

T.D. n° 4 : Polynômes

Exercice 1

Effectuer les divisions euclidiennes suivantes :

1. $A(x) = 2x^6 - x^5 + 3x^3 - 2x + 4$ par $B(x) = x + 4$.
2. $A(x) = x^8$ par $B(x) = x^4 + x^2 + 1$.
3. $A(x) = x^5 - x^4 - 3x^3 + 5x - 10$ par $B(x) = x^3 + 2$.

Exercice 2

Soient les polynômes $P(x) = 6x^5 - 14x^4 + 11x^3 - 17x^2 + ax + b$ et $Q(x) = 2x^2 + 1$, où a et b sont des nombres réels.

Déterminer les valeurs de a et b de sorte que $Q(x)$ divise $P(x)$.

Exercice 3

1. Montrer que le polynôme $D(x) = x + 1$ divise le polynôme $P(x) = x^5 + 1$, et déterminer le quotient de $P(x)$ par $D(x)$.
2. Même question avec $D(x) = x^2 - 1$ et $P(x) = x^8 - 1$. Quelles sont les racines de $P(x)$?

Exercice 4

Calculer le reste de la division euclidienne de $P(x) = x^n + x + 1$ par $(x - 1)^2$ (où n est un entier supérieur ou égal à 2).

Exercice 5

Soit P un polynôme tel que le reste de la division de $P(x)$ par $x + 1$ est 2 et le reste de la division de $P(x)$ par $x - 1$ est -4 .

Quel est le reste de la division de $P(x)$ par $x^2 - 1$?

Exercice 6

Factoriser les polynômes suivants.

1. $P_1(x) = 3x^3 + x^2$. En déduire la factorisation de $P_2(x) = 3x^3 + x^2 + 3x + 1$.
2. $P_3(x) = x^4 - 6x^2 + 8$.
3. $P_4(x) = x^4 - x^2 - 12$.
4. $P_5(x) = -2x^3 - 3x^2 + 12x + 20$ (vérifier que -2 est une racine).

Exercice 7

Déterminer le polynôme produit des polynômes $P_1(x) = x^2 - ax + 1$ et $P_2(x) = x^2 + ax + 1$. En déduire la factorisation du polynôme $P(x) = x^4 + 1$.

Exercice 8

Déterminer l'ordre des racines des polynômes suivants :

1. $P_1(x) = x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1$.
2. $P_2(x) = x^4 - 6x^2 + 8x - 3$.

Exercice 9

a et b étant deux nombres réels, déterminer tous les polynômes de la forme :

$$P(x) = 3x^5 - 10x^3 + ax + b$$

ayant une racine d'ordre 3.

Exercice 10

Soit le polynôme $P(x) = 5x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 2x + 1$. À l'aide l'algorithme de Horner, calculer $P(5)$.
Même question avec le polynôme $P(x) = x^5 + 3x^3 - 2x^2 + 4x - 10$ à évaluer en -4 .

Exercice 11

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Si elles sont vraies, les démontrer, si elles sont fausses, donner un contre-exemple.

1. Si un polynôme est de degré 3, alors son carré est de degré 9.
2. Un polynôme admet toujours une racine réelle.
3. Le polynôme P défini par $P(x) = x^5 + x^4 + 7x + 1$ a une racine positive.
4. Le polynôme P défini par $P(x) = x^5 + x^3 + x + 1$ a une racine positive.
5. Deux polynômes qui ont les mêmes racines sont égaux.
6. Si a est une racine de deux polynômes R et S , alors $x - a$ divise $R(x) - S(x)$.