

Épisode II : Espaces vectoriels et applications linéaires

EXERCICE 1

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et V une partie de E . Vérifier que si $0_E \notin V$, alors V n'est pas un sev de E .

EXERCICE 2

On donne ci-dessous des exemples d'espace vectoriel E sur \mathbb{K} ainsi que des vecteurs v, v_1, v_2, \dots, v_n de E . Dire à chaque fois s'il est possible d'écrire v comme combinaison linéaire des v_i .

- $E = \mathbb{R}^3$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $v = (-6, -17, 17)$, $v_1 = (2, 1, 3)$, $v_2 = (3, 5, -2)$.
- $E = \mathbb{R}^3$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $v = (4, -1, 1)$, $v_1 = (0, 1, 1)$, $v_2 = (2, 0, -1)$, $v_3 = (2, 1, 1)$.
- $E = \mathbb{C}^2$, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $v = (1 + 2i, 3 - 4i)$, $v_1 = (i, 0)$, $v_2 = (0, i)$.
- $E = \mathbb{C}^2$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $v = (1 + 2i, 3 - 4i)$, $v_1 = (i, 0)$, $v_2 = (0, i)$.

EXERCICE 3

Montrer que les sous ensembles suivants sont des sev de \mathbb{R}^3 (on utilisera deux méthodes pour A et B) :

- $A = \{(0, y, 0), y \in \mathbb{R}\}$.
- $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + 3z = 0\}$.
- $C = \{(0, y, 0), y \in \mathbb{R}\} \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + 3z = 0\}$.

EXERCICE 4

Les ensembles suivants sont-ils des espaces vectoriels ?

- $D = \{(x + y, x - y, 2y) / (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$
- $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + 2y - 3z = 0\}$
- $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0 \text{ et } 2x - y + z = 0\}$
- $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 - y^2 = 0\}$
- $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + 2y - 3z = 1\}$
- $I = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + a = 0 \text{ et } x + 3az = 0\}$ (discuter suivant les valeurs du réel a)

EXERCICE 5

Les familles suivantes sont-elles libres dans \mathbb{R}^3 ?

- (u, v) avec $u = (1, 2, 3)$ et $v = (-1, 4, 6)$.
- (u, v, w) avec $u = (1, 2, -1)$, $v = (1, 0, 1)$ et $w = (-1, 2, -3)$.
- (u, v, w, z) avec $u = (1, 2, 3)$, $v = (5, 6, 7)$, $w = (9, 10, 11)$ et $z = (13, 14, 15)$.

EXERCICE 6

On considère dans \mathbb{R}^3 les vecteurs $v_1 = (1, 1, 0)$, $v_2 = (4, 1, 4)$ et $v_3 = (2, -1, 4)$.

- Montrer que la famille (v_1, v_2) est libre. Faire de même pour (v_1, v_3) , puis pour (v_2, v_3) .
- La famille (v_1, v_2, v_3) est-elle libre ?

EXERCICE 7

Les systèmes suivants forment-ils des bases de \mathbb{R}^3 ?

$$S_1 = \{(1, -1, 0), (2, -1, 2)\}.$$

$$S_2 = \{(1, -1, 0), (2, -1, 2), (1, 0, a)\} \text{ avec } a \text{ réel (on discutera suivant la valeur de } a).$$

$$S_3 = \{(1, 1, 3), (3, 4, 5), (-2, 5, 7), (8, -1, 9)\}.$$

EXERCICE 8

Déterminer une base et la dimension des sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^3 suivants :

$$1. E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 2x + y - z = 0\}$$

$$2. E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 2x = 0 \text{ et } 3y - z = 0\}$$

$$3. E_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - z = 0 \text{ et } 3y - z = 0\}$$

EXERCICE 9

Montrer que les vecteurs $u_1 = (0, 1, 1)$, $u_2 = (1, 0, 1)$ et $u_3 = (1, 1, 0)$ forment une base de \mathbb{R}^3 .

Trouver dans cette base les coordonnées du vecteur $u = (1, 1, 1)$.

EXERCICE 10

Soient $V_1 = Vect \{(1, 2, 3), (4, 5, 6)\}$, $V_2 = Vect \{(0, 3, 6), (0, 9, 12)\}$ et $V_3 = Vect \{(0, 3, 6), (10, 11, 12)\}$.

Quelles sont les dimensions de V_1, V_2, V_3 ? V_1 est-il égal à V_3 ?

EXERCICE 11

Déterminer si les applications suivantes sont des applications linéaires :

$$1. f(x, y) = (2x - y, 3x + y)$$

$$2. f(x, y, z) = (x - y, y, x + 3y + z + 1)$$

$$3. f(x, y, z) = (x + y + z, x + z)$$

$$4. f(x, y, z) = xyz$$