

Mise à niveau en algèbre et analyse

Hervé Hocquard

3 septembre 2021

Table des matières

1	Les nombres complexes	4
1.1	Introduction	5
1.1.1	Propriétés immédiates	5
1.1.2	Valeurs particulières	6
1.1.3	Les ensembles de nombres : rappels	6
1.2	Les nombres complexes	7
1.2.1	Définition	7
1.3	Représentation graphique	8
1.4	Opérations sur les nombres complexes	8
1.4.1	Addition et multiplication	8
1.4.2	Inverse d'un nombre complexe non nul	8
1.5	Nombre conjugué	9
1.6	Nombre conjugué	10
1.7	Module d'un nombre complexe	11
1.8	Argument d'un nombre complexe non nul	12
1.9	Écriture trigonométrique	13
1.10	Forme exponentielle d'un nombre complexe non nul	14
1.11	Formule de MOIVRE	15
1.12	Formules d'EULER	15
1.13	Résolution dans \mathbb{C} d'équations du second degré à coefficients réels	16
1.14	Racines $n^{\text{èmes}}$	16
1.15	Exercices	17
2	Systèmes d'équations linéaires-Matrices	18
2.1	Résolution des systèmes linéaires	19
2.1.1	Notations et vocabulaire	19
2.1.2	Opérations élémentaires	19
2.1.3	Matrices à lignes échelonnées	19
2.1.4	Application aux systèmes	20
2.2	Matrices	21
2.2.1	Notations	21
2.2.2	Somme de deux matrices et produit d'une matrice par un réel	21
2.2.3	Produit de deux matrices	21
2.2.4	Opérations par blocs	22
2.2.5	Transposition	22
2.2.6	Inversion	23
2.3	Exercices	24
3	Notions sur les équations de récurrence linéaire à coefficients constants	29
3.1	Généralités	30
3.1.1	Définitions	30
3.1.2	Propriété fondamentale	30
3.2	Cas de l'ordre 1	31
3.3	Cas de l'ordre 2	31
3.3.1	Résolution de l'équation homogène (EH)	31
3.3.2	Solutions particulières	32
3.4	Notion de stabilité	32
3.4.1	Définitions	32
3.4.2	Un premier résultat	33
3.5	Exercices	34

4	Notions sur les équations différentielles	36
4.1	Équations différentielles linéaires d'ordre 1 à coefficients constants	37
4.1.1	Résolution de l'équation homogène	37
4.1.2	Résolution de l'équation complète	37
4.2	Équations différentielles d'ordre 2 à coefficients constants	38
4.2.1	Résolution de l'équation homogène	38
4.2.2	Résolution de l'équation complète	38
4.3	Notion de stabilité	39
4.3.1	Equation différentielle d'ordre 1	39
4.3.2	Equation différentielle d'ordre 2	39
4.4	Équations différentielles d'ordre un à coefficients non constants	40
4.4.1	Cas linéaire	40
4.4.2	Équation de Bernoulli	40
4.5	Exercices	41
5	Espaces vectoriels	43
5.1	Espaces vectoriels-Sous espaces vectoriels	44
5.1.1	Espaces vectoriels	44
5.1.2	Sous-espaces vectoriels	44
5.2	Bases des espaces vectoriels	46
5.2.1	Familles génératrices, familles libres	46
5.2.2	Bases	46
5.3	Applications linéaires	47
5.4	Exercices	49
6	Rang et déterminant des matrices	51
6.1	Rang des matrices	52
6.1.1	Espace des lignes-Espace des colonnes	52
6.1.2	Rang et inversibilité	53
6.1.3	Rang et systèmes linéaires	54
6.2	Déterminant des matrices carrées	55
6.2.1	Définition et propriétés	55
6.2.2	Calcul du déterminant	56
6.3	Exercices	56
7	Applications linéaires	59
7.1	Définition et premières propriétés	60
7.1.1	Notion d'application linéaire	60
7.1.2	Applications linéaires et sous espaces vectoriels	60
7.1.3	Composition	61
7.2	Applications linéaires en dimension finie	61
7.2.1	Applications linéaires et bases	61
7.2.2	Théorème du rang (ou des dimensions)	62
7.2.3	Quelques notions sur les formes linéaires	63
7.3	Matrices et applications linéaires	64
7.3.1	Définitions et opérations	64
7.3.2	Changement de base	65
7.4	Exercices	66
8	Projections	68
8.1	Endomorphismes idempotents	69
8.2	Cas particulier de \mathbb{R}^n - Projections orthogonales	69
8.2.1	Produit scalaire	69
8.2.2	Projections orthogonales	71
8.3	Exercices	72
9	Notions de calcul différentiel	74
9.1	Notion de topologie sur \mathbb{R}^n	75
9.1.1	Normes-Distances	75
9.1.2	Suites convergentes dans \mathbb{R}^n	75
9.1.3	Ouverts-Fermés	76
9.1.4	Ensembles convexes-Fonctions convexes	76
9.2	Différentiabilité des fonctions de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}	77
9.2.1	Différentielle d'une fonction de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}	77
9.2.2	Formules de Taylor pour une fonction de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}	79
9.2.3	Différentiabilité et convexité	80

9.3	Fonctions de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^m	80
9.3.1	Différentielles-Jacobiennes	80
9.3.2	Les fonctions implicites	82
9.3.3	Fonction réciproque	82
9.4	Exercices	83
10	Diagonalisation	85
10.1	Rappels : changement de base	86
10.2	Vecteurs propres-Sous espaces propres	86
10.3	Polynôme caractéristiques-Endomorphismes diagonalisables	87
10.3.1	Polynôme caractéristique	87
10.3.2	Diagonalisation	88
10.3.3	Forme réduite	90
10.3.4	Forme de Jordan	90
10.3.5	Théorème de Cayley-Hamilton	90
10.4	Application au calcul des puissances d'une matrice	91
10.4.1	Utilisation du théorème de Cayley-Hamilton	91
10.4.2	Utilisation d'une forme réduite	91
10.5	Exercices	92
11	Fonctions homogènes, concaves et convexes	95
11.1	Introduction	96
11.2	Fonctions homogènes en économie	96
11.3	Fonctions d'une variable : Rappels	97
11.4	Passage à la dimension n	98
11.5	Formes quadratiques et matrices symétriques	99
11.6	Hessienne et fonctions concaves ou convexes	99
11.7	Etude du signe d'une forme quadratique	100
11.8	Exercices	101
12	Optimisation des fonctions de plusieurs variables	102
12.1	Extrema locaux et globaux	103
12.1.1	Introduction	103
12.1.2	Théorème des extrema globaux sur un compact	103
12.1.3	Condition nécessaire d'extremum local	103
12.2	Extrema et Hessienne	105
12.3	Extrema globaux et convexité	107
12.3.1	Résumons la marche à suivre	107
12.4	Exercices	108

Chapitre 1

Les nombres complexes

Contenu

1.1	Introduction	5
1.1.1	Propriétés immédiates	5
1.1.2	Valeurs particulières	6
1.1.3	Les ensembles de nombres : rappels	6
1.2	Les nombres complexes	7
1.2.1	Définition	7
1.3	Représentation graphique	8
1.4	Opérations sur les nombres complexes	8
1.4.1	Addition et multiplication	8
1.4.2	Inverse d'un nombre complexe non nul	8
1.5	Nombre conjugué	9
1.6	Module d'un nombre complexe	10
1.7	Argument d'un nombre complexe non nul	11
1.8	Écriture trigonométrique	12
1.9	Forme exponentielle d'un nombre complexe non nul	13
1.10	Formule de MOIVRE	14
1.11	Formules d'EULER	15
1.12	Résolution dans \mathbb{C} d'équations du second degré à coefficients réels	16
1.13	Racines $n^{\text{èmes}}$	16
1.14	Exercices	17

1.1 Introduction



Définition 1

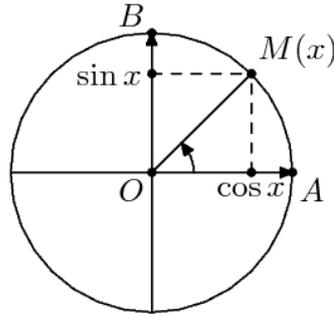
Soit $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormal direct et soit \mathcal{C} le cercle trigonométrique de centre O .

A et B sont les points tels que $\vec{OA} = \vec{i}$ et $\vec{OB} = \vec{j}$.

Pour tout réel x , il existe un unique point M de \mathcal{C} tel que x soit une mesure de l'angle (\vec{i}, \vec{OM}) .

$\cos x$ est l'abscisse de M dans $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

$\sin x$ est l'ordonnée de M dans $(O; \vec{i}, \vec{j})$.



1.1.1 Propriétés immédiates

Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$-1 \leq \cos x \leq 1$$

$$\cos(x + 2k\pi) = \cos x$$

$$-1 \leq \sin x \leq 1$$

$$\sin(x + 2k\pi) = \sin x$$

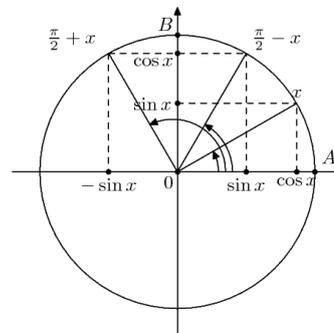
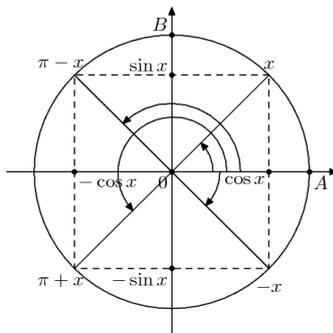
$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

Pour tout réel x ,

$$\begin{cases} \cos(-x) = \cos x \\ \sin(-x) = -\sin x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos(x + \pi) = -\cos x \\ \sin(x + \pi) = -\sin x \end{cases} \quad \begin{cases} \cos(\pi - x) = -\cos x \\ \sin(\pi - x) = \sin x \end{cases}$$

