

Épisode II : Fonctions de plusieurs variables

EXERCICE 1

Calculer les dérivées partielles premières des fonctions suivantes :

1. $4x^2y - 3xy^3 + 6x$
2. xy
3. $x(x + y)$
4. $(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$
5. e^{2x+3y}
6. $\frac{x + y}{x - y}$
7. $3x^2y - 7x\sqrt{y}$
8. $(7x^3 + y^3)^{\frac{1}{3}}$

EXERCICE 2

Soit f la fonction définie sur $D = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ par

$$f(x, y) = x^{1/3} \sqrt{y}$$

1. Sur quel ensemble D' , f est-elle de classe C^1 ?
2. Donner une équation du plan tangent à la surface représentant f au point de coordonnées $(1, 1, 1)$.
En déduire une valeur approchée de $f(1,03; 0,98)$.
3. Tracer les courbes de niveau 0, 1 et 2 de f .

EXERCICE 3

Soit $Q(L, K) = 4L^{1/4}K^{3/4}$ la fonction de production de Cobb-Douglas où L et K désignent respectivement les quantités de travail et capital nécessaires à la production d'un bien Z .

1. Calculer le niveau de production en $(10000; 625)$.
2. Calculer $Q(10010; 625)$ puis $Q(10000; 623)$.
3. Calculer $Q(10010; 623)$.

EXERCICE 4

La technologie de production d'une firme est décrite par la fonction de Cobb-Douglas suivante $y = 10x_1^{1/3}x_2^{1/2}x_3^{1/6}$. On suppose qu'elle utilise la combinaison de facteurs suivante $(27; 16; 64)$.

1. Quelle est la quantité produite ?
2. Utilisez les éléments différentiels pour donner une valeur approchée de la nouvelle quantité produite lorsque x_1 devient égal à 27, 27; x_2 devient égal à 15, 8 et x_3 demeure inchangé.
3. Avec une calculatrice, comparez le résultat obtenu en 2. avec la "vraie" quantité produite.

EXERCICE 5

Une fonction de production P est donnée, pour x et y strictement positifs, par :

$$P(x, y) = 4x^{1/5}y^{3/5}$$

À partir d'une valeur (x_0, y_0) , on augmente x de 5 % et on diminue y de 10 %.
Quelle est la variation en pourcentage de P ?

EXERCICE 6

Soit $Q(L, K) = (4L^2 + 3K^2)^{\frac{1}{4}}$ une fonction de production où L et K désignent respectivement les quantités de travail et capital nécessaires à la production d'un bien Z (on suppose $L > 0$ et $K > 0$).

1. Calculer le niveau de production en $(1; 2)$ puis donner une équation de cette isoquante sous la forme $K = f(L)$.
2. Calculer les productivités marginales du travail et du capital. Quelle est la valeur du TMST en un point (L, K) ?
3. Calculer les productivités marginales en $(1; 2)$.
4. En déduire une valeur approchée de $Q(1,02; 1,96)$.
5. Comment doit-on faire varier K autour de 2 pour que la production reste constante alors que L passe de 1 à 1,04?
6. Calculer les élasticités de Q par rapport à L et à K en $(1; 2)$.
Si, autour de $(1; 2)$, L augmente de 2 % et K diminue de 6 %, comment varie Q ?

EXERCICE 7

On considère une fonction de Cobb-Douglas de deux variables définie par

$$f(x, y) = x^\alpha y^\beta \quad \text{pour } x > 0 \text{ et } y > 0$$

1. Calculer la matrice hessienne de f au point (a, b) . On la note $H_f(a, b)$.
2. Montrer que la forme quadratique définie par $H_f(a, b)$ est :

$$q(x, y) = a^{\alpha-2} b^{\beta-2} [\alpha(\alpha-1)b^2 x^2 + \beta(\beta-1)a^2 y^2 + 2\alpha\beta abxy]$$

3. En déduire que f est concave sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ si $\begin{cases} \alpha > 0 \\ \beta > 0 \\ \alpha + \beta < 1 \end{cases}$.

REMARQUE

Une fonction de production de Cobb-Douglas définie sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ est concave si et seulement si ses rendements d'échelle sont constants ou décroissants.

EXERCICE 8

Soit f la fonction la fonction de production définie sur $D' = (\mathbb{R}_+^*)^2$ par

$$f(x, y) = x^{1/3} \sqrt{y}$$

1. Montrer que f est homogène et déterminer son degré d'homogénéité.
2. Si on double les quantités x et y , comment varie la production de f ?
3. Montrer que f vérifie l'égalité d'Euler.
4. Calculer la hessienne de f au point $(a, b) \in D'$.
5. Montrer que la fonction f est concave sur D' .

