

Épisode III : Matrices

 Exercice 1

Soit u l'application linéaire (admis) de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^4 définie par

$$u(x, y, z) = (-x + y, x - y, -x + z, -y + z).$$

1. Soient $\{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3\}$ la base canonique de \mathbb{R}^3 et $\{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3, \mathcal{F}_4\}$ la base canonique de \mathbb{R}^4 . Calculer $u(\mathcal{E}_1)$, $u(\mathcal{E}_2)$ et $u(\mathcal{E}_3)$ en fonction de $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3$ et \mathcal{F}_4 .
2. Écrire la matrice de u dans les bases canoniques.
3. Montrer que $\{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, u(\mathcal{E}_1), u(\mathcal{E}_2)\}$ est une base de \mathbb{R}^4 .
4. Écrire la matrice de u dans les bases $\{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3\}$ et $\{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, u(\mathcal{E}_1), u(\mathcal{E}_2)\}$.

 Exercice 2

On considère l'application linéaire f de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^4 définie par

$$f(x, y, z) = (x + z, y - x, z + y, x + y + 2z).$$

1. Déterminer une base de $\text{Im}(f)$ et de $\text{ker}(f)$.
2. L'application f est-elle injective? surjective?

 Exercice 3

Soit S l'ensemble des solutions du système :
$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 52y + 37z = 0 \\ 31x + 1287y + 389z = 0 \end{cases}.$$

S est-il un sev de \mathbb{R}^3 ? En est-il de même pour l'ensemble des solutions de n'importe quel système linéaire?

 Exercice 4

On considère les deux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 & 1 \\ 5 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -6 & 7 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -3 & 7 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \\ 1 & 6 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer AB .
2. Calculer BA .
3. Calculer $A^2 - B^2$. Que remarque-t-on?

 Exercice 5

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que $A^2 = A + 2I_3$. En déduire que A est inversible et calculer son inverse.

Exercice 6

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. Calculer $(A + I_3)^3$. En déduire que A est inversible puis déterminer A^{-1} .

Exercice 7

Les systèmes suivants forment-ils des bases de \mathbb{R}^3 ?

- $S_1 = \{(0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0)\}$.
- $S_2 = \{(1, -1, 0), (2, -1, 2), (1, 0, a)\}$ avec a réel (on discutera suivant la valeur de a).

Exercice 8

Déterminer le rang et le déterminant des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -12 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 9

Calculer les déterminants des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 11 \\ -8 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & 15 \\ 5 & 6 & 21 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$
$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 7 \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} a & a & b & 0 \\ a & a & 0 & b \\ c & 0 & a & a \\ 0 & c & a & a \end{pmatrix}$$

Exercice 10

On appelle polynôme caractéristique d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, le polynôme

$$P_A(X) = \det(A - XI_n)$$

Déterminez le polynôme caractéristique des matrices suivantes puis en déduire leurs racines.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$
$$D = \begin{pmatrix} 3/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1/2 & 1 & 3/2 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$