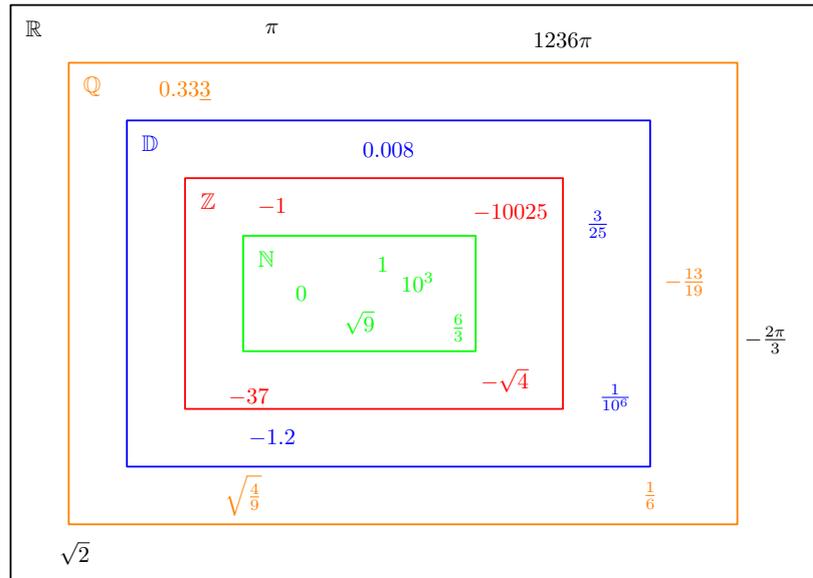
$$\begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \end{cases} \quad \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x \end{cases}$$



1.1.2 Valeurs particulières

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

1.1.3 Les ensembles de nombres : rappels



- \mathbb{N} est l'ensemble des entiers naturels. C'est l'ensemble des entiers positifs ou nuls.
- Dans \mathbb{N} l'équation $x + 1 = 0$ n'a pas de solution.
Cette équation a une solution notée -1, cette solution est un élément de l'ensemble \mathbb{Z} .
 \mathbb{Z} est l'ensemble des entiers relatifs. C'est l'ensemble des entiers positifs, négatifs ou nuls.
 \mathbb{Z} contient \mathbb{N} , c'est-à-dire que \mathbb{N} est contenu dans \mathbb{Z} , ce que l'on note $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.
- Dans \mathbb{Z} l'équation $2x = 1$ n'a pas de solution.
Cette équation a une solution notée $-\frac{1}{2}$, cette solution est un élément de l'ensemble \mathbb{Q} .
 \mathbb{Q} est l'ensemble des nombres rationnels.
C'est l'ensemble de tous les nombres de la forme $\frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}^*$. \mathbb{Q} contient \mathbb{Z} . On a donc $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.
- Dans \mathbb{Q} l'équation $x^2 = 2$ n'a pas de solutions.
Cette équation a deux solutions notées $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$, ces solutions sont des éléments de l'ensemble \mathbb{R} .
 \mathbb{R} est l'ensemble des nombres réels. C'est l'ensemble des abscisses de tous les points d'une droite.
 \mathbb{R} contient \mathbb{Q} . On a donc $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.
- Dans \mathbb{R} l'équation $x^2 = -1$ n'a pas de solutions. Cette équation a deux solutions notées i et $-i$, ces solutions sont des éléments de l'ensemble \mathbb{C} .
 \mathbb{C} est l'ensemble des nombres complexes.
C'est l'ensemble des nombres de la forme $x + yi$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$.
 \mathbb{C} contient \mathbb{R} . On a donc $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

1.2 Les nombres complexes

1.2.1 Définition



Définition 2

- \mathbb{C} contient l'ensemble des nombres réels.
- L'addition et la multiplication des nombres réels se prolongent aux nombres complexes et les règles de calcul restent les mêmes.
- Il existe un nombre complexe noté i tel que $i^2 = -1$.



Définition 3

- Tout nombre complexe z s'écrit de manière unique $z = x + iy$ avec x et y réels.
- L'écriture $z = x + iy$ avec x et y réels est appelée **forme algébrique** du nombre complexe z .
- x est la partie réelle de z , notée $Re(z)$, y est la partie imaginaire de z notée $Im(z)$.



Remarque

$z = x + iy$ avec x et y réels :

Si $y = 0$, le nombre complexe est réel.

Si $x = 0$, le nombre complexe est dit imaginaire pur ($z \in i\mathbb{R}$).



Exemple

Dans chacun des exemples suivants, on donne la partie réelle et la partie imaginaire :

- $z = 2 + 3i$ $Re(z) = 2$ et $Im(z) = 3$
- $z = -1 + \frac{1}{2}i$ $Re(z) = -1$ et $Im(z) = \frac{1}{2}$
- $z = -i$ $Re(z) = 0$ et $Im(z) = -1$
- $z = \pi$ $Re(z) = \pi$ et $Im(z) = 0$
- $z = 4i - \frac{1}{3}$ $Re(z) = -\frac{1}{3}$ et $Im(z) = 4$.



Théorème 4

Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire :

$$z = z' \Leftrightarrow x + iy = x' + iy' \Leftrightarrow x = x' \text{ et } y = y'.$$

$$z = 0 \Leftrightarrow x + iy = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ et } y = 0.$$



Remarque

Cela signifie qu'un nombre complexe s'écrit de manière unique sous forme algébrique.

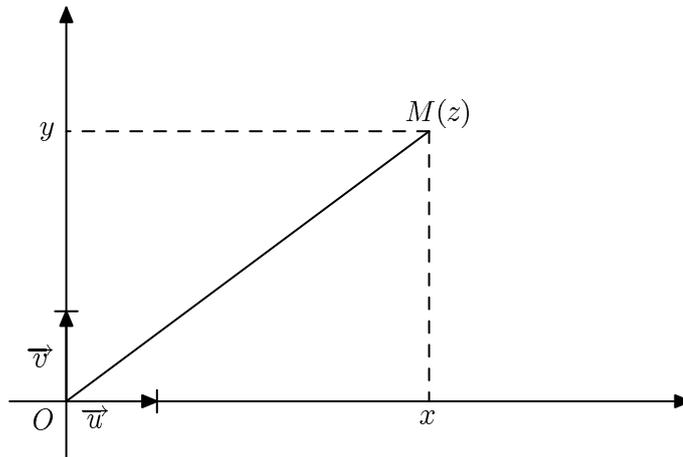
1.3 Représentation graphique



Définition 5

Le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$ est un repère orthonormal direct du plan.

1. A tout nombre complexe $z = x + iy$ avec x et y réels, on associe le point M de coordonnées $(x; y)$. On dit que M est le point image de z et que \overrightarrow{OM} est le vecteur image de z .
2. Tout point $M(x; y)$ est le point image d'un seul nombre complexe $z = x + iy$.
On dit que z est l'afixe du point M et du vecteur \overrightarrow{OM} .
3. Le plan est alors appelé plan complexe.
4. L'axe des abscisses $(O; \vec{u})$ est appelé axe des réels, l'axe des ordonnées $(O; \vec{v})$ est appelé axe des imaginaires purs.



1.4 Opérations sur les nombres complexes

1.4.1 Addition et multiplication



Théorème 6

Soit $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ (x, y, x' et y' réels).

La somme de z et de z' est le complexe $z + z' = (x + x') + i(y + y')$. Le produit de z et de z' est $z.z' = (xx' - yy') + i(xy' + x'y)$. En effet $z.z' = (x + iy)(x' + iy') = xx' + ix'y' + i x'y + i^2 yy' = xx' - yy' + i(xy' + x'y)$.



Remarque

Les identités remarquables sont valables dans \mathbb{C} .

On a alors pour tous z et z' complexes, $z^2 + z'^2 = z^2 - i^2 z'^2 = (z - iz')(z + iz')$.



Exemple

Soient $z = 2 + 3i$ et $z' = i - 5$.

Calculer $z + z'$, $z - z'$, $2z - 3z'$, zz' et z^2 .

- $z + z' = 2 + 3i + i - 5 = -3 + 4i$,
- $z - z' = 2 + 3i - (i - 5) = 2 + 3i - i + 5 = 7 + 2i$,
- $2z - 3z' = 2(2 + 3i) - 3(i - 5) = 4 + 6i - 3i + 15 = 19 + 3i$,
- $zz' = (2 + 3i)(i - 5) = 2i - 10 + 3i^2 - 15i = 2i - 10 - 3 - 15i = -13 - 13i$,
- $z^2 = (2 + 3i)^2 = 2^2 + 2 \times 2 \times 3i + (3i)^2 = 4 + 12i + 9i^2 = 4 + 12i - 9 = -5 + 12i$.

1.4.2 Inverse d'un nombre complexe non nul



Théorème 7

Tout nombre complexe non nul z , écrit sous forme algébrique $z = x + iy$, admet un inverse, noté $\frac{1}{z}$, et :

$$\frac{1}{z} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}.$$

$(\mathbb{C}, +, \times)$ est un corps commutatif.



Preuve

En effet, on remarque que pour tout nombre complexe non nul $z = x + iy$, $(x + iy)(x - iy) = x^2 - i^2y^2 = x^2 + y^2$.

$$\text{On a alors } \frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}.$$



Exemple

Calculs d'inverses :

$$1. \frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i.$$

$$2. \frac{1}{2-3i} = \frac{2+3i}{(2-3i)(2+3i)} = \frac{2+3i}{13} = \frac{2}{13} + \frac{3}{13}i.$$

$$3. \frac{2}{i} = \frac{2 \times (-i)}{i \times (-i)} = \frac{-2i}{1} = -2i.$$

$$4. \frac{2+i}{-3+i} = \frac{(2+i)(-3-i)}{(-3+i)(-3-i)} = \frac{-6-2i-3i+1}{10} = \frac{-5-5i}{10} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i.$$

1.5 Nombre conjugué



Définition 8

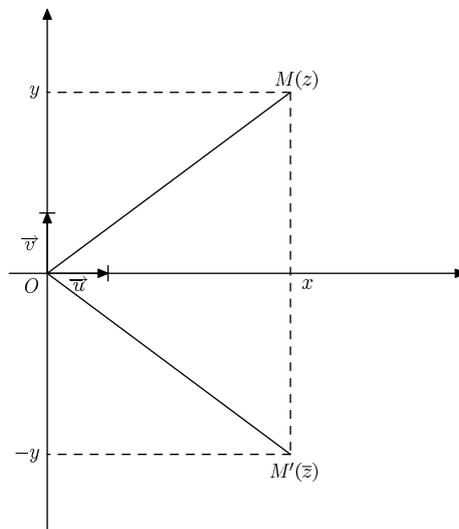
Soit z un nombre complexe, $z = x + iy$.

