

Épisode I : Matrices

EXERCICE 1

Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 associé à la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

On pose $u = (1, -4, 4)$, $v = (0, 1, -2)$ et $w = (0, 0, 1)$.

- Déterminer $f(u)$, $f(v)$ et $f(w)$.
En déduire la matrice B de f dans la base $\{u, v, w\}$ de \mathbb{R}^3 .
- Vérifier ce résultat en utilisant la matrice de passage de la base canonique de \mathbb{R}^3 à la base $\{u, v, w\}$.

EXERCICE 2

Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 associé à la matrice $A = \begin{pmatrix} -6 & 5 & 3 \\ -8 & 7 & 4 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

- Caractériser le noyau et l'image de f par une base.
- Soit $v = (1, 2, -1)$, $w = (0, -1, 2)$. Calculer $f(v)$ et en déduire que $v \in \text{Im } f$.
Exprimer $f(w)$ en fonction de v et w , en déduire que $w \in \text{Im } f$.

- Trouver une base de \mathbb{R}^3 dans laquelle la matrice de f est $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Retrouver ce résultat en utilisant la matrice de changement de base.

EXERCICE 3

Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 1 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

- On pose $u_1 = (6, 13, 4)$ et $u_2 = (2, 1, 0)$. On note U_1 et U_2 les vecteurs colonnes de leurs coordonnées dans la base canonique. Calculer AU_1 et AU_2 .
- Déterminer un vecteur u_3 tel que $AU_3 = U_2 + U_3$.
- Montrer que la famille $\{u_1, u_2, u_3\}$ est une base de \mathbb{R}^3 .
Calculer de deux façons différentes la matrice B de f dans cette base.
- Montrer que l'on peut écrire $B = D + N$ où D est une matrice diagonale.
Montrer que D et N commutent.
- Calculer N^n pour n entier naturel. En déduire B^n puis A^n .

INDICATION

 On pourra utiliser la formule du binôme de Newton.

REMARQUE

 Exercice tiré du sujet de mai 2013...

EXERCICE 4

Partie A

Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

On pose $u_1 = (0, 1, 0)$, $u_2 = (1, 1, 1)$ et $u_3 = (2, 0, 1)$.

On note U_1, U_2 et U_3 les vecteurs colonnes de leurs coordonnées dans la base canonique.

1. Déterminer P la matrice de passage de la base canonique de \mathbb{R}^3 à $\{u_1, u_2, u_3\}$.
2. Calculer le déterminant de P puis en déduire que P est inversible.
3. Que pouvez-vous en déduire de la famille $\{u_1, u_2, u_3\}$?
4. Déterminer la matrice B de f dans la base $\{u_1, u_2, u_3\}$ sans utiliser P .
5. Calculer P^{-1} en utilisant la méthode de votre choix.
6. En utilisant les matrices de changement de base, retrouver la matrice B de f dans la base $\{u_1, u_2, u_3\}$.
7. Montrer que l'on peut écrire $B = D + N$ où D est une matrice diagonale.
8. Calculer N^n pour n entier naturel. En déduire B^n puis A^n .

Partie B

Les suites (x_n) , (y_n) et (z_n) sont solutions du système d'équations de récurrence :

$$\begin{cases} x_{n+1} = 4x_n \\ y_{n+1} = -x_n + 4y_n + 2z_n \\ z_{n+1} = 4z_n \end{cases}$$

9. Écrire ce système sous la forme matricielle :

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = A \times X_n$$

puis déterminer les solutions x_n , y_n et z_n en fonction des conditions initiales x_0 , y_0 et z_0 .

INDICATION

On pourra utiliser la Partie A.

EXERCICE 5

Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que f n'est pas diagonalisable.
2. Montrer que $(A - 4I)^2 = 0$ (I désigne la matrice identité).
3. Soit $u_2 = (1, 1, 1)$. Montrer que $(f - 4Id)(u_2)$ est un vecteur propre u_1 de f (Id désigne l'application identique de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^3).
4. On pose $u_3 = (2, 0, 1)$. Montrer que $\{u_1, u_2, u_3\}$ est une base de \mathbb{R}^3 .
Quelle est la matrice de f dans cette base? Calculer A^n pour tout entier naturel n .

EXERCICE 6

Pour chacune des matrices suivantes, dire si elle est diagonalisable, et dans l'affirmative, diagonalisez-la puis vérifiez que le déterminant et la trace de cette matrice sont les mêmes que pour la matrice diagonale associée.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 3/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1/2 & 1 & 3/2 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

EXERCICE 7

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer sans calculer le polynôme caractéristique que 0 est valeur propre de A .
2. Montrer que A est diagonalisable et en déduire A^n pour tout entier naturel n .

EXERCICE 8

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ une matrice à coefficients réels.

1. Dire, selon les valeurs de a et de b , si la matrice A est diagonalisable.
2. Dans le cas où $a = 3$ et $b = 0$, diagonaliser A .

EXERCICE 9

Soit $a \in \mathbb{R}$, notons A la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a & 1+a \end{pmatrix}$$

On définit une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, par la donnée de u_0 et u_1 et la relation de récurrence suivante, pour $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+2} = (1+a)u_{n+1} - au_n$$

1. Pour quelles valeurs de a la matrice A est-elle diagonalisable?
2. Lorsque A est diagonalisable, calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.
3. On suppose A diagonalisable. On note U_n le vecteur $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$, exprimer U_{n+1} en fonction de U_n et de A , puis U_n en fonction de U_0 et de A . En déduire u_n en fonction de u_0, u_1 et n .

EXERCICE 10

Soit (u_n) une suite réelle vérifiant l'équation de récurrence : $u_{n+3} = 6u_{n+2} - 11u_{n+1} + 6u_n$.

1. On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$. Montrer qu'il existe une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $X_{n+1} = AX_n$.
2. Diagonaliser A . En déduire u_n en fonction de u_0, u_1, u_2 et n .