Épisode I : Programmation linéaire - Correction

Exercice 1

Un agriculteur produit des concombres et des oignons. Son objectif est d'en produire un maximum (en terme de poids). Le rendement des concombres est de $4\ Kg/m^2$ et celui des oignons est de $5\ Kg/m^2$. Afin d'augmenter la production, l'agriculteur utilise deux types de fertilisants A et B. L'agriculteur dispose de 8 litres de fertilisants A et de 7 litres de fertilisants B. Concernant le fertilisant A, il en utilise $2\ L/m^2$ pour les concombres et $1\ L/m^2$ pour les oignons. Pour le fertilisant B, il en utilise $1\ L/m^2$ pour les concombres et $2\ L/m^2$ pour les oignons. Pour lutter contre les parasites il dispose de 3 litres d'anti-parasites qu'il utilise pour protéger les oignons et qu'il répartit en $1\ L/m^2$.

1. Modéliser ce problème en programme linéaire.
2. Résoudre ce problème à l'aide du Solver.

Solution

Variables de décision *(en m^2)*

x_c *surface de concombres*

x_o *surface d'oignons*

Fonction objectif : $\max 4x_c + 5x_o$

Contraintes

$$\begin{array}{rcrcl} 2x_c & + & x_o & \leq & 8 \\ x_c & + & 2x_o & \leq & 7 \\ x_o & & & \leq & 3 \\ x_c, & & x_o & \geq & 0 \end{array}$$

La solution optimale : 3, 2 de valeur 22.

Exercice 2

Une entreprise fabrique deux types de parfum, P1 et P2, qui rapportent respectivement 300 euros et 500 euros par litre. Les parfums sont obtenus à partir de trois types d'essence A, B et C. L'état du stock et les quantités nécessaires à la fabrication d'un litre de chaque parfum sont donnés dans le tableau ci-dessous :

	Essence de type A (en litres)	Essence de type B (en litres)	Essence de type C (en litres)	Profit (en €/ litre)
Parfum P1	1	0	3	300
Parfum P2	0	2	2	500
Stocks	4	12	18	

Par exemple, pour fabriquer un litre de parfum P1 on a besoin d'un litre d'essence A et de trois litres d'essence C. L'objectif est de maximiser le profit.

1. Modéliser ce problème en programme linéaire.
2. Résoudre ce problème à l'aide du Solver.

Solution

Variables de décision *(litres)*

x_1 *quantité de parfum* P_1

x_2 *quantité de parfum* P_2

Objectif

$\max 300x_1 + 500x_2$

Contraintes

$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & & & \leq & 4 \\ & & 2x_2 & \leq & 12 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 18 \\ x_1, & & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

La solution optimale : 2, 6 de valeur 3600.

Exercice 3

Une famille consomme six types d'aliments qui sont source d'apports en vitamine A et C. Le tableau ci-dessous indique le nombre d'unités de vitamines par Kg de produit, la demande minimale d'apport en vitamines et le prix au Kg de chaque aliment. L'objectif est de minimiser le coût total.

	Aliment 1 (en u/Kg)	Aliment 2 (en u/Kg)	Aliment 3 (en u/Kg)	Aliment 4 (en u/Kg)	Aliment 5 (en u/Kg)	Aliment 6 (en u/Kg)	Demande (en unités)
Vitamine A	1	0	2	2	1	2	9
Vitamine C	0	1	3	1	3	2	19
Prix au Kg	35	30	60	50	27	22	

1. Modéliser ce problème en programme linéaire.
2. Résoudre ce problème à l'aide du Solver.

Solution

Variables de décision *(en Kg)*

x_i *quantité d'aliment* i

Objectif

$\min 35x_1 + 30x_2 + 60x_3 + 50x_4 + 27x_5 + 22x_6$

Contraintes

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcr} x_1 & & & + & 2x_3 & + & 2x_4 & + & x_5 & + & 2x_6 & \leq & 9 \\ & & x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & + & 3x_5 & + & 2x_6 & \leq & 19 \\ x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5, & & x_6 & \geq & 0 \end{array}$$

La solution optimale : 0, 0, 0, 0, 5, 2 de valeur 179.

Exercice 4

Production de vins (G. Finke)

Dans une distillerie américaine on produit trois sortes de vin allemands authentiques : Heidelberg sweet, Heidelberg regular et Deutschland extra dry. Les produits de base, la main d'œuvre et le profit par gallon sont indiqués dans le tableau ci-dessous.

	raisin - type A (boisseau)	raisin - type B (boisseau)	sucre (kg)	main d'œuvre (heures)	profit (€)
Heidelberg sweet	1	1	2	2	10
Heidelberg regular	2	0	1	3	12
Deutschl. extra dry	0	2	0	1	20

La distillerie possède 150 boisseaux de raisin de type A, 150 boisseaux de raisin de type B, 80 kg de sucre et peut fournir 225 heures de travail.

Quelles quantités faut-il produire de ces trois vins pour obtenir un profit maximum ?
Formuler comme programme linéaire.

Solution

Variables de décision *(en gallons)*

x_{HS} *quantité de Heidelberg sweet*
x_{HR} *quantité de Heidelberg regular*
x_D *quantité de Deutschl. extra dry*

Objectif

$$\max 10x_{HS} + 12x_{HR} + 20x_D$$

Contraintes

$$\begin{array}{rcrcrcr}
x_{HS} & + & 2x_{HR} & & & \leq & 150 \\
x_{HS} & & & + & 2x_D & \leq & 150 \\
2x_{HS} & + & x_{HR} & & & \leq & 80 \\
2x_{HS} & + & 3x_{HR} & + & x_D & \leq & 225 \\
x_{HS}, & & x_{HR}, & & x_D & \geq & 0
\end{array}$$

La solution optimale : 0, 50, 75 de valeur 2100.