Le **nombre conjugué** de z , noté \bar{z} , est le nombre complexe $x - iy$.



Remarque

Interprétation géométrique Dans le plan complexe, le point M' d'affixe \bar{z} est l'image du point M d'affixe z par la symétrie par rapport à l'axe des abscisses.





Théorème 9

Soit z un nombre complexe.

1. z est réel équivaut à $\bar{z} = z$.
2. z est imaginaire pur équivaut à $\bar{z} = -z$.



Preuve

On pose $z = x + iy$, avec x et y réels :

1. Si z est réel, alors $y = 0$, donc $z = \bar{z}$. Si $z = \bar{z}$, alors $x + iy = x - iy$, donc $2iy = 0$ et on en déduit que $y = 0$ ce qui signifie que z est réel.
2. Si z est imaginaire pur, alors $x = 0$, donc $z = -\bar{z}$. Si $z = -\bar{z}$, alors $x + iy = -x + iy$, donc $2x = 0$ et $x = 0$.
 z est donc bien un imaginaire pur.

1.6 Nombre conjugué



Théorème 10

Soit z l'affixe d'un point M dans le plan complexe.

1. \bar{z} est l'affixe du symétrique de M par rapport à l'axe des abscisses.
2. $-z$ est l'affixe du symétrique de M par rapport au point O .
3. $-\bar{z}$ est l'affixe du symétrique de M par rapport à l'axe des ordonnées.



Théorème 11

Pour tous nombres complexes z et z' :

- | | |
|--|---|
| (1) $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$ | (2) $\overline{\bar{z}} = z$ |
| (3) $\overline{zz'} = \bar{z}\bar{z}'$ | (4) pour $z \neq 0$, $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$ |
| (5) pour $z' \neq 0$, $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}$ | (6) pour $n \in \mathbb{Z}$, $\overline{z^n} = \bar{z}^n$. |



Remarque

Pour tout nombre complexe z , on a les relations :

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2} \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$



Exemple

Soient $z = 3 + 5i$ et $z' = -2 + 3i$.

- $z + z' = (3 + 5i) + (-2 + 3i) = 1 + 8i$.
- $z \times z' = (3 + 5i) \times (-2 + 3i) = -6 + 9i - 10i + 15i^2 = -6 - i - 15 = -21 - i$.
- $\bar{z} = 3 - 5i$, $\bar{z}' = -2 - 3i$.
- $\bar{z} + \bar{z}' = (3 - 5i) + (-2 - 3i) = 1 - 8i$, $\overline{z + z'} = 1 - 8i$.
- $\bar{z} \times \bar{z}' = (3 - 5i) \times (-2 - 3i) = -6 - 9i + 10i + 15i^2 = -6 + i - 15 = -21 + i$.
- $\overline{z \times z'} = -21 + i$.

1.7 Module d'un nombre complexe



Définition 12

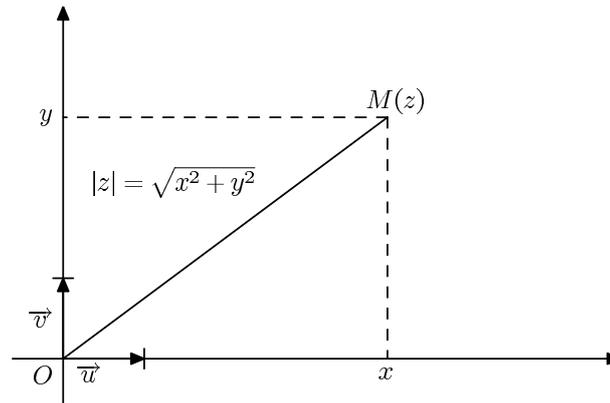
Soit z un nombre complexe, $z = x + iy$ (x et y réels). Le module de z est le nombre réel positif noté $|z|$ et défini par

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$



Remarque

Interprétation géométrique : Dans le plan complexe, si M a pour affixe z , alors $OM = |z|$.



Exemple

Calcul du module de nombres complexes :

1. $|3 + 4i| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5.$
2. $|1 - i| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}.$
3. $|-5 - 2i| = \sqrt{(-5)^2 + (-2)^2} = \sqrt{25 + 4} = \sqrt{29}.$
4. $|-5| = 5.$
5. $|9i| = \sqrt{0^2 + 9^2} = \sqrt{81} = 9.$



Exemple

1. Si z est un nombre réel, le module de z correspond à la valeur absolue de z .
2. $|z| = 0$ équivaut à $z = 0$ car $OM = 0$ équivaut à $O = M$.
3. $z\bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$.



Théorème 13

Propriétés du module Pour tous nombres complexes $z \in \mathbb{C}$ et $z' \in \mathbb{C}$:

1. $|\bar{z}| = |z|$
2. $|-z| = |z|$
3. $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ (inégalité triangulaire)
4. $|zz'| = |z||z'|$
5. $\left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}$, $z' \neq 0$
6. $\forall n \in \mathbb{Z}$, $|z^n| = |z|^n$ ($z \neq 0$ si $n \in -\mathbb{N}$)

1.8 Argument d'un nombre complexe non nul

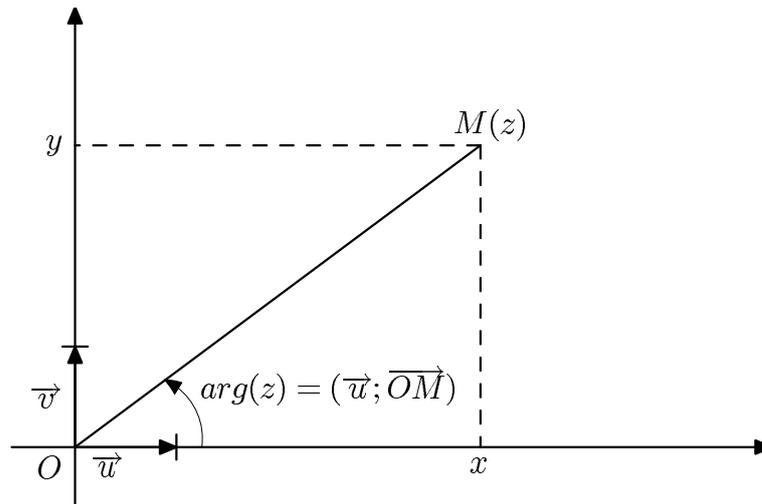


Définition 14

Soit z un nombre complexe non nul d'image M , $z = x + iy$ (x et y réels). Une mesure de l'argument de z est un nombre réel noté $\arg(z)$ et défini par $\arg(z) = (\vec{u}; \overrightarrow{OM}) [2\pi]$.

- On note $\theta = \arg(z)$,

- θ vérifie :
$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \\ \sin \theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \end{cases}$$



Exemple

Calcul d'un argument de nombres complexes :

- $z_1 = 2 + 2i$:
$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{2}{\sqrt{2^2 + 2^2}} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta = \frac{2}{\sqrt{2^2 + 2^2}} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \arg(2 + 2i) = \frac{\pi}{4}.$$

- $z_2 = 1 + i\sqrt{3}$:
$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2}} = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2} \\ \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \arg(1 + \sqrt{3}i) = \frac{\pi}{3}.$$



Théorème 15

Pour tout nombre complexe $z \neq 0$:

1. $\arg(\bar{z}) = -\arg(z)$
2. $\arg(-z) = \arg(z) + \pi$
3. $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')$
4. $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$
5. $\forall n \in \mathbb{Z}, \arg(z^n) = n \times \arg(z)$



Exemple

D'après l'exemple précédent, on obtient :

- $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{12}$.
- $\arg\left(\frac{1}{z_1}\right) = -\arg z_1 = -\frac{\pi}{4}$.
- $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2 = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{12}$.

1.9 Écriture trigonométrique

On se place dans un plan muni du repère $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

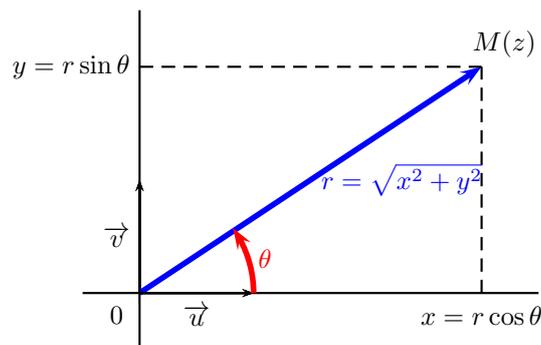


Définition 16

Tout nombre complexe non nul z peut-être écrit sous la forme $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ avec :

- $\arg(z) = \theta \in \mathbb{R}$ est l'argument de z
- $|z| = r \in \mathbb{R}_*^+$ est le module de z

cette écriture s'appelle la **forme trigonométrique** de z .



Exemple

Passage de la forme algébrique à la forme trigonométrique :

- $z_1 = 1 - i : \begin{cases} |1 - i| = \sqrt{2} \\ \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow r = \sqrt{2} \text{ et } \theta = -\frac{\pi}{4} \Rightarrow 1 - i = \sqrt{2} \left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right].$
- $z_2 = \sqrt{3} + i : \begin{cases} |\sqrt{3} + i| = 2 \\ \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \theta = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow r = 2 \text{ et } \theta = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \sqrt{3} + i = 2 \left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \right].$



Remarque

Dans certains cas, il est inutile de faire tous les calculs : la forme trigonométrique se "voit" :

- $1 = \cos 0 + i \sin 0$ donc $|1| = 1$ et $\arg(1) = 0$.
- $i = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$ donc $|i| = 1$ et $\arg(i) = \frac{\pi}{2}$.

1.10 Forme exponentielle d'un nombre complexe non nul



Définition 17

Pour tout nombre complexe $z \neq 0$, de module r et d'argument de mesure θ , on pourra écrire :

$$z = r e^{i\theta}$$



Théorème 18

1. $|e^{i\theta}| = 1$
2. $\arg(e^{i\theta}) = \theta$
3. $e^{i\theta} e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$
4. $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$
5. $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$
6. $\forall n \in \mathbb{Z}, (e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$



Exemple

Différentes écritures des nombres complexes z_1 et z_2 :

Forme algébrique	$1 - i$
Forme trigonométrique	$\sqrt{2} \left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right]$
Forme exponentielle	$\sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}$



Exemple

Différentes écritures des nombres complexes z_1 et z_2 :

Forme algébrique	$\sqrt{3} + i$
Forme trigonométrique	$2 \left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \right]$
Forme exponentielle	$2 e^{i\frac{\pi}{6}}$



Exemple

Passage de la forme exponentielle à la forme algébrique de $z = 4e^{i\frac{3\pi}{4}}$:

- $z = 4 \left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \right]$
- $z = 4 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$
- $z = -2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2}$.



