t-1} \\ I_t = 0.6(C_t - C_{t-1}) + I \end{cases}$$

où  $I$  est une constante (investissement autonome).

1. En utilisant la relation  $Y_t = C_t + I_t$ , montrer que la suite  $(Y_t)$  est solution de l'équation de récurrence :

$$Y_t - 1.28Y_{t-1} + 0.48Y_{t-2} = I$$

2. Montrer que cette équation admet une solution constante.
3. Écrire la solution générale de cette équation en fonction du module et de l'argument de  $r_1$  où  $r_1$  est une solution complexe de l'équation caractéristique (on pourra définir  $\theta = \arg(r_1)$ ).  
En déduire le comportement asymptotique de  $(Y_t)$ .
4. Expliquer comment prédire le comportement asymptotique de  $(Y_t)$  sans déterminer les racines du polynôme caractéristique.

### EXERCICE 10

$C_t$  désigne la consommation durant la période  $t$ ,  $Y_t$  respectivement  $I_t$ , le revenu et l'investissement durant cette période et  $G$  une constante (dépense gouvernementale).

On suppose que :

$$\begin{cases} C_t = cY_{t-1} & 0 < c < 1 \\ I_t = \beta(C_t - C_{t-1}) & \beta > 0 \\ Y_t = C_t + I_t + G \end{cases}$$

1. En utilisant la relation  $Y_t = C_t + I_t + G$ , montrer que la suite  $(Y_t)$  est solution de l'équation de récurrence :

$$Y_t - c(1 + \beta)Y_{t-1} + \beta cY_{t-2} = G$$

2. Montrer que cette équation admet une solution constante.
3. Écrire la solution générale de cette équation suivant les valeurs de  $c$  et  $\beta$ .
4. Déterminer le comportement asymptotique de  $(Y_t)$  suivant les valeurs de  $c$  et  $\beta$ .