

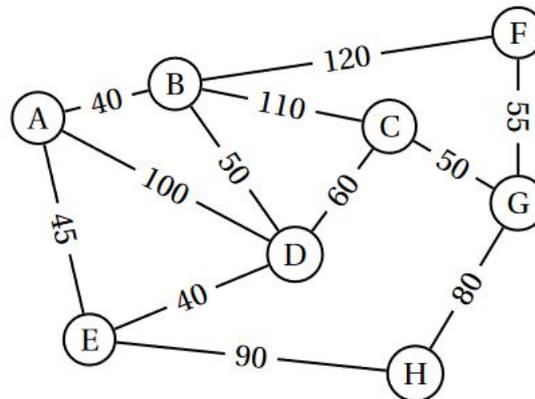
Épisode II : Plus courts chemins et arbres couvrants

1 Plus courts chemins

EXERCICE 1

Une compagnie aérienne utilise huit aéroports que l'on nomme A, B, C, D, E, F, G et H. Entre certains de ces aéroports, la compagnie propose des vols dans les deux sens. Cette situation est représentée par le graphe Γ ci-contre, dans lequel :

- les sommets représentent les aéroports,
- les arêtes représentent les liaisons assurées dans les deux sens par la compagnie,
- les arêtes sont pondérées par le coût de chaque vol, exprimé en euros.



- (a) Déterminer, en justifiant, si le graphe Γ est complet.
(b) Déterminer, en justifiant, si le graphe Γ est connexe.
- Déterminer, en justifiant, si le graphe Γ admet une chaîne eulérienne. Si oui, donner une telle chaîne.
- Donner la matrice d'adjacence M du graphe Γ en respectant l'ordre alphabétique des sommets du graphe.
- Pour la suite de l'exercice, on donne les matrices suivantes :

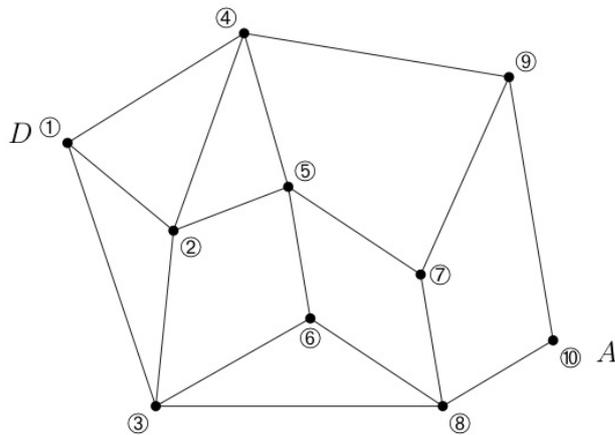
$$M^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 2 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M^3 = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 3 & 7 & 6 & 1 & 4 & 1 \\ 8 & 4 & 8 & 8 & 3 & 6 & 1 & 4 \\ 3 & 8 & 2 & 7 & 4 & 1 & 6 & 1 \\ 7 & 8 & 7 & 6 & 7 & 3 & 3 & 2 \\ 6 & 3 & 4 & 7 & 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 6 & 1 & 3 & 3 & 0 & 5 & 0 \\ 4 & 1 & 6 & 3 & 1 & 5 & 0 & 4 \\ 1 & 4 & 1 & 2 & 4 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Un voyageur souhaite aller de l'aéroport B à l'aéroport H.

- Déterminer le nombre minimal de vols qu'il doit prendre. Justifier les réponses à l'aide des matrices données ci-dessus.
 - Donner tous les trajets possibles empruntant trois vols successifs.
- Un voyageur partant de l'aéroport A doit se rendre à l'aéroport G.
En utilisant l'algorithme de Dijkstra, déterminer le trajet le moins cher.

EXERCICE 2

Un guide de randonnée en montagne décrit les itinéraires possibles autour d'un pic rocheux. La description des itinéraires est donnée par le graphe G ci-dessous. Les sommets de G correspondent aux lieux remarquables, tandis que ses arêtes représentent les sentiers reliant ces lieux.



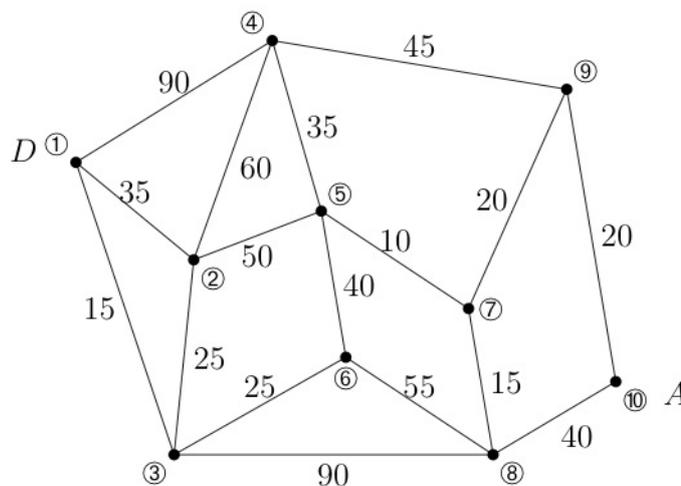
Légende :