Exemple

Soient $z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $z_2 = 2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$:

- $z_1 z_2 = 2 \times 2\sqrt{3} e^{i\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right)} = 4\sqrt{3} e^{i\frac{\pi}{2}}$.
- $z_2^4 = (2\sqrt{3})^4 e^{i4\frac{\pi}{6}} = 144 e^{i\frac{2\pi}{3}}$.
- $\frac{z_2}{z_1} = \frac{2\sqrt{3}}{2} e^{i\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3}\right)} = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

1.11 Formule de MOIVRE



Théorème 19

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$: $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$.

Un peu d'histoire : Abraham de MOIVRE 1667-1754 est un mathématicien britannique d'origine française.



Exemple

Factorisation de $\cos(2\theta)$ et $\sin(2\theta)$:

On a d'une part : $(\cos \theta + i \sin \theta)^2 = \cos(2\theta) + i \sin(2\theta)$ d'après la formule de MOIVRE, et d'autre part : $(\cos \theta + i \sin \theta)^2 = \cos^2 \theta + 2i \cos \theta \sin \theta - \sin^2 \theta$ par développement, d'où : $\cos(2\theta) = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$ et $\sin(2\theta) = 2 \cos \theta \sin \theta$.

1.12 Formules d'EULER



Théorème 20

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$: $\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$.

Un peu d'histoire : Leonhard EULER (1717 – 1783) était un mathématicien et physicien suisse.



Exemple

Linéarisation de $\sin^2 x$:

$$\sin^2 x = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^2 = \frac{e^{2ix} - 2e^{ix}e^{-ix} + e^{-2ix}}{-4} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{e^{2ix} + e^{-2ix}}{2} \right) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$

1.13 Résolution dans \mathbb{C} d'équations du second degré à coefficients réels

Théorème 21

L'équation $az^2 + bz + c = 0$ (a, b et c réels, $a \neq 0$) admet des solutions dans \mathbb{C} .

Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant du trinôme.

1. Si $\Delta = 0$: une solution réelle égale à $-\frac{b}{2a}$

2. Si $\Delta \neq 0$: deux solutions distinctes :

- réelles si $\Delta > 0$: $-\frac{b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $-\frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a}$;

- complexes conjuguées si $\Delta < 0$:

$$\frac{-b}{2a} + i\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ et } \frac{-b}{2a} - i\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Exemple

Résolution dans \mathbb{C} de $z^2 - 2z + 2 = 0$:

- $\Delta = b^2 - 4ac = -4 = (2i)^2$.

- Le discriminant étant négatif, l'équation admet deux solutions complexes conjuguées :

- $z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{2 + 2i}{2} = 1 + i$,

- $z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{2 - 2i}{2} = 1 - i$.

1.14 Racines $n^{\text{èmes}}$

Théorème 22

- On appelle racine carrée dans \mathbb{C} de $Z = A + Bi$ tout complexe $z = x + iy$ (x et y réels) tel que $z^2 = Z$.
- Tout complexe non nul $Z = A + iB$ (A et B réels) admet deux racines carrées complexes opposées. On les obtient en résolvant dans \mathbb{R} le système :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = A \\ x^2 + y^2 = \sqrt{A^2 + B^2} \\ 2xy = B \end{cases}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle racine $n^{\text{ème}}$ dans \mathbb{C} d'un complexe $Z = |Z| e^{i\theta}$ tout complexe z tel que $z^n = Z$.
- Tout complexe Z non nul admet n racines $n^{\text{èmes}}$ dans \mathbb{C} qui sont données par :

$$z_k = \sqrt[n]{|Z|} e^{i(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n})} \quad \text{où } k = 0, 1, \dots, n-1$$

- Tout polynôme de degré n admet n racines complexes (comptées avec leur ordre de multiplicité). On dit que \mathbb{C} est algébriquement clos.

1.15 Exercices

Exercice 1

Mettre sous forme algébrique les nombres suivants :

1. $\frac{3+6i}{3-4i}$

2. $\left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2 + \frac{3+6i}{3-4i}$

3. $(3+2i)(1-3i)$

4. $2e^{i\frac{\pi}{3}} \times 3e^{-i\frac{5\pi}{6}}$

5. $(1+i)^6$

6. $\frac{(1+i)^8}{1-i\sqrt{3}}$

Exercice 2

Calculer le module et l'argument de $u = \frac{\sqrt{6-i\sqrt{2}}}{2}$ et $v = 1-i$.
En déduire le module et l'argument de $w = \frac{u}{v}$.

Exercice 3

Résoudre dans \mathbb{C} :

1. $2z^2 - 6z + 5 = 0$

2. $z^2 + 3 = 0$

3. $z^2 + z + 1 = 0$

4. $z^3 + 1 = 0$

5. $z^4 - 1 = 0$

6. $z^4 - 2z^3 - z^2 - 2z + 1 = 0$ (on pourra poser $Z = z + \frac{1}{z}$)

Exercice 4

Déterminer la forme trigonométrique et exponentielle des nombres suivants :

1. $z = -3i$

2. $z = 1 - i\sqrt{3}$

3. $z = \frac{1-i\sqrt{3}}{1+i}$

4. $z = -\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$

5. $z = \left(\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8} \right)^6$

Exercice 5

Soit $z_1 = \sqrt{2}(1+i)$ et $z_2 = \frac{\sqrt{3}-i}{2}$. Soit $Z = \frac{z_1}{z_2}$.

1. Déterminer la forme algébrique de Z

2. (a) Déterminer une forme exponentielle de z_1 et z_2 .

(b) Déterminer une forme exponentielle de Z .

3. (a) En déduire la valeur exacte de $\cos \frac{5\pi}{12}$ et $\sin \frac{5\pi}{12}$.

(b) Déterminer alors $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.

Exercice 6

Calculer de deux façons différentes le nombre $(e^{ix})^4$ (pour $x \in \mathbb{R}$) et en déduire les expressions de $\cos 4x$ et $\sin 4x$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$.

Exercice 7

Soient $a, b \in \mathbb{N}$. On suppose que $a = x^2 + y^2$ et $b = z^2 + t^2$ avec $x, y, z, t \in \mathbb{Z}$.
Démontrer que le produit ab est encore la somme de deux carrés.

Chapitre 2

Systemes d'equations lineaires-Matrices

Contenu

2.1	Résolution des systèmes linéaires	19
2.1.1	Notations et vocabulaire	19
2.1.2	Opérations élémentaires	19
2.1.3	Matrices à lignes échelonnées	19
2.1.4	Application aux systèmes	20
2.2	Matrices	21
2.2.1	Notations	21
2.2.2	Somme de deux matrices et produit d'une matrice par un réel	21
2.2.3	Produit de deux matrices	21
2.2.4	Opérations par blocs	22
2.2.5	Transposition	22
2.2.6	Inversion	23
2.3	Exercices	24

2.1 Résolution des systèmes linéaires

2.1.1 Notations et vocabulaire

Soit un système de m équations à n inconnues x_1, x_2, \dots, x_n :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

où les coefficients a_{ij} et b_j pour i entre 1 et m et j entre 1 et n sont des réels ou des complexes (des scalaires). Résoudre ce système consiste à trouver tous les réels (ou tous les complexes) x_1, \dots, x_n (s'il en existe), tels que les égalités soient vérifiées.

On dira que ce système comporte m lignes, notées L_1, \dots, L_m . Une ligne dont tous les éléments sont nuls sera dite nulle. On associe également à ce système des matrices :

- une matrice $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ à m lignes et n colonnes, la matrice du système.
- une matrice $B = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$ à m lignes et $n + 1$ colonnes, la matrice complète du système. La colonne $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ s'appelle le second membre du système.

2.1.2 Opérations élémentaires

On utilise trois types d'opérations, dites élémentaires, pour résoudre ce problème :

- Remplacer une ligne du système par la somme de celle-ci et du multiple d'une autre ligne.
- Echanger deux lignes ou deux colonnes du système.
- Multiplier une ligne par un scalaire non nul.

Il est à peu près évident que par ces opérations élémentaires, on transforme un système en un système équivalent, c'est à dire ayant les mêmes solutions. Ces opérations se font indifféremment sur les lignes du système ou sur les lignes de la matrice complète du système.

2.1.3 Matrices à lignes échelonnées



Théorème 23

Par une suite d'opérations élémentaires, on peut transformer toute matrice en une matrice possédant la propriété suivante : le nombre de coefficients nuls au début de chaque ligne augmente à chaque ligne, l'augmentation étant stricte pour les lignes qui suivent une ligne non nulle.

Une matrice possédant la propriété ci-dessus sera dite à lignes échelonnées. Le premier élément non nul d'une ligne non nulle de cette matrice est appelé pivot.

Exemples :

- la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 5 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est à lignes échelonnées.
- la matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ n'est pas à lignes échelonnées.

 Preuve

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice à m lignes et n colonnes. Si la matrice est nulle, elle est à lignes échelonnées. Sinon, il existe une première colonne non nulle. Soit l l'indice de cette colonne. On choisit alors un élément a_{kl} non nul dans cette colonne. Pour $i \neq k$, on remplace L_i par $L_i - \frac{a_{il}}{a_{kl}}L_k$. Le premier terme de chaque nouvelle ligne L'_i , $i \neq k$ est donc nul. On échange alors la ligne 1 et la ligne k et on a alors une matrice A' du type :

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{kl} & * & * \\ 0 & \vdots & \vdots & 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & * & * \end{pmatrix}$$

On recommence alors avec la matrice A'' obtenue en supprimant la première ligne, les premières colonnes nulles et la première colonne non nulle de A' . On arrive ainsi à une matrice à lignes échelonnées.

La matrice ainsi obtenue n'est pas unique, puisqu'on peut choisir à chaque étape le pivot non nul dans la colonne.

