

## Épisode I : Matrices

### EXERCICE 1

Soit  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  associé à la matrice  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ .

On pose  $u = (1, -4, 4)$ ,  $v = (0, 1, -2)$  et  $w = (0, 0, 1)$ .

- Déterminer  $f(u)$ ,  $f(v)$  et  $f(w)$ .  
En déduire la matrice  $B$  de  $f$  dans la base  $\{u, v, w\}$  de  $\mathbb{R}^3$ .
- Vérifier ce résultat en utilisant la matrice de passage de la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  à la base  $\{u, v, w\}$ .

### EXERCICE 2

Soit  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  associé à la matrice  $A = \begin{pmatrix} -6 & 5 & 3 \\ -8 & 7 & 4 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

- Caractériser le noyau et l'image de  $f$  par une base.
- Soit  $v = (1, 2, -1)$ ,  $w = (0, -1, 2)$ . Calculer  $f(v)$  et en déduire que  $v \in \text{Im } f$ .  
Exprimer  $f(w)$  en fonction de  $v$  et  $w$ , en déduire que  $w \in \text{Im } f$ .

- Trouver une base de  $\mathbb{R}^3$  dans laquelle la matrice de  $f$  est  $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

Retrouver ce résultat en utilisant la matrice de changement de base.

### EXERCICE 3

Soit  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 1 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

- On pose  $u_1 = (6, 13, 4)$  et  $u_2 = (2, 1, 0)$ . On note  $U_1$  et  $U_2$  les vecteurs colonnes de leurs coordonnées dans la base canonique. Calculer  $AU_1$  et  $AU_2$ .
- Déterminer un vecteur  $u_3$  tel que  $AU_3 = U_2 + U_3$ .
- Montrer que la famille  $\{u_1, u_2, u_3\}$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .  
Calculer de deux façons différentes la matrice  $B$  de  $f$  dans cette base.
- Montrer que l'on peut écrire  $B = D + N$  où  $D$  est une matrice diagonale.  
Montrer que  $D$  et  $N$  commutent.
- Calculer  $N^n$  pour  $n$  entier naturel. En déduire  $B^n$  puis  $A^n$ .

### INDICATION

 On pourra utiliser la formule du binôme de Newton.

### REMARQUE

 Exercice tiré du sujet de mai 2013...

## EXERCICE 4

### Partie A

Soit  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

On pose  $u_1 = (0, 1, 0)$ ,  $u_2 = (1, 1, 1)$  et  $u_3 = (2, 0, 1)$ .

On note  $U_1, U_2$  et  $U_3$  les vecteurs colonnes de leurs coordonnées dans la base canonique.

1. Déterminer  $P$  la matrice de passage de la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  à  $\{u_1, u_2, u_3\}$ .
2. Calculer le déterminant de  $P$  puis en déduire que  $P$  est inversible.
3. Que pouvez-vous en déduire de la famille  $\{u_1, u_2, u_3\}$ ?
4. Déterminer la matrice  $B$  de  $f$  dans la base  $\{u_1, u_2, u_3\}$  sans utiliser  $P$ .
5. Calculer  $P^{-1}$  en utilisant la méthode de votre choix.
6. En utilisant les matrices de changement de base, retrouver la matrice  $B$  de  $f$  dans la base  $\{u_1, u_2, u_3\}$ .
7. Montrer que l'on peut écrire  $B = D + N$  où  $D$  est une matrice diagonale.
8. Calculer  $N^n$  pour  $n$  entier naturel. En déduire  $B^n$  puis  $A^n$ .

### Partie B

Les suites  $(x_n)$ ,  $(y_n)$  et  $(z_n)$  sont solutions du système d'équations de récurrence :

$$\begin{cases} x_{n+1} = 4x_n \\ y_{n+1} = -x_n + 4y_n + 2z_n \\ z_{n+1} = 4z_n \end{cases}$$

9. Écrire ce système sous la forme matricielle :

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = A \times X_n$$

puis déterminer les solutions  $x_n$ ,  $y_n$  et  $z_n$  en fonction des conditions initiales  $x_0$ ,  $y_0$  et  $z_0$ .

## INDICATION

On pourra utiliser la Partie A.

## EXERCICE 5

Soit  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que  $f$  n'est pas diagonalisable.
2. Montrer que  $(A - 4I)^2 = 0$  ( $I$  désigne la matrice identité).
3. Soit  $u_2 = (1, 1, 1)$ . Montrer que  $(f - 4Id)(u_2)$  est un vecteur propre  $u_1$  de  $f$  ( $Id$  désigne l'application identique de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}^3$ ).
4. On pose  $u_3 = (2, 0, 1)$ . Montrer que  $\{u_1, u_2, u_3\}$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .  
Quelle est la matrice de  $f$  dans cette base? Calculer  $A^n$  pour tout entier naturel  $n$ .

### EXERCICE 6

Pour chacune des matrices suivantes, dire si elle est diagonalisable, et dans l'affirmative, diagonalisez-la puis vérifiez que le déterminant et la trace de cette matrice sont les mêmes que pour la matrice diagonale associée.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 3/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1/2 & 1 & 3/2 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

### EXERCICE 7

Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ .

1. Montrer sans calculer le polynôme caractéristique que 0 est valeur propre de  $A$ .
2. Montrer que  $A$  est diagonalisable et en déduire  $A^n$  pour tout entier naturel  $n$ .

### EXERCICE 8

Soit  $A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$  une matrice à coefficients réels.

1. Dire, selon les valeurs de  $a$  et de  $b$ , si la matrice  $A$  est diagonalisable.
2. Dans le cas où  $a = 3$  et  $b = 0$ , diagonaliser  $A$ .

### EXERCICE 9

Soit  $a \in \mathbb{R}$ , notons  $A$  la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a & 1+a \end{pmatrix}$$

On définit une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , par la donnée de  $u_0$  et  $u_1$  et la relation de récurrence suivante, pour  $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+2} = (1+a)u_{n+1} - au_n$$

1. Pour quelles valeurs de  $a$  la matrice  $A$  est-elle diagonalisable?
2. Lorsque  $A$  est diagonalisable, calculer  $A^n$  pour  $n \in \mathbb{N}$ .
3. On suppose  $A$  diagonalisable. On note  $U_n$  le vecteur  $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$ , exprimer  $U_{n+1}$  en fonction de  $U_n$  et de  $A$ , puis  $U_n$  en fonction de  $U_0$  et de  $A$ . En déduire  $u_n$  en fonction de  $u_0, u_1$  et  $n$ .

### EXERCICE 10

Soit  $(u_n)$  une suite réelle vérifiant l'équation de récurrence :  $u_{n+3} = 6u_{n+2} - 11u_{n+1} + 6u_n$ .

1. On pose  $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$ . Montrer qu'il existe une matrice  $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  telle que  $X_{n+1} = AX_n$ .
2. Diagonaliser  $A$ . En déduire  $u_n$  en fonction de  $u_0, u_1, u_2$  et  $n$ .