EXERCICE 9

Pour les fonctions suivantes, donner les points critiques, et, quand c'est possible, leur nature (max local, min local, point selle).

1. $f(x, y) = x^4 + x^2 - 6xy + 3y^2$
2. $g(x, y) = x^2 - 6xy + 2y^2 + 10x + 2y - 5$
3. $h(x, y) = xy^2 + x^3y - xy$
4. $k(x, y) = 3x^4 + 3x^2y - y^3$

EXERCICE 10

Soit $l(x, y, z) = x^2 + 6xy + y^2 - 3yz + 4z^2 - 10x - 5y - 21z$.

1. Montrer que $(2; 1; 3)$ est l'unique point critique de l .
2. Montrer que la forme quadratique définie par $H_l(2; 1; 3)$ est :

$$q(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 + 8z^2 + 12xy - 6yz$$

3. Montrer que $q(x, y, z) = 2(x + 3y)^2 - 16(y + \frac{3}{16}z)^2 + \frac{137}{16}z^2$.
4. En déduire la nature du point critique.
5. Retrouver ce résultat en utilisant la méthode des mineurs diagonaux principaux.

EXERCICE 11

Une firme fabrique un produit qu'elle vend sur deux marchés différents. Soit q_1 (resp. q_2) le nombre de produits vendus sur le premier (resp. second) marché. On suppose que les prix du produit sont donnés par les fonctions $p_1 = 60 - 2q_1$ (pour le premier marché) et $p_2 = 80 - 4q_2$ (pour le second marché). Le coût de production est donné par la fonction $C = 50 + 40q$, où q est le nombre total de produits vendus.

Calculer q_1 et q_2 pour que le bénéfice soit maximum.

INDICATION

On montrera que le bénéfice est donné par la fonction $B(q_1, q_2) = -2q_1^2 - 4q_2^2 + 20q_1 + 40q_2 - 50$.

EXERCICE 12

On considère la fonction f définie et de classe C^∞ sur \mathbb{R}^2 par :

$$f(x, y) = x^2 + 2y^2 + xy + x$$

Montrer que f admet un minimum global sur \mathbb{R}^2 en un point que l'on déterminera.

EXERCICE 13

On considère la fonction f définie et de classe C^∞ sur \mathbb{R}^3 par : $f(x, y, z) = z(e^x - 1) - y^2$.

1. Trouver les extrema locaux éventuels de f .
2. Déterminer la matrice hessienne de f .
3. Vérifier que le point de coordonnées $(0, 0, 0)$ est un point critique de f .
Déterminer la matrice hessienne de f au point $(0, 0, 0)$.
4. En utilisant la méthode des mineurs principaux, en déduire la nature du point critique $(0, 0, 0)$.
5. Retrouver la nature du point critique $(0, 0, 0)$ en étudiant le signe des valeurs propres de $H_f(0, 0, 0)$.

EXERCICE 14

On considère la fonction f définie et de classe C^∞ sur \mathbb{R}^3 par :

$$f(x, y, z) = -x^3 + \frac{2}{3}y^3 - \frac{3}{2}z^2 + 3xz - 2y - 3$$

1. Trouver les extrema locaux éventuels de f .
2. Déterminer la matrice hessienne de f .
3. En utilisant la méthode des mineurs principaux, en déduire la nature des points critiques de coordonnées $(0, -1, 0)$ et $(0, 1, 0)$.
4. En étudiant le signe des valeurs propres de la matrice hessienne de f aux points $(1, -1, 1)$ et $(1, 1, 1)$, déterminer la nature de ces points critiques.



EXERCICE 15

On considère la fonction f définie et de classe C^∞ sur \mathbb{R}^3 par :

$$f(x, y, z) = x^2 - 2xy + 2y^2 + 2y + z^2 - 4z + 5$$

1. Trouver les extrema locaux éventuels de f .
2. Déterminer la matrice hessienne de f .
3. En utilisant la méthode des mineurs diagonaux principaux, montrer que f est convexe sur \mathbb{R}^3 .
En déduire la nature du ou des point(s) critique(s) de f .
4. Retrouver la nature du ou des point(s) critique(s) de f en montrant que pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (x - y)^2 + (y + 1)^2 + (z - 2)^2$.