 Théorème 24

On peut, par une suite d'opérations élémentaires, transformer une matrice A en une matrice à lignes échelonnées dont les pivots valent 1 et dans laquelle tous les coefficients situés au-dessus de chaque pivot sont nuls. Une telle matrice sera appelée une réduite de Gauss-Jordan. On peut montrer qu'une telle réduite est unique.

 Preuve

À partir d'une matrice A , on construit une matrice à lignes échelonnées, puis en divisant chaque ligne non nulle par son pivot, on obtient une matrice à lignes échelonnées dont les pivots valent 1. Il suffit alors d'utiliser la technique du théorème précédent pour annuler les coefficients au dessus des pivots.

2.1.4 Application aux systèmes

Soit le système $\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$. Par une suite d'opérations élémentaires sur la matrice complète du

système (ou, ce qui revient au même, sur les lignes du système), on transforme le système en un système équivalent dont la matrice complète est à lignes échelonnées. Les lignes nulles de ce système correspondent à des équations :

$$0x_1 + \dots + 0x_n = 0$$

On peut donc les ignorer. Soit r le nombre de lignes non nulles et p_1, \dots, p_r les pivots.

- Si le dernier pivot p_r est dans la dernière colonne (la $(n+1)^{\text{ème}}$), alors la dernière ligne non nulle du système est :

$$0x_1 + \dots + 0x_n = p_r$$

Le système n'admet pas de solution.

- Si le dernier pivot n'est pas dans la dernière colonne, appelons j_1, \dots, j_r les indices des colonnes des pivots, de sorte que :

$$1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_r \leq n$$

et que la matrice complète soit de la forme :

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & p_1 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & 0 & 0 & \cdots & * \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & p_2 & * & \cdots & * & 0 & \vdots & \cdots & * \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & p_3 & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & p_r & * & \cdots & * \end{pmatrix}$$

En faisant passer dans le membre de droite les variables d'indices différents de j_1, \dots, j_r , et en divisant par p_1, \dots, p_r , on peut exprimer les variables d'indices j_1, \dots, j_r en fonction des autres. Le système admet des solutions. En particulier, si $r = n$, il n'admet qu'une solution, et si $r < n$, il en admet une infinité.

2.2 Matrices

2.2.1 Notations

\mathbb{K} désigne le corps des réels ou celui des complexes (les scalaires).

On note $\mathcal{M}_{(m,n)}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à m lignes et n colonnes à coefficients dans \mathbb{K} . Si $m = n$, on notera seulement $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et les matrices sont dites carrées.

Une matrice A de $\mathcal{M}_{(m,n)}(\mathbb{K})$ est notée $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ ou (a_{ij}) .

Deux matrices $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ et $B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ sont égales ssi $a_{ij} = b_{ij}$ pour tout i et tout j .

Une matrice à une ligne sera appelée matrice ligne et matrice colonne si elle a une seule colonne.

La matrice nulle (notée 0) est la matrice dont tous les coefficients sont nuls, et la matrice identité d'ordre n , notée I_n , est la matrice carrée $I_n = (\delta_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ où $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$ est le symbole de Kronecker.

2.2.2 Somme de deux matrices et produit d'une matrice par un réel



Définition 25

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ et $B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ deux éléments de $\mathcal{M}_{(m,n)}(\mathbb{K})$ et soit α un scalaire. On définit :

- La somme de A et de B par : $A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathcal{M}_{(m,n)}(\mathbb{K})$
- Le produit du scalaire α et de la matrice A par : $\alpha A = (\alpha a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathcal{M}_{(m,n)}(\mathbb{K})$.



Proposition 26

L'ensemble $\mathcal{M}_{(m,n)}(\mathbb{K})$, muni de ces deux opérations, a une structure de \mathbb{K} -espace vectoriel, c'est à dire :

- $\forall A, B, C \in \mathcal{M}_{(m,n)}(\mathbb{K}) : \begin{cases} A + B = B + A \\ (A + B) + C = A + (B + C) \\ A + 0 = 0 + A = A \\ \exists A' \in \mathcal{M}_{(m,n)}(\mathbb{K}) \text{ tel que } A + A' = A' + A = 0 \end{cases}$
- $\forall A, B \in \mathcal{M}_{(m,n)}(\mathbb{K}), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} : \begin{cases} \alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B \\ (\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A \\ 1A = A \\ (\alpha\beta)A = \alpha(\beta A) \end{cases}$

Tout se démontre sans difficulté : il suffit de l'écrire.

2.2.3 Produit de deux matrices



Définition 27

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathcal{M}_{(m,n)}(\mathbb{K})$ une matrice à m lignes et n colonnes et $B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{(n,p)}(\mathbb{K})$ une matrice à n lignes et p colonnes. On définit le produit AB par :

$$AB \in \mathcal{M}_{(m,p)}(\mathbb{K}) \text{ et } AB = (c_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq p}} \text{ où } c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$$



Proposition 28

Soit A, B, C trois matrices et α un élément de \mathbb{K} . A condition que les produits aient un sens, on a :

- $A(BC) = (AB)C$
- $A(B + C) = AB + AC$
- $(A + B)C = AC + BC$
- $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$



Remarque

Un système $\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$ peut alors s'écrire $AX = B$ où $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ est la matrice du système, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ est un élément de $\mathcal{M}_{(n,1)}(\mathbb{K})$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ appartient à $\mathcal{M}_{(m,1)}(\mathbb{K})$.

2.2.4 Opérations par blocs

Soit $A \in \mathcal{M}_{(m,n)}(\mathbb{K})$. On écrit $m = m_1 + \dots + m_r$ et $n = n_1 + \dots + n_s$. On peut alors considérer A comme une matrice de format (r, s) dont les éléments sont eux mêmes des matrices de format (m_i, n_j) que l'on appelle blocs.

Par exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 4 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

peut être considérée comme composée de 4 blocs : $A_{11} = (1) \in \mathcal{M}_{(1,1)}(\mathbb{K})$, $A_{12} = (3 \ 5) \in \mathcal{M}_{(1,2)}(\mathbb{K})$,

$A_{21} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{(2,1)}(\mathbb{K})$ et $A_{22} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{(2,2)}(\mathbb{K})$. On utilisera en particulier la décomposition par lignes :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1*} \\ \vdots \\ a_{m*} \end{pmatrix} \text{ où } a_{i*} = (a_{i1} \ \cdots \ a_{in})$$

ou la décomposition par colonnes :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{*1} \ \cdots \ a_{*n}) \text{ où } a_{*j} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$



Proposition 29

Le résultat des opérations sur des matrices décomposées en blocs s'obtiennent par les mêmes formules que pour les opérations habituelles sur les éléments des matrices (à condition que les opérations sur les blocs aient un sens).

La démonstration n'est pas très difficile, et c'est un bon exercice de manipulation des indices.

2.2.5 Transposition



Définition 30

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ une matrice de $\mathcal{M}_{(m,n)}(\mathbb{K})$. On appelle transposée de A , et on note tA (ou A' en économie) la matrice définie par :

$${}^tA = (a'_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} \in \mathcal{M}_{(n,m)}(\mathbb{K}) \text{ où } a'_{ij} = a_{ji}$$



Proposition 31

Pour toutes matrices A et B de $\mathcal{M}_{(m,n)}(\mathbb{K})$ et tous scalaires α et β :

- ${}^t({}^tA) = A$
- ${}^t(\alpha A + \beta B) = \alpha {}^tA + \beta {}^tB$
- Si $A \in \mathcal{M}_{(m,n)}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{(n,p)}(\mathbb{K})$ alors ${}^t(AB) = {}^t(B) {}^t(A)$.

2.2.6 Inversion



Définition 32

Une matrice A de $\mathcal{M}_{(m,n)}(\mathbb{K})$ est dite inversible à gauche (resp. à droite) s'il existe une matrice B de $\mathcal{M}_{(n,m)}(\mathbb{K})$ (resp. C de $\mathcal{M}_{(n,m)}(\mathbb{K})$) telle que $BA = I_n$ (resp. $AC = I_m$).
 B (resp. C) est appelée inverse à gauche (resp. inverse à droite).



Remarque

B et C ne sont pas nécessairement uniques.



Proposition 33

Une matrice qui est inversible à droite et à gauche admet un unique inverse à gauche, qui est aussi son unique inverse à droite. On dit alors que la matrice est inversible.



Remarque

On verra qu'une matrice inversible est nécessairement carrée.



Preuve

Soit $A \in \mathcal{M}_{(m,n)}(\mathbb{K})$. On suppose qu'il existe $B \in \mathcal{M}_{(n,m)}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{(n,m)}(\mathbb{K})$ telles que :

$$BA = I_n \text{ et } AC = I_m$$

En multipliant à droite la première égalité par C et à gauche la deuxième par B , il vient que :

$$BAC = C \text{ et } BAC = B$$

d'où $B = C$ et tout inverse à gauche est égal à tout inverse à droite. Il y a bien unicité.



Proposition 34

Soit A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices carrées d'ordre n , que l'on suppose inversibles. Alors :

- $(A^{-1})^{-1} = A$
- AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- Si A est inversible, alors tA aussi et $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$.

2.3 Exercices

Exercice 8

Résoudre les systèmes à inconnues réelles :

$$\begin{cases} 2x + 6y - z = -3 \\ x - y + z = 2 \\ -x - 3y + 3z = 9 \end{cases} \quad \begin{cases} x + 2y + 3z - 2t = 1 \\ x + y - z - t = 0 \\ x + 3y + 7z - 3t = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x + 3y - z = 0 \\ 2x + 5y + 3z = 5 \end{cases}$$

Exercice 9

Résoudre dans \mathbb{R} les systèmes suivants où m est un paramètre réel :

$$\begin{cases} 3x + 4y - 7z = -29 \\ x + y + z = 4 \\ mx + y + z = m + 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x - y - 2z = 6 \\ 3x + my + z = m \\ 2x + y - z = 6 \end{cases}$$

Exercice 10

On donne le système :

$$\begin{cases} x + y - 3z + t = 8 \\ 2x - 3y - 4z + t = 7 \\ 3x - 2y + mz + 2t = p \end{cases}$$

où m et p sont des paramètres réels.

1. En utilisant la méthode du pivot de Gauss, discuter de l'existence et du nombre de solutions du système en fonction des valeurs des paramètres m et p (on ne demande pas de calculer les solutions quand elles existent).
2. Résoudre ce système dans le cas où $m = 1$ et $p = -1$.