- | | |
|-----------------------|-------------------|
| ① Départ | ② Passerelle |
| ③ Roche percée | ④ Col des 3 vents |
| ⑤ Pic rouge | ⑥ Refuge |
| ⑦ Col vert | ⑧ Pont Napoléon |
| ⑨ Cascade des anglais | ⑩ Arrivée |

1. Donner un itinéraire allant de D à A passant par tous les sommets du graphe une unique fois, mais n'empruntant pas forcément tous les sentiers.
2. Existe-t-il un itinéraire allant de D à A utilisant tous les sentiers une unique fois ?
3. Donner la matrice d'adjacence M de G , en prenant les sommets dans l'ordre croissant.
4. On donne

$$M^5 = \begin{pmatrix} 56 & 78 & 75 & 82 & 59 & 57 & 54 & 40 & 26 & 31 \\ 78 & 88 & 95 & 89 & 96 & 57 & 50 & 65 & 48 & 30 \\ 75 & 95 & 68 & 68 & 77 & 68 & 46 & 73 & 52 & 23 \\ 82 & 89 & 68 & 62 & 98 & 49 & 29 & 79 & 67 & 13 \\ 59 & 96 & 77 & 98 & 50 & 82 & 80 & 40 & 24 & 46 \\ 57 & 57 & 68 & 49 & 82 & 36 & 25 & 68 & 49 & 16 \\ 54 & 50 & 46 & 29 & 80 & 25 & 10 & 73 & 60 & 5 \\ 40 & 65 & 73 & 79 & 40 & 68 & 73 & 32 & 14 & 48 \\ 26 & 48 & 52 & 67 & 24 & 49 & 60 & 14 & 6 & 39 \\ 31 & 30 & 23 & 13 & 46 & 16 & 5 & 48 & 39 & 2 \end{pmatrix}.$$

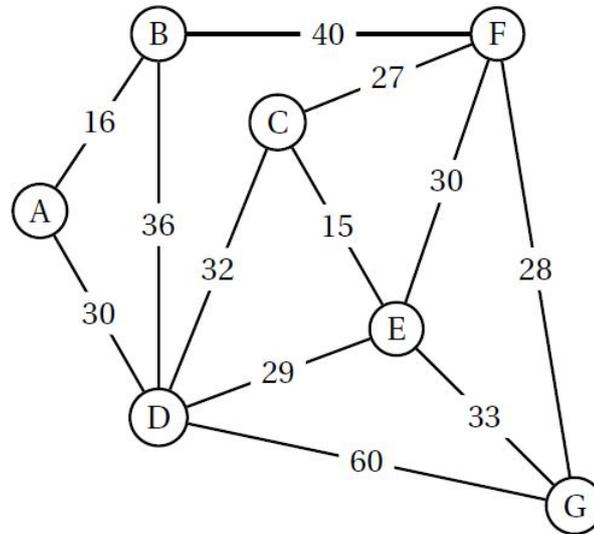
- (a) Que représente le nombre 89 situé sur la deuxième ligne et la quatrième colonne ?
 - (b) Déterminer le nombre d'itinéraires allant de D à A empruntant cinq sentiers. Citer un tel itinéraire passant par le pic rouge.
5. On a complété G ci-dessous de manière à faire apparaître le temps de parcours en minutes pour chacun des sentiers.



Déterminer l'itinéraire permettant d'aller de D à A le plus rapidement possible.

EXERCICE 3

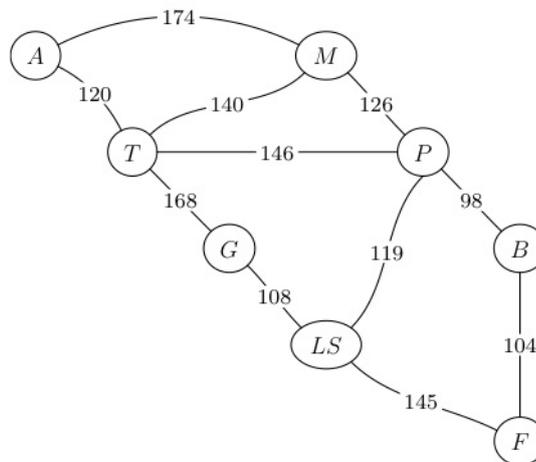
Un groupe de musiciens lycéens a décidé d'organiser un concert. À cette fin, ils souhaitent faire le tour de tous les lycées de la ville afin de distribuer des prospectus pour faire de la publicité. Sur le graphe ci-dessous, les sommets représentent les lycées de la ville, tandis que les arêtes représentent les rues reliant les établissements. Les poids des arêtes représentent les temps de trajet en minutes.



