

TD 2 : Fonctions logarithme et exponentielle

Exercice 1

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{3+x^4}{x}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f .
2. Calculer les dérivées première et seconde de f .
3. Déterminer les extrema de f .
4. Construire le tableau de variations de f . Les extrema de f sont-ils globaux ?
5. Que peut-on dire des extrema de f si on restreint l'étude de f à chaque intervalle du domaine de définition ?

Exercice 2

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1. $\ln(1-2x) = \ln(x+2) + \ln 3$
2. $\ln(1-x^2) = \ln(2x-1)$
3. $\ln \sqrt{2x-2} = \ln(4-x) - \frac{1}{2} \ln x$
4. $2e^{2x} - 5e^x = -2$
5. $e^x - 2e^{-x} - 1 = 0$
6. $\ln(2-x) \leq \ln(2x+1) - \ln(3)$
7. $\ln(3x+2) \geq \ln\left(x^2 + \frac{1}{4}\right)$
8. $e^x > -3$
9. $\exp\left(1 + \frac{2}{x}\right) \leq e^x$

Exercice 3

Étudier les limites aux bornes de son ensemble de définition de la fonction f définie par :

- a) $f(x) = 3x + 2 - \ln x$; b) $f(x) = \frac{2x + \ln x}{x}$; c) $f(x) = \frac{2 \ln x - 1}{x}$; d) $f(x) = \frac{1}{x} - \ln x$;
e) $f(x) = \frac{e^x - 2}{e^x + 1}$; f) $f(x) = \exp\left(\frac{x+3}{x^2-1}\right)$; g) $f(x) = xe^x - e^x + 1$

Exercice 4

1. Dans chacun des cas suivants, calculer la dérivée f' de la fonction f définie sur $]0; +\infty[$:
a) $f(x) = x \ln x - x$; b) $f(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$; c) $f(x) = \ln \sqrt{x}$; d) $f(x) = (\ln x)^2$; e) $\ln(x^2)$
2. Calculer la dérivée f' de la fonction f sur son ensemble de définition :
a) $f(x) = \exp(x^2 + 3x - 1)$; b) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$; c) $f(x) = e^{e^x}$; d) $f(x) = e^{\sqrt{x} \ln x}$

Exercice 5

(D'après sujet bac Amérique du Nord 2007)

PREMIÈRE PARTIE

On considère une fonction g définie sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[$ par :

$$g(x) = -x^2 + ax - \ln(2x+b), \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont deux réels.}$$

Calculer a et b pour que la courbe représentative de g dans un plan muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ passe par l'origine du repère et admette une tangente parallèle à l'axe des abscisses au point d'abscisse $\frac{1}{2}$.

DEUXIÈME PARTIE

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[$ par $f(x) = -x^2 + 2x - \ln(2x+1)$.

On admet que f est dérivable et on note f' sa dérivée.

Le tableau de variations de la fonction f est le suivant :

x	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$	
signe de $f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
variations de f	$+\infty$	0	$\frac{3}{4} + \ln\left(\frac{1}{2}\right)$	$-\infty$	

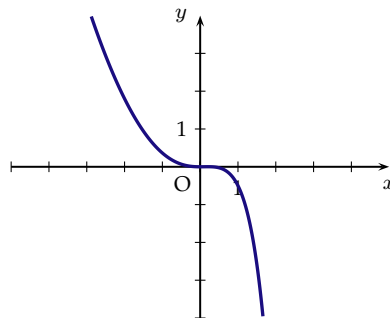
- Justifier tous les éléments contenus dans ce tableau.
- Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$ ($f\left(\frac{1}{2}\right) \simeq 0,057$ et $f(1) \simeq -0,099$).
- Déterminer le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[$.

Exercice 6 (D'après sujet bac Amérique du Sud 2010)

On considère la fonction numérique f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout réel x , on ait :

$$f(x) = \frac{x^2}{2} - x^2 e^{x-1}.$$

On note f' sa fonction dérivée sur $\mathbb{R}$. Le graphique ci-après est la courbe représentative de cette fonction telle que l'affiche une calculatrice dans un repère orthogonal.



- Quelle conjecture pourrait-on faire concernant le sens de variation de f sur l'intervalle $[-3; 2]$ en observant cette courbe ?
Dans la suite du problème, on va s'intéresser à la validité de cette conjecture.
- Calculer $f'(x)$ et vérifier que $f'(x) = xg(x)$ où $g(x) = 1 - (x+2)e^{x-1}$ pour tout x de $\mathbb{R}$.
Pour la suite, on admet que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note g' sa fonction dérivée.
- Étude du signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .
 - Calculer les limites respectives de $g(x)$ quand x tend vers $+\infty$ et quand x tend vers $-\infty$.
On pourra utiliser (en la démontrant) l'égalité : $g(x) = 1 - \frac{xe^x + 2e^x}{e}$.
 - Calculer $g'(x)$ et étudier son signe suivant les valeurs du nombre réel x .
 - En déduire le sens de variation de la fonction g puis dresser son tableau de variation en y reportant les limites déterminées précédemment.
 - Montrer que l'équation $g(x) = 0$ possède une unique solution dans $\mathbb{R}$. On note α cette solution.
On admet que $0,20 < \alpha < 0,21$.
 - Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .
- Sens de variation de la fonction f
 - Étudier le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x .
 - En déduire le sens de variation de la fonction f .
 - Que pensez-vous de la conjecture de la question 1 ?