Exercice 11

On donne la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

1. En utilisant la méthode de Gauss-Jordan, montrer que A est inversible et calculer A^{-1} .
2. En déduire la résolution du système :

$$\begin{cases} 3x - y + z = 1 \\ -x + 3y - z = -1 \\ x - y + 2z = 3 \end{cases}$$

Exercice 12

On donne le système :

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y + 3z = 7 \\ 4x + 2y - z = 4 \end{cases}$$

1. Résoudre ce système par la méthode du pivot.
2. Ecrire ce système sous forme matricielle. Montrer, par la méthode de Gauss-Jordan, que la matrice de ce système est inversible et calculer son inverse. Retrouver alors les résultats du 1..

Exercice 13

Soient a, b, c trois réels. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Montrer que A est inversible et calculer A^{-1} .

Exercice 14

Considérons le système linéaire suivant (S_m) , où m est un paramètre réel :

$$(S_m) \begin{cases} 2x + my + z = 1 \\ x + 3y + (m+2)z = -2 \\ 4x + (2m+1)y + 3z = 2 \end{cases}$$

1. En utilisant la méthode de Gauss, transformer le système S_m en un système triangulaire équivalent.
2. Discuter suivant les valeurs du paramètre m de l'existence, de la nature et de la valeur des solutions.
3. On pose $m = 1$.
 - (a) Ecrire le système (S_1) sous forme matricielle $A.X = Y$ où A , X et Y sont trois matrices que vous explicitez.
 - (b) Montrer que la matrice A n'est pas inversible.

Exercice 15

On considère le système :

$$\begin{cases} x & +y & +z & = 1 \\ (b+c)x & +(c+a)y & +(a+b)z & = 4 \\ bcx & +acy & +abz & = 5 \end{cases}$$

où a, b, c sont 3 paramètres réels.

Partie 1 Dans cette partie, on prend $a = 3, b = 1$ et $c = 2$

1. Résoudre le système par la méthode du pivot.
2. Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 4 \\ 2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$ est inversible et calculer son inverse A^{-1} . Retrouver les résultats du 1. en utilisant A^{-1} .

Partie 2 a, b, c sont maintenant des paramètres réels quelconques.

1. Mettre la matrice complète du système sous forme triangulaire supérieure.
2. Combien y a-t-il de solutions si a, b et c sont deux à deux distincts (on ne demande pas de les calculer) ?
3. Que se passe-t-il si $a = c$ ou $b = c$?

Exercice 16

Trouver les solutions réelles des systèmes suivants, en utilisant exclusivement la méthode du pivot :

$$\begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ 2x + y - z = 0 \\ 3x & + z = 1 \\ 5x + y & = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x + 2y - 3z = 0 \\ -x + y + z = 0 \\ 4x - 2y + z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 + 2x_5 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$$

Exercice 17

Trouver les solutions complexes du système :

$$\begin{cases} x + iy + (1 + i)z - t = 1 \\ x + y = 0 \\ (1 + i)x + (1 - i)z - it = 1 \end{cases}$$

Exercice 18

Discuter, en fonction du réel k , du nombre de solutions réelles du système :

$$\begin{cases} kx + y + z = 1 \\ x + ky + z = 1 \\ x + y + kz = 1 \end{cases}$$

Même question si l'on cherche les solutions complexes, k étant lui même complexe.

Exercice 19

Résoudre le système suivant en fonction du paramètre k :

$$\begin{cases} x - 3y + z = -3 \\ -2x + 3ky + z = 3k \\ -x + 3y - kz = k + 1 \end{cases}$$

Exercice 20

On donne le système :

$$\begin{cases} x + y - 3z + t = 8 \\ 2x - 3y - 4z + t = 7 \\ 3x - 2y + mz + 2t = p \end{cases}$$

où m et p sont des paramètres réels.

En utilisant la méthode du pivot de Gauss, discuter de l'existence et du nombre de solutions du système en fonction des valeurs des paramètres m et p .

Exercice 21

1. On donne la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Par la méthode de Gauss-Jordan, montrer que A est inversible et calculer son inverse.

2. On donne $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -a & -3 \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$. En utilisant la méthode de Gauss-Jordan, dire pour quelles valeurs de a la matrice B est inversible.

Exercice 22

Effectuer les calculs suivants :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \\ 3 & 6 & 9 & 12 & 15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; (0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \\ 4 & 8 & 12 \\ 5 & 10 & 15 \end{pmatrix} ; (0 \ 1 \ 0 \ 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 23

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ et $D = \alpha I_n$. Montrer que $AD = DA$.

Exercice 24

Soit D une matrice diagonale de $M_n(\mathbb{K})$. Calculer D^p , pour tout p de \mathbb{Z} . (On rappelle que si A est une matrice inversible, et si p est un entier strictement négatif, on pose $A^p = (A^{-1})^{-p}$)

Exercice 25

Soit $A \in M_{(m,s)}(\mathbb{K})$ et $B \in M_{(s,n)}(\mathbb{K})$. Prouver que :

$$AB = \begin{pmatrix} Ab_{*1} & Ab_{*2} & \cdots & Ab_{*n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1*}B \\ a_{2*}B \\ \vdots \\ a_{m*}B \end{pmatrix}$$

où b_{*i} (respectivement a_{j*}) sont les colonnes de B (respectivement les lignes de A).

Exercice 26

Soit trois matrices carrées A, B, C de taille n telles que B soit inversible et $A = BCB^{-1}$. Montrer alors que pour tout entier naturel p , $A^p = BC^pB^{-1}$. Si on suppose A inversible, montrer que C est également inversible et que l'égalité est aussi valable pour tout entier relatif. Quel est l'intérêt de cette égalité si C est diagonale ?

Exercice 27

Calculer A^n pour n entier positif pour :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} ; \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} ; \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 28

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer $(A+B)^2$ et $A^2 + B^2 + 2AB$.
Que remarquez-vous ? Généralisez.

Exercice 29

Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que le produit de deux matrices symétriques soit une matrice symétrique.

Exercice 30

Soit I_n la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle matrice élémentaire d'ordre n toute matrice obtenue en faisant subir à I_n l'une des trois opérations élémentaires suivantes (voir cours) :

- (I) : remplacer la ligne L_i par $L_i + \lambda L_j$ où $\lambda \in \mathbb{K}$ et $i \neq j$
- (II) : échanger les lignes i et j
- (III) : Multiplier L_i par λ ($\lambda \in \mathbb{K}^*$)

1. Vérifier que les matrices élémentaires sont du type :

$$E_I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \lambda & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix} \quad (\lambda \text{ se trouve à la } i^{\text{ème}} \text{ ligne et à la } j^{\text{ème}} \text{ colonne})$$

$$E_{II} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & & & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & 0 & 1 & \ddots & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & \ddots & 1 & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & & & & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & & & & & & & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{où les deux 1 qui ne sont pas sur la diagonale}$$

sont les éléments (i, j) et (j, i) de la matrice.

$$E_{III} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & 1 & & \vdots \\ & & & \lambda & \vdots \\ & & & & 1 & \vdots \\ \vdots & & & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où λ est à la ligne i .

2. Soit $A \in \mathcal{M}_{(m,n)}(\mathbb{K})$. Montrer que si l'on multiplie à gauche A par une matrice élémentaire du type (I), (II) ou (III), on fait subir à A une opération élémentaire du même type. (On aura peut-être intérêt à décomposer A en blocs lignes)
3. En déduire que les matrices E_I, E_{II} et E_{III} sont inversibles et que :

$$E_I^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & -\lambda & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \quad E_{II}^{-1} = E_{II} \quad \text{et} \quad E_{III}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & 1 & & \vdots \\ & & & 1/\lambda & \vdots \\ & & & & 1 & \vdots \\ \vdots & & & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Soit $A \in \mathcal{M}_{(m,n)}(\mathbb{K})$ et U une réduite de Gauss-Jordan de A . Montrer qu'il existe une suite de matrices élémentaires E_1, E_2, \dots, E_r telle que :

$$A = E_1 E_2 \dots E_r U$$

Chapitre 3

Notions sur les équations de récurrence linéaire à coefficients constants

Contenu

3.1	Généralités	30
3.1.1	Définitions	30
3.1.2	Propriété fondamentale	30
3.2	Cas de l'ordre 1	31
3.3	Cas de l'ordre 2	31
3.3.1	Résolution de l'équation homogène (<i>EH</i>)	31
3.3.2	Solutions particulières	32
3.4	Notion de stabilité	32
3.4.1	Définitions	32
3.4.2	Un premier résultat	33
3.5	Exercices	34

3.1 Généralités

3.1.1 Définitions



Définition 35

On appelle équation de récurrence linéaire d'ordre 1 à coefficients constants toute équation du type :

$$u_{t+1} + au_t = f(t)$$

où $a \in \mathbb{R}^*$ et f est une fonction à valeurs dans \mathbb{R} . Résoudre cette équation, c'est trouver toutes les suites réelles $(u_t)_{t \in \mathbb{N}}$ dont les termes vérifient l'égalité pour tout indice t .



Exemple

$u_{t+1} = au_t$ avec $a \in \mathbb{R}^*$: on sait que les suites qui vérifient cette équation sont par définition les suites géométriques de raison a , et elles s'écrivent : $u_t = u_0 a^t$ pour tout t entier.



Définition 36

On appelle équation de récurrence linéaire d'ordre 2 toute équation du type :

$$u_{t+2} + au_{t+1} + bu_t = f(t)$$

où $b \in \mathbb{R}^*$ et f est une fonction à valeurs dans \mathbb{R} .

On définirait de la même façon des équations de récurrence linéaire d'ordre n quelconque.



Définition 37

Si on a une équation de récurrence linéaire d'ordre quelconque, l'équation obtenue en supprimant le terme $f(t)$ s'appelle l'équation homogène associée.



Proposition 38

(Dépendance des conditions initiales) Soit $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ n réels. Il existe une unique solution u telle que $u_i = \alpha_i$ pour $i = 0, 1, \dots, n-1$.

Une solution (c'est à dire une suite (u_t)) s'appelle parfois une trajectoire.



Proposition 39

Les solutions d'une équation linéaire homogène d'ordre n forment un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension n .