1. Existe-t-il un trajet d'un lycée à un autre permettant de parcourir toutes les rues une fois et une seule ? Si oui, donner un tel trajet, si non expliquer pourquoi.
2. Arrivé en retard au lycée A, un membre du groupe veut trouver le chemin le plus rapide pour rejoindre ses camarades au lycée G. Quel trajet peut-il prendre ? Quelle est alors la durée du parcours ?

EXERCICE 4

Un chauffeur-livreux réside en Italie dans la ville d'Aoste. Quatre fois par mois, son employeur l'envoie livrer du matériel informatique dans la ville de Florence. Le trajet en camion coûte, en carburant, 0,51€ par kilomètre. Le chauffeur dispose d'un budget mensuel de 2200€ pour son carburant. Ce qu'il réussit à économiser lui permet de toucher une prime P en fin de mois. Il consulte donc la carte routière, représentée sous la forme d'un graphe ci-dessous, pour optimiser ses trajets. Dans ce graphe, les poids sur les arêtes indiquent les distances entre différentes villes d'Italie : Aoste, Milan, Parme, Turin, Gènes, La Spezia, Bologne et Florence. Chaque ville est représentée par son initiale.

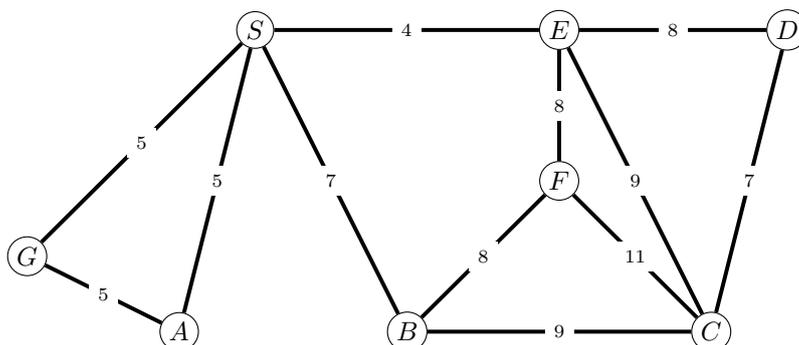


1. Déterminer le trajet le plus court entre Aoste et Florence.
2. Déterminer le budget carburant nécessaire aux quatre voyages aller-retour du mois. Le résultat sera arrondi à l'euro près. En déduire le montant de la prime P qui lui sera versée en fin de mois, à l'euro près.

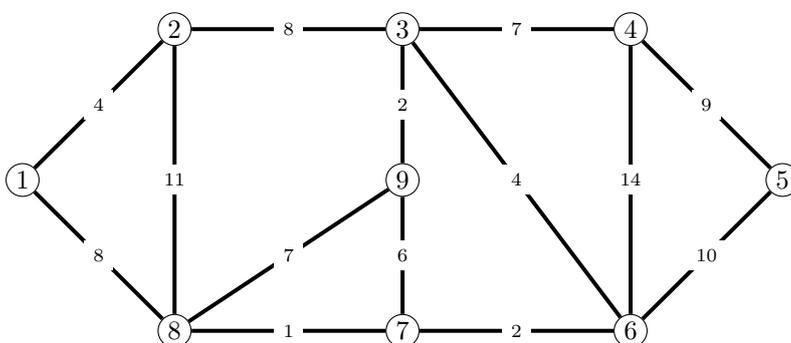
2 Arbres couvrants de poids minimum

EXERCICE 5

1. Appliquer l'algorithme de Prim au graphe ci-dessous, pour en déduire un arbre couvrant de poids minimum.

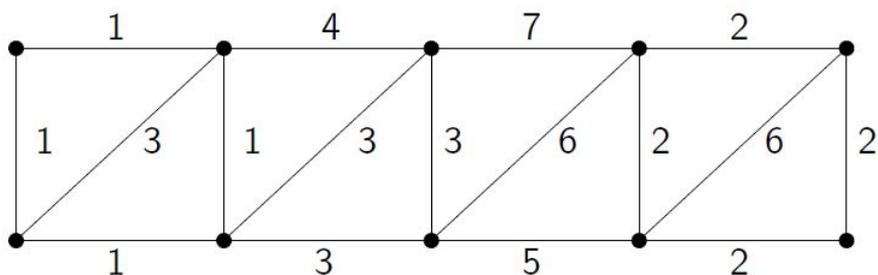


2. Appliquer l'algorithme de Kruskal au graphe ci-dessous, pour en déduire un arbre couvrant de poids minimum.



EXERCICE 6

Appliquer les algorithmes de Prim et de Kruskal au graphe ci-dessous.



EXERCICE 7

En reprenant l'énoncé de l'Exercice 3, déterminer le trajet le plus court permettant au groupe de musiciens de distribuer ses prospectus dans tous les lycées.

On partira du principe que les lycéens peuvent partir de n'importe quel lycée.