

## Épisode II : Fonctions de plusieurs variables

### EXERCICE 1

Calculer les dérivées partielles premières des fonctions suivantes :

- |                                |                                 |
|--------------------------------|---------------------------------|
| 1. $4x^2y - 3xy^3 + 6x$        | 5. $e^{2x+3y}$                  |
| 2. $xy$                        | 6. $\frac{x+y}{x-y}$            |
| 3. $x(x+y)$                    | 7. $3x^2y - 7x\sqrt{y}$         |
| 4. $(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$ | 8. $(7x^3 + y^3)^{\frac{1}{3}}$ |

### EXERCICE 2

Soit  $f$  la fonction définie sur  $D = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$  par

$$f(x, y) = x^{1/3} \sqrt{y}$$

- Sur quel ensemble  $D'$ ,  $f$  est-elle de classe  $C^1$  ?
- Donner une équation du plan tangent à la surface représentant  $f$  au point de coordonnées  $(1, 1, 1)$ .  
En déduire une valeur approchée de  $f(1, 03; 0, 98)$ .
- Tracer les courbes de niveau 0, 1 et 2 de  $f$ .

### EXERCICE 3

Soit  $Q(L, K) = 4L^{1/4}K^{3/4}$  la fonction de production de Cobb-Douglas où  $L$  et  $K$  désignent respectivement les quantités de travail et capital nécessaires à la production d'un bien  $Z$ .

- Calculer le niveau de production en  $(10000; 625)$ .
- Calculer  $Q(10010; 625)$  puis  $Q(10000; 623)$ .
- Calculer  $Q(10010; 623)$ .

### EXERCICE 4

La technologie de production d'une firme est décrite par la fonction de Cobb-Douglas suivante  $y = 10x_1^{1/3}x_2^{1/2}x_3^{1/6}$ . On suppose qu'elle utilise la combinaison de facteurs suivante  $(27; 16; 64)$ .

- Quelle est la quantité produite ?
- Utilisez les éléments différentiels pour donner une valeur approchée de la nouvelle quantité produite lorsque  $x_1$  devient égal à 27, 27;  $x_2$  devient égal à 15, 8 et  $x_3$  demeure inchangé.
- Avec une calculatrice, comparez le résultat obtenu en 2. avec la "vraie" quantité produite.

### EXERCICE 5

Une fonction de production  $P$  est donnée, pour  $x$  et  $y$  strictement positifs, par :

$$P(x, y) = 4x^{1/5}y^{3/5}$$

À partir d'une valeur  $(x_0, y_0)$ , on augmente  $x$  de 5 % et on diminue  $y$  de 10 %.  
Quelle est la variation en pourcentage de  $P$  ?

### EXERCICE 6

Soit  $Q(L, K) = (4L^2 + 3K^2)^{\frac{1}{4}}$  une fonction de production où  $L$  et  $K$  désignent respectivement les quantités de travail et capital nécessaires à la production d'un bien  $Z$  (on suppose  $L > 0$  et  $K > 0$ ).

1. Calculer le niveau de production en  $(1; 2)$  puis donner une équation de cette isoquante sous la forme  $K = f(L)$ .
2. Calculer les productivités marginales du travail et du capital.  
Quelle est la valeur du TMST en un point  $(L, K)$ ?
3. Calculer les productivités marginales en  $(1; 2)$ .
4. En déduire une valeur approchée de  $Q(1,02; 1,96)$ .
5. Comment doit-on faire varier  $K$  autour de 2 pour que la production reste constante alors que  $L$  passe de 1 à 1,04?
6. Calculer les élasticités de  $Q$  par rapport à  $L$  et à  $K$  en  $(1; 2)$ .  
Si, autour de  $(1; 2)$ ,  $L$  augmente de 2 % et  $K$  diminue de 6 %, comment varie  $Q$ ?

### EXERCICE 7

On considère une fonction de Cobb-Douglas de deux variables définie par

$$f(x, y) = x^\alpha y^\beta \quad \text{pour } x > 0 \text{ et } y > 0$$

1. Calculer la matrice hessienne de  $f$  au point  $(a, b)$ . On la note  $H_f(a, b)$ .
2. Montrer que la forme quadratique définie par  $H_f(a, b)$  est :

$$q(x, y) = a^{\alpha-2} b^{\beta-2} [\alpha(\alpha-1)b^2 x^2 + \beta(\beta-1)a^2 y^2 + 2\alpha\beta abxy]$$

3. En déduire que  $f$  est concave sur  $(\mathbb{R}_+^*)^2$  si  $\begin{cases} \alpha > 0 \\ \beta > 0 \\ \alpha + \beta < 1 \end{cases}$ .

### REMARQUE

Une fonction de production de Cobb-Douglas définie sur  $(\mathbb{R}_+^*)^2$  est concave si et seulement si ses rendements d'échelle sont constants ou décroissants.