3.1.2 Propriété fondamentale



Proposition 40

On obtient toutes les solutions d'une équation de récurrence linéaire en ajoutant la solution générale de l'équation homogène associée à une solution particulière de l'équation complète.

3.2 Cas de l'ordre 1

Proposition 41

Soit

$$u_{t+1} = au_t + f(t)$$

une équation d'ordre 1. La solution de l'équation homogène associée est donnée par :

$$u_t = \lambda a^t \quad \text{où } \lambda \in \mathbb{R}$$

C'est l'exemple du premier paragraphe.

Il reste à trouver une solution particulière de l'équation complète. On a les résultats suivants :

Proposition 42

Quand le second membre $f(t)$ est une constante b :

- Si $a = 1$, il existe une solution particulière qui est bt .

Les suites solutions sont donc de la forme :

$$u_t = \lambda + bt$$

- Si $a \neq 1$, il existe une solution qui est la suite constante $\frac{b}{1-a}$.

Les suites solutions sont donc données par :

$$u_t = \lambda a^t + \frac{b}{1-a}$$

Proposition 43

Quand le second membre $f(t)$ est de la forme $r^t P(t)$ où $r \in \mathbb{R}$ et P est un polynôme :

- si $r \neq a$, il existe une solution particulière qui est $r^t Q(t)$, où Q est un polynôme de même degré que P .
Les suites solutions sont donc données par :

$$u_t = \lambda a^t + r^t Q(t)$$

- Si $r = a$, il existe une solution particulière qui est $r^t t Q(t)$, où Q est un polynôme de même degré que P .
Les suites solutions sont donc données par :

$$u_t = \lambda a^t + r^t t Q(t)$$

3.3 Cas de l'ordre 2

Les choses deviennent plus compliquées. Considérons une équation :

$$(E) \quad : \quad u_{t+2} = au_{t+1} + bu_t + f(t)$$

$b \neq 0$ et f que l'on appelle le second membre. L'équation homogène associée est l'équation :

$$(EH) \quad : \quad u_{t+2} = au_{t+1} + bu_t$$

3.3.1 Résolution de l'équation homogène (EH)

Définition 44

On appelle équation caractéristique associée à (EH) ou à (E) l'équation d'inconnue $r \in \mathbb{R}$ définie par :

$$r^2 = ar + b \iff r^2 - ar - b = 0$$

Proposition 45

Soit $r^2 - ar - b = 0$ l'équation caractéristique associée à (EH) . Alors :

- Si l'équation caractéristique a deux racines distinctes r_1 et r_2 dans \mathbb{R} , les solutions de (EH) sont les suites données par :

$$u_t = \lambda_1 r_1^t + \lambda_2 r_2^t \quad \text{où } \lambda_1 \text{ et } \lambda_2 \text{ sont deux éléments de } \mathbb{R} \text{ quelconques.}$$

- Si l'équation caractéristique a une solution double r_1 dans \mathbb{R} , les solutions de (EH) sont les suites données par :

$$u_t = (\lambda_1 t + \lambda_2) r_1^t \quad \text{où } \lambda_1 \text{ et } \lambda_2 \text{ sont deux éléments de } \mathbb{R} \text{ quelconques.}$$

Cette proposition règle le problème dans le cas où l'équation caractéristique admet des racines réelles. Mais si son discriminant est strictement négatif, elle n'admet aucune racine réelle mais deux racines complexes conjuguées z_1 et \bar{z}_1 . On montre qu'alors, les suites réelles solutions de (EH) sont les suites données par :

$$u_t = \lambda_1 \operatorname{Re}(z_1^t) + \lambda_2 \operatorname{Im}(z_1^t) \quad \text{où } \lambda_1 \text{ et } \lambda_2 \text{ sont deux réels quelconques}$$

On rappelle que si $z_1 = |z_1| e^{i\theta}$, alors $z_1^t = |z_1|^t e^{it\theta}$ et $\operatorname{Re}(z_1^t) = |z_1|^t \cos t\theta$ et $\operatorname{Im}(z_1^t) = |z_1|^t \sin t\theta$ de telle sorte que :

Proposition 46

Si l'équation caractéristique a des solutions complexes, les solutions de (EH) sont les suites données par :

$$u_t = |z_1|^t (\lambda_1 \cos t\theta + \lambda_2 \sin t\theta)$$

3.3.2 Solutions particulières

Proposition 47

Soit (1) : $u_{t+2} = au_{t+1} + bu_t + f(t)$ une équation de récurrence linéaire d'ordre 2. On suppose que le second membre $f(t)$ est de la forme $f(t) = r^t P(t)$ où $r \in \mathbb{R}$ et P est un polynôme. L'équation (1) admet alors une solution (v_t) qui est de la forme :

- $v_t = r^t Q(t)$ si r n'est pas solution de l'équation caractéristique
 - $v_t = tr^t Q(t)$ si r est racine simple de l'équation caractéristique
 - $v_t = t^2 r^t Q(t)$ si r est racine double de l'équation caractéristique
- avec, dans tous les cas, Q qui est un polynôme de même degré que P .

3.4 Notion de stabilité

3.4.1 Définitions

Définition 48

Soit (1) : $u_{t+n} = a_{n-1}u_{t+n-1} + a_{n-2}u_{t+n-2} + \dots + a_0u_t + f(t)$ une équation de récurrence linéaire à coefficients constants d'ordre n . On appelle équilibre toute suite stationnaire solution de (1).

Il est clair qu'il ne peut y avoir d'équilibre que si f est une fonction constante. Supposons que $f(t) = c$ une constante. Un équilibre x_e est alors solution de :

$$x_e = a_{n-1}x_e + \dots + a_0x_e + c \Leftrightarrow x_e(1 - a_{n-1} - \dots - a_0) = c$$

Plusieurs cas se présentent :

- Si $(1 - a_{n-1} - \dots - a_0) \neq 0$, il existe un seul équilibre $x_e = c/(1 - a_{n-1} - \dots - a_0)$
- Si $(1 - a_{n-1} - \dots - a_0) = 0$, deux cas possibles :
 - Si $c = 0$, tout réel est un équilibre
 - Si $c \neq 0$, il n'y a pas d'équilibre.



Définition 49

On dit que le processus décrit par l'équation est globalement stable si toutes les trajectoires sont convergentes.

Si toutes les trajectoires convergent vers le même équilibre (ce qui implique qu'il est le seul équilibre), on dit que l'équilibre est globalement stable.

Si x_e est un équilibre, on définit l'ensemble de stabilité de x_e comme étant le sous ensemble S_{x_e} de \mathbb{R}^n formé des conditions initiales pour lesquelles les trajectoires convergent vers x_e .

3.4.2 Un premier résultat



Proposition 50

Soit z un complexe, $t \in \mathbb{N}$ et θ un réel. Alors les z^t , $t^k z^t$ et $|z| t^k \cos \theta t$ convergent vers 0 ssi $|z| < 1$.

La preuve est facile.



Proposition 51

Soit $x_{t+2} = ax_{t+1} + bx_t$ une équation de récurrence linéaire d'ordre 1 ou 2 (1 si $b = 0$). Alors l'équilibre est globalement stable ssi toutes les racines de l'équation caractéristique sont de module strictement inférieur à 1.

Pour le prouver, il suffit d'écrire les solutions de l'équation et d'appliquer le résultat précédent.

On a parfois (souvent) besoin de pouvoir dire si les modules des racines d'une équation sont strictement inférieurs à un sans les calculer. Le résultat suivant le permet (il sera généralisé).



Proposition 52

Soit $P(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b$ un polynôme du second degré à coefficients réels. Alors les modules de ses racines (réelles ou complexes) sont strictement inférieurs à 1 ssi $P(1) > 0$, $P(-1) > 0$ et $|b| < 1$.



Preuve

- Condition nécessaire : soit α et β les deux racines (éventuellement complexes) de P et supposons que $|\alpha| < 1$ et $|\beta| < 1$. Comme $b = \alpha\beta$, on a $|b| = |\alpha\beta| = |\alpha||\beta| < 1$. Si α et β sont complexes (conjugués), P est toujours du signe du coefficient de λ^2 c'est à dire positif. Si α et β sont réels, on a alors $-1 < \alpha < 1$ et $-1 < \beta < 1$ ce qui prouve que -1 et 1 sont à l'extérieur des racines, et donc $P(1) > 0$ et $P(-1) > 0$.
- Condition suffisante : On a donc $P(1) > 0$, $P(-1) > 0$ et $|b| < 1$. Si les deux racines α et β sont complexes, elles sont conjuguées et leur produit est égal au carré de leur module. On a donc $|\alpha|^2 = |\beta|^2 < 1$. Si les deux racines sont réelles, la condition $P(1) > 0$, $P(-1) > 0$ dit que -1 et 1 sont à l'extérieur des racines. Mais on ne peut avoir ni $-1 < 1 < \alpha \leq \beta$ ni $\alpha \leq \beta < -1 < 1$ car dans ces deux cas, $\alpha\beta = b > 1$. On a donc α et β strictement compris entre -1 et 1 .

3.5 Exercices

Exercice 31

Résoudre les équations de récurrence suivantes en exprimant les solutions en fonction du premier terme u_0 :

- $u_t - 4u_{t-1} = 3$ avec $u_0 = 0$, puis $u_0 = -1$ et $v_t = b$.
- $4u_t - 3u_{t-1} = 12 \left(\frac{3}{4}\right)^t$ avec $u_0 = 1$ et $v_t = bt \left(\frac{3}{4}\right)^t$.
- $3u_t + 2u_{t-1} = 10 + 14 \left(\frac{1}{2}\right)^t$ avec $u_0 = 2$ et $v_t = b$ et $w_t = c \left(\frac{1}{2}\right)^t$.
- $u_t - u_{t-1} = 4t + 3$ avec $u_0 = 1$ et $v_t = t(at + b)$.