Exercice 5

Compagnie aérienne (traduit de Hillier et Lieberman)
Une compagnie aérienne, en pleine expansion, est en train d'organiser son service clientèle et a besoin de savoir le nombre d'employés dont elle aura besoin pour les prochaines années. L'équipe RO doit donc étudier les besoins pour déterminer le nombre minimum de personnel nécessaire afin de satisfaire les demandes des clients. Basé sur l'ordonnancement des vols, un nouveau planning du personnel est préparé pour les différents créneaux horaires de la journée. Les informations nécessaires pour la planification sont données dans le tableau suivant.

	Créneaux couverts					
Créneaux	poste 1	poste 2	poste 3	poste 4	poste 5	Nb min pers
6h-8h	x					48
8h-10h	x	x				79
10h-12h	x	x				65
12h-14h	x	x	x			87
14h-16h		x	x			64
16h-18h			x	x		73
18h-20h			x	x		82
20h-22h				x		43
22h-24h				x	x	52
24h-6h					x	15
Coût/1j,1p	170 €	160 €	175 €	180 €	195 €	

Chaque employé doit travailler 8h par jour et 5 jours par semaine. Les postes autorisés comprennent les créneaux suivants (montré aussi dans le tableau par des croix) :

Poste 1 : 6h à 14h   Poste 2 : 8h à 16h   Poste 3 : 12h à 20h
Poste 4 : 16h à 24h   Poste 5 : 22h à 6h

Pour chaque poste, le coût associé est donné dans la dernière ligne du tableau (Coût/1j,1p : Coût pour une journée, pour une personne). La question est de savoir combien d'employés il faut affecter dans chaque poste, chaque jour, afin de minimiser le coût total du personnel et en respectant le nombre minimum du personnel nécessaire (dernière colonne dans le tableau).

Modéliser ce problème en programme linéaire. Trouver les contraintes redondantes.

Solution

Variables de décision x_i *nombre de personnes sur le poste* $i = 1, 2, 3, 4, 5$.
Contraintes : satisfaire la contrainte sur le nombre minimum d'agents présents

$$\begin{array}{llllllr}
x_1 & & & & & \geq 48 & (6h-8h) \\
x_1 & +x_2 & & & & \geq 79 & (8h-10h) \\
x_1 & +x_2 & & & & \geq 65 & (10h-12h) \\
x_1 & +x_2 & +x_3 & & & \geq 87 & (12h-14h) \\
 & x_2 & +x_3 & & & \geq 64 & (14h-16h) \\
 & & x_3 & +x_4 & & \geq 73 & (16h-18h) \\
 & & x_3 & +x_4 & & \geq 82 & (18h-20h) \\
 & & & x_4 & & \geq 43 & (20h-22h) \\
 & & & x_4 & +x_5 & \geq 52 & (22h-24h) \\
 & & & & x_5 & \geq 15 & (24h-6h)
\end{array}$$

et ne pas oublier les contraintes de non négativité $x_i \geq 0$ *pour* $i = 1, 2, 3, 4, 5$.

Objectif $\min z = 170x_1 + 160x_2 + 175x_3 + 180x_4 + 195x_5$.

Il peut exister des contraintes redondantes pendant la modélisation... Ici $x_1 + x_2 \geq 65$ *est moins fort que* $x_1 + x_2 \geq 79$ *et* $x_3 + x_4 \geq 73$ *est moins fort que* $x_3 + x_4 \geq 82$. *La non-négativité des variables* x_1, x_4 *et* x_5 *est également inutile. Mais il n'est pas utile d'enlever les contraites redondantes qui peuvent parfois aider à la résolution (coupes).*
La solution optimale est $(48, 31, 39, 43, 15)$ *avec un objectif* $z = 30\,610$. *Ici, on obtient une solution entière même sans avoir imposé des variables entières.*
Parfois, (totalement unimodularité) même si on n'impose pas les variables de décisions entières, elles sont entières dans la solution optimale. Normalement le nombre de personnels est entier, mais la matrice des contraintes fait qu'on n'a pas forcément besoin de le dire... Juste en 2 mots... on peut leur rappeler lors d'un prochaine TD sur le PLNE...

Exercice 6

Une usine fabrique deux produits P_1 et P_2. Le marché est porteur et toute la production de la semaine sera vendue. Chacun des ces produits demande des heures de fabrications sur les machines A, B, et C comme indiqué dans le tableau ci-dessous

	A	B	C
P_1	2h	0h	1h
P_2	3h	1h	0h
Disponibilité totale de chaque machine	18h	3h	5h

Les marges brutes de chaque produit sont respectivement :
- $M_1 = 1000$ euros
- $M_2 = 2000$ euros

1. Donner une formalisation du problème dans l'optique de maximiser le gain obtenu par la vente des deux produits tout en tenant compte des contraintes de fabrication.
2. Fournir une solution graphique.
3. L'entreprise souhaite investir dans l'achat d'une nouvelle machine.
4. Que lui conseillez-vous ?

Solution

Variables de décision :
x_1 *quantité de produit* P_1
x_2 *quantité de produit* P_2
La fonction objectif est :
$\max z = 1000x_1 + 2000x_2$
sous contraintes :

$$
\begin{array}{rcrcl}
2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 18 \\
 & & x_2 & \leq & 3 \\
x_1 & & & \leq & 5 \\
x_1, & & x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

La solution optimale : 4.5, 3 de valeur 10 500 (en considérant que x_1 et x_2 ne sont pas forcément des entiers).