### EXERCICE 8

Soit  $f$  la fonction la fonction de production définie sur  $D' = (\mathbb{R}_+^*)^2$  par

$$f(x, y) = x^{1/3} \sqrt{y}$$

1. Montrer que  $f$  est homogène et déterminer son degré d'homogénéité.
2. Si on double les quantités  $x$  et  $y$ , comment varie la production de  $f$ ?
3. Montrer que  $f$  vérifie l'égalité d'Euler.
4. Calculer la hessienne de  $f$  au point  $(a, b) \in D'$ .
5. Montrer que la fonction  $f$  est concave sur  $D'$ .

### EXERCICE 9

Pour les fonctions suivantes, donner les points critiques, et, quand c'est possible, leur nature (max local, min local, point selle).

1.  $f(x, y) = x^4 + x^2 - 6xy + 3y^2$
2.  $g(x, y) = x^2 - 6xy + 2y^2 + 10x + 2y - 5$
3.  $h(x, y) = xy^2 + x^3y - xy$
4.  $k(x, y) = 3x^4 + 3x^2y - y^3$

### EXERCICE 10

Soit  $l(x, y, z) = x^2 + 6xy + y^2 - 3yz + 4z^2 - 10x - 5y - 21z$ .

1. Montrer que  $(2; 1; 3)$  est l'unique point critique de  $l$ .
2. Montrer que la forme quadratique définie par  $H_l(2; 1; 3)$  est :

$$q(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 + 8z^2 + 12xy - 6yz$$

3. Montrer que  $q(x, y, z) = 2(x + 3y)^2 - 16(y + \frac{3}{16}z)^2 + \frac{137}{16}z^2$ .
4. En déduire la nature du point critique.
5. Retrouver ce résultat en utilisant la méthode des mineurs diagonaux principaux.

### EXERCICE 11

Une firme fabrique un produit qu'elle vend sur deux marchés différents. Soit  $q_1$  (resp.  $q_2$ ) le nombre de produits vendus sur le premier (resp. second) marché. On suppose que les prix du produit sont donnés par les fonctions  $p_1 = 60 - 2q_1$  (pour le premier marché) et  $p_2 = 80 - 4q_2$  (pour le second marché). Le coût de production est donné par la fonction  $C = 50 + 40q$ , où  $q$  est le nombre total de produits vendus.

Calculer  $q_1$  et  $q_2$  pour que le bénéfice soit maximum.

### INDICATION

On montrera que le bénéfice est donné par la fonction  $B(q_1, q_2) = -2q_1^2 - 4q_2^2 + 20q_1 + 40q_2 - 50$ .

### EXERCICE 12

On considère la fonction  $f$  définie et de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}^2$  par :

$$f(x, y) = x^2 + 2y^2 + xy + x$$

Montrer que  $f$  admet un minimum global sur  $\mathbb{R}^2$  en un point que l'on déterminera.

### EXERCICE 13

On considère la fonction  $f$  définie et de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}^3$  par :  $f(x, y, z) = z(e^x - 1) - y^2$ .

1. Trouver les extrema locaux éventuels de  $f$ .
2. Déterminer la matrice hessienne de  $f$ .
3. Vérifier que le point de coordonnées  $(0, 0, 0)$  est un point critique de  $f$ .  
Déterminer la matrice hessienne de  $f$  au point  $(0, 0, 0)$ .
4. En utilisant la méthode des mineurs principaux, en déduire la nature du point critique  $(0, 0, 0)$ .
5. Retrouver la nature du point critique  $(0, 0, 0)$  en étudiant le signe des valeurs propres de  $H_f(0, 0, 0)$ .

### EXERCICE 14

On considère la fonction  $f$  définie et de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}^3$  par :

$$f(x, y, z) = -x^3 + \frac{2}{3}y^3 - \frac{3}{2}z^2 + 3xz - 2y - 3$$

1. Trouver les extrema locaux éventuels de  $f$ .
2. Déterminer la matrice hessienne de  $f$ .
3. En utilisant la méthode des mineurs principaux, en déduire la nature des points critiques de coordonnées  $(0, -1, 0)$  et  $(0, 1, 0)$ .
4. En étudiant le signe des valeurs propres de la matrice hessienne de  $f$  aux points  $(1, -1, 1)$  et  $(1, 1, 1)$ , déterminer la nature de ces points critiques.



### EXERCICE 15

On considère la fonction  $f$  définie et de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}^3$  par :

$$f(x, y, z) = x^2 - 2xy + 2y^2 + 2y + z^2 - 4z + 5$$

1. Trouver les extrema locaux éventuels de  $f$ .
2. Déterminer la matrice hessienne de  $f$ .
3. En utilisant la méthode des mineurs diagonaux principaux, montrer que  $f$  est convexe sur  $\mathbb{R}^3$ .  
En déduire la nature du ou des point(s) critique(s) de  $f$ .
4. Retrouver la nature du ou des point(s) critique(s) de  $f$  en montrant que pour tout  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ,  $f(x, y, z) = (x - y)^2 + (y + 1)^2 + (z - 2)^2$ .