Exercice 32

Résoudre les équations de récurrence suivantes, en exprimant les solutions en fonction de u_0 :

- $u_{t+1} = 3u_t + 4$ $u_0 = 1$ puis $u_0 = -2$ avec $v_t = b$
- $3u_t - 2u_{t-1} = 3 \left(\frac{2}{3}\right)^t$ $u_0 = 1$ avec $v_t = bt \left(\frac{2}{3}\right)^t$
- $u_{t+1} + \frac{3}{5}u_t = 6 + 19 \left(\frac{2}{3}\right)^t$ $u_0 = 14$ avec $v_t = b$ et $w_t = b \left(\frac{2}{3}\right)^t$
- $u_t - u_{t-1} = 2t + 1$ $u_0 = 1$ avec $v_t = t(at + b)$

Exercice 33

Résoudre les équations de récurrence suivantes en exprimant les solutions en fonction des deux premiers termes u_0 et u_1 :

- $6u_{t+2} - 5u_{t+1} + u_t = -2t - 3$ ($u_0 = 0, u_1 = -1$) avec $v_t = at + b$.
- $4u_{t+2} - 12u_{t+1} + 9u_t = 2^t$ ($u_0 = 0, u_1 = 1$) avec $v_t = b \times 2^t$.
- $u_{t+2} - 1/2u_{t+1} + 1/4u_t = 3t^2 + 9t + 17$ ($u_0 = 16, u_1 = 13$) avec $v_t = at^2 + bt + c$.
- $4u_{t+2} - 9u_t = 36 \times 3^t$ ($u_0 = -1, u_1 = 1$) avec $v_t = b \times 3^t$.

Exercice 34

Résoudre les équations de récurrence suivantes en exprimant les solutions en fonction des deux premiers termes u_0 et u_1 :

- $2u_{t+2} + 3u_{t+1} + u_t = 2 \left(-\frac{1}{2}\right)^t + 3 \cdot 2^t$ $u_0 = 0$ $u_1 = 1$ avec $v_t = bt \left(-\frac{1}{2}\right)^t$ et $w_t = b2^t$
- $u_{t+2} - 2u_{t+1} + 4u_t = 2t - 1$ $u_0 = 0$ $u_1 = 3$ avec $v_t = at + b$
- $u_{t+2} - 2u_{t+1} + u_t = t + 1$ $u_0 = 1$ $u_1 = 2$ avec $v_t = t^2(at + b)$
- $u_{t+2} + u_{t+1} - 2u_t = 6 + 3 \cdot (-2)^t$ $u_0 = 1$ $u_1 = 2$ avec $v_t = bt$ et $w_t = bt(-2)^t$

Exercice 35

On considère le modèle d'évolution d'un taux de change s_t donné par :

$$s_{t+2} - \alpha s_{t+1} + \alpha s_t = \bar{s}$$

où $0 < c < 1$, $\alpha > 0$, $\bar{s} > 0$ sont des constantes.

- Montrer qu'il existe un unique équilibre.
- Ecrire les solutions de cette équation de récurrence linéaire selon les valeurs de c et de α (on pourra remarquer que le signe de $c^2\alpha^2 - 4c\alpha$ est celui de $c\alpha - 4$).
- Montrer que l'équilibre est stable ssi $c\alpha < 1$.
- Préciser la dynamique selon les valeurs de c et de α .

Exercice 36

C_t désigne la consommation durant la période t , Y_t le revenu durant cette période et I_t l'investissement pendant cette période. On suppose que :

$$\begin{cases} C_t = 0.8Y_{t-1} \\ I_t = 0.6(C_t - C_{t-1}) + I \end{cases}$$

où I est une constante (investissement autonome).

1. En utilisant la relation $Y_t = C_t + I_t$, montrer que la suite (Y_t) est solution de l'équation de récurrence :

$$Y_t - 1.28Y_{t-1} + 0.48Y_{t-2} = I$$

2. Montrer que cette équation admet une solution constante.
3. Écrire la solution générale de cette équation en fonction du module et de l'argument de r_1 où r_1 est une solution complexe de l'équation caractéristique (on pourra définir $\theta = \arg(r_1)$).
En déduire le comportement asymptotique de (Y_t) .
4. Expliquer comment prédire le comportement asymptotique de (Y_t) sans déterminer les racines du polynôme caractéristique.

Exercice 37

C_t désigne la consommation durant la période t , Y_t respectivement I_t , le revenu et l'investissement durant cette période et G une constante (dépense gouvernementale).

On suppose que :

$$\begin{cases} C_t = cY_{t-1} & 0 < c < 1 \\ I_t = \beta(C_t - C_{t-1}) & \beta > 0 \\ Y_t = C_t + I_t + G \end{cases}$$

1. En utilisant la relation $Y_t = C_t + I_t + G$, montrer que la suite (Y_t) est solution de l'équation de récurrence :

$$Y_t - c(1 + \beta)Y_{t-1} + \beta cY_{t-2} = G$$

2. Montrer que cette équation admet une solution constante.
3. Écrire la solution générale de cette équation suivant les valeurs de c et β .
4. Déterminer le comportement asymptotique de (Y_t) suivant les valeurs de c et β .

Exercice 38

Considérons le marché d'un bien pour lequel l'offre S_t et la demande D_t à l'instant t , $t \in \mathbb{N}$, vérifient les équations :

$$S_t = a\pi_t + b \text{ avec } a > 0, b < 0, a \text{ et } b \text{ réels}$$

$$D_t = cp_t + d \text{ avec } c < 0, d > 0, c \text{ et } d \text{ réels}$$

$$S_t = D_t$$

où π_t est le prix anticipé par les producteurs pour la période t :

$$\pi_t = \alpha p_{t-1} + (1 - \alpha)p_{t-2} \text{ avec } 0 \leq \alpha < 1$$

1. Déterminer l'équation de récurrence d'ordre deux décrivant l'évolution du prix p_t sur le marché. Donner dans le cas général la solution d'équilibre p_e de cette équation.
2. Dans les deux cas suivants :

(a) $a = 3, c = -1, b = -10, d = 190$

(b) $a = 5, c = -4, b = -10, d = 80$

discuter en fonction de α la forme générale des solutions de l'équation homogène associée et préciser le comportement asymptotique du prix solution générale de l'équation complète.

3. Donner la solution de l'équation de récurrence dans le deuxième cas quand $\alpha = 0, p_0 = 0, p_1 = 10$.

Chapitre 4

Notions sur les équations différentielles

Contenu

4.1	Équations différentielles linéaires d'ordre 1 à coefficients constants	37
4.1.1	Résolution de l'équation homogène	37
4.1.2	Résolution de l'équation complète	37
4.2	Équations différentielles d'ordre 2 à coefficients constants	38
4.2.1	Résolution de l'équation homogène	38
4.2.2	Résolution de l'équation complète	38
4.3	Notion de stabilité	39
4.3.1	Equation différentielle d'ordre 1	39
4.3.2	Equation différentielle d'ordre 2	39
4.4	Équations différentielles d'ordre un à coefficients non constants	40
4.4.1	Cas linéaire	40
4.4.2	Équation de Bernoulli	40
4.5	Exercices	41

4.1 Équations différentielles linéaires d'ordre 1 à coefficients constants

On cherche à résoudre une équation différentielle de la forme :

$$(E) : x'(t) = ax(t) + b(t)$$

où $t \mapsto x(t)$ est une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur un intervalle I , a une constante réelle et $b(t)$ une fonction continue sur I .

(On écrira parfois une telle équation sous la forme : $y' = ay + b(t)$)

On lui associe l'équation homogène :

$$(EH) : x'(t) = ax(t)$$

4.1.1 Résolution de l'équation homogène

Proposition 53

Les solutions de (EH) sont les fonctions de la forme

$$t \mapsto x(t) = \lambda e^{at}$$

où λ est une constante réelle arbitraire.

4.1.2 Résolution de l'équation complète

Proposition 54

On obtient toutes les solutions de (E) en ajoutant une solution particulière de (E) à la solution générale de (EH) .

À l'aide d'une solution particulière

- Si $b(t) = b$ une constante, il existe une solution particulière de (E) de la forme :
 - constante si $a \neq 0$
 - bt si $a = 0$
- Si $b(t) = P(t)$ un polynôme, il existe une solution particulière de la forme :
 - $Q(t)$ où Q est un polynôme de même degré que P si $a \neq 0$.
 - $tQ(t)$ où Q est un polynôme de même degré que P si $a = 0$.
- Si $b(t) = P(t)e^{\alpha t}$ où P est un polynôme, il existe une solution de la forme :
 - $Q(t)e^{\alpha t}$ où Q est un polynôme de même degré que P si $\alpha \neq a$.
 - $tQ(t)e^{\alpha t}$ où Q est un polynôme de même degré que P si $\alpha = a$.

Remarque : le troisième cas englobe les deux premiers.

Variation des constantes

On cherche directement les solutions de (E) sous la forme $x(t) = \lambda(t)e^{at}$ où $\lambda(t)$ est une fonction \mathcal{C}^1 sur I . On montre facilement l'équivalence :

$$\begin{aligned} x(t) = \lambda(t)e^{at} \text{ solution de } (E) &\iff \lambda'(t) = b(t)e^{-at} \\ &\iff \lambda(t) = \int b(t)e^{-at} dt \end{aligned}$$

Proposition 55

Soit t_0 et x_0 deux réels. Il existe alors une seule solution $t \mapsto x(t)$ de (E) telle que $x(t_0) = x_0$.

4.2 Équations différentielles d'ordre 2 à coefficients constants

Une telle équation s'écrit :

$$(E) : x''(t) + ax'(t) + bx(t) = f(t)$$

où a et b sont des constantes réelles et f une fonction continue sur un intervalle I . On lui associe, comme dans le cas précédent, l'équation homogène

$$(EH) : x''(t) + ax'(t) + bx(t) = 0$$

4.2.1 Résolution de l'équation homogène

On forme l'équation caractéristique du second degré :

$$(EC) : r^2 + ar + b = 0$$

Proposition 56

◆ Si $\Delta = a^2 - 4b > 0$, (EC) admet deux racines réelles distinctes r_1 et r_2 . Les solutions de (EH) sont alors les fonctions de la forme :

$$t \mapsto \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t} \quad \text{où } \lambda \text{ et } \mu \text{ sont des constantes réelles.}$$

◆ Si $\Delta = a^2 - 4b = 0$, (EC) admet une racine réelle r_1 . Les solutions de (EH) sont alors les fonctions de la forme :

$$t \mapsto (\lambda t + \mu) e^{r_1 t} \quad \text{où } \lambda \text{ et } \mu \text{ sont des constantes réelles.}$$

◆ Si $\Delta = a^2 - 4b < 0$, (EC) admet deux racines complexes conjuguées r_1 et \bar{r}_1 , avec par exemple $r_1 = \alpha + i\omega$, α et ω réels. