

## Épisode I : C'est graphe docteur ?

### 1 Modélisation à l'aide de graphes



#### REMARQUE

Pour les trois exercices suivants, il est demandé d'essayer de modéliser les données du problème sous forme d'un « dessin », de sorte que la solution du problème puisse « se lire » directement sur le dessin.



#### EXERCICE 1

On souhaite prélever 4 litres de liquide dans un tonneau de capacité infinie. Pour cela, on dispose de deux jarres non graduées, l'une de 5 litres, l'autre de 3 litres. Les opérations possibles sont les suivantes :

1. remplir complètement une jarre en puisant dans le tonneau,
2. vider le contenu d'une jarre dans l'autre (sans débordement),
3. vider le contenu d'une jarre dans le tonneau.

Comment doit-on procéder pour prélever ces 4 litres ?



#### EXERCICE 2

Un passeur doit faire traverser une rivière à l'aide de sa barque à un loup, une chèvre et un brocolis. Il ne peut transporter qu'au plus un élément à la fois. Sachant que se trouvant seuls (sans surveillance du passeur), la chèvre mange le brocolis et le loup mange la chèvre, comment le passeur doit-il s'y prendre ?



#### EXERCICE 3

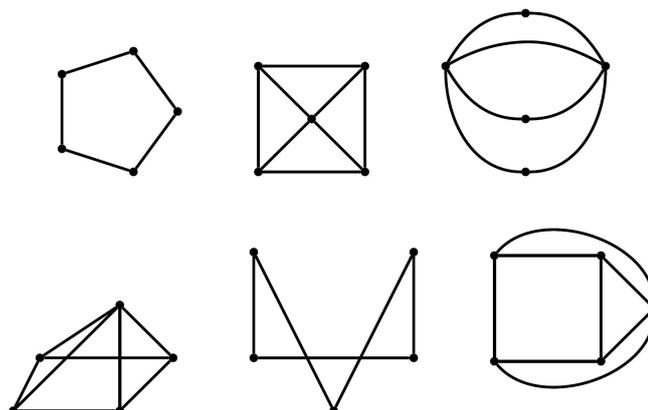
Un lotissement de trois maisons doit être équipé d'eau, de gaz et d'électricité. La réglementation interdit de croiser les canalisations pour des raisons de sécurité. Existe-t-il une solution, si oui, comment faut-il faire ?

### 2 Degrés



#### EXERCICE 4

Pour chacun des graphes ci-dessous : donnez son ordre, dites s'il est complet et dites s'il est simple.



### EXERCICE 5

1. Montrer que la somme des degrés des sommets d'un graphe  $G$  non-orienté est égale à deux fois le nombre d'arêtes, c'est-à-dire  $\sum_{v \in V(G)} d_G(v) = 2|E(G)|$ .
2. En déduire que le nombre de sommets de degré impair est pair.

### EXERCICE 6

Soit  $G$  un graphe dont les degrés des sommets sont indiqués dans le tableau suivant :

Sommet	A	B	C	D	E	F
Degré	3	5	1	2	3	4

1. En vous basant uniquement sur la liste des degrés, donner le nombre d'arêtes de  $G$ . Expliquer votre raisonnement.
2. Donner un dessin possible de  $G$ .
3. Modifier votre graphe pour qu'il corresponde au tableau suivant :

Sommet	A	B	C	D	E	F
Degré	3	5	1	4	3	4

4. Est-il possible de construire un graphe d'ordre 11 dont tous les sommets sont de degré 5? Pourquoi?

### EXERCICE 7

1. Combien y a-t-il de matches aller dans une division composée de 15 équipes?
2. Les chercheurs d'un comité d'experts ont formé 8 commissions pour rendre des rapports sur 8 projets. Chaque chercheur fait partie de deux commissions exactement et deux commissions quelconques ont exactement un chercheur en commun. Combien y a-t-il de chercheurs dans ce comité?

### EXERCICE 8

Montrer que chaque graphe simple (ayant au moins deux sommets) contient au moins deux sommets de même degré.

### EXERCICE 9

Montrer que dans un groupe de personnes, il y a toujours deux personnes ayant le même nombre d'amis présents dans le groupe.

### EXERCICE 10

Montrer que dans un groupe de six personnes, il y en a nécessairement trois qui se connaissent mutuellement ou trois qui ne se connaissent pas mutuellement (on suppose que la relation « se connaître » est symétrique : si A connaît B, B connaît également A).

Montrer que cela n'est plus nécessairement vrai dans un groupe de cinq personnes.

### EXERCICE 11

On dispose de 15 PC et de seulement 9 imprimantes. On doit connecter directement les PC aux imprimantes de sorte que les utilisateurs de 9 PC quelconques (parmi les 15) puissent utiliser les 9 imprimantes simultanément. On peut évidemment réaliser une connexion avec cette propriété avec  $15 \times 9 = 135$  liaisons, mais quel est le nombre minimum de liaisons nécessaires? Justifier ce minimum et donner une réalisation.

### EXERCICE 12

On dit que la suite d'entiers  $(d_1, \dots, d_n)$  est graphique, s'il existe un graphe simple  $G$  de sommets  $(v_1, \dots, v_n)$  tels que, pour tout  $i$ ,  $v_i$  soit de degré  $d_i$ . Par exemple, le triangle à trois sommets correspond à la suite  $(2, 2, 2)$ .

Les suites suivantes sont-elles graphiques ?

- $(3, 3, 2, 1, 1)$
- $(3, 3, 1, 1)$
- $(3, 3, 2, 2)$
- $(4, 2, 1, 1, 1, 1)$
- $(5, 3, 2, 1, 1, 1)$
- $(7, 6, 5, 4, 3, 2, 1)$
- $(5, 4, 3, 1, 1, 1, 1)$
- $(1, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 6, 6)$
- $(1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3)$ .

## 3 Chaîne eulérienne et cycle eulérien

### EXERCICE 13

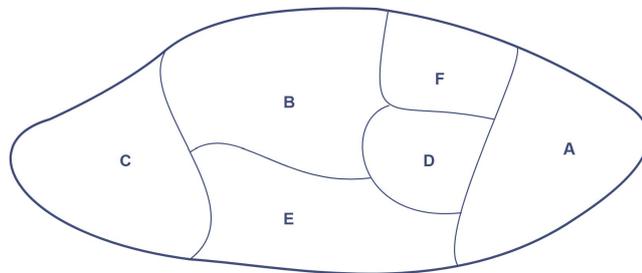
Dans la ville de GRAPHE, on s'intéresse aux principales rues permettant de relier différents lieux ouverts au public, à savoir la mairie (M), le centre commercial (C), la bibliothèque (B), la piscine (P) et le lycée (L). Chacun de ces lieux est désigné par son initiale. Le tableau ci-dessous donne les rues existant entre ces lieux.

	B	C	L	M	P
B		×		×	×
C	×		×	×	
L		×		×	
M	×	×	×		×
P	×			×	

1. Dessiner un graphe représentant cette situation.
2. Montrer qu'il est possible de trouver un trajet empruntant une fois et une seule toutes les rues de ce plan. Justifier. Proposer un tel trajet.
3. Est-il possible d'avoir un trajet partant et arrivant du même lieu et passant une fois et une seule par toutes les rues ?

### EXERCICE 14

Une île imaginaire dont la carte est représentée ci-dessous, est composée de six provinces, notées A, B, C, D, E et F.



1. Construire un graphe représentant la situation, en précisant à quoi correspondent ses sommets et ses arêtes.
2. Le graphe est-il connexe ?
3. Donner l'ordre du graphe, ainsi que les degrés de chacun de ses sommets.
4. Peut-on visiter cette île en franchissant une et une seule fois chacune des dix frontières ? Justifier. Si oui, proposer un parcours possible.

## EXERCICE 15

Une grande ville a créé un jardin pédagogique sur le thème de l'écologie, jardin qui doit être visité par la suite par la majorité des classes de cette ville. Ce jardin comporte six zones distinctes correspondant aux thèmes :

A. Eau

B. économie d'énergies

C. Plantations et cultures locales

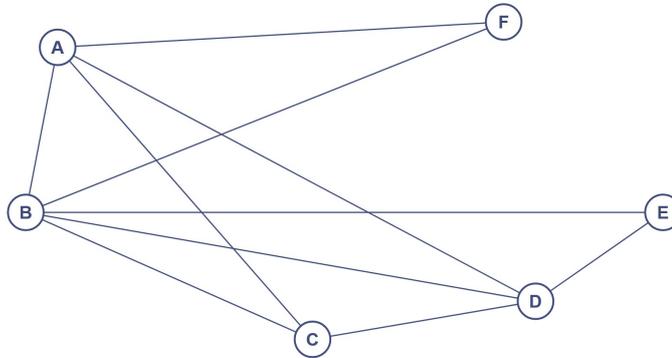
D. Développement durable

E. Biotechnologies

F. Contes d'ici (et d'ailleurs)

Ces zones sont reliées par des passages (portes) où sont proposés des questionnaires.

Le jardin et les portes sont représentés par le graphe ci-dessous (chaque porte et donc chaque questionnaire est représenté par une arête).



*Question préliminaire :*

Si un visiteur répond à tous les questionnaires, à combien de questionnaires aura-t-il répondu ?

1. Donner la matrice  $G$  associée à ce graphe.
2. Le graphe est-il complet ? Est-il connexe ? Justifier.
3. Peut-on parcourir le jardin en répondant à tous les questionnaires et sans repasser deux fois devant le même questionnaire :
  - (a) en commençant la visite par n'importe quelle zone ?
  - (b) en commençant la visite par la zone C (plantations et cultures) ? Dans ce cas, si la réponse est positive, quelle sera la dernière zone visitée ?(Dans les deux cas, **a** et **b**, justifier votre réponse.)

## EXERCICE 16

Soit

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

la matrice d'adjacence d'un graphe  $G$ .

1.  $G$  admet-il un cycle eulérien ?
2.  $G$  admet-il une chaîne eulérienne ? (On pourra proposer un dessin de  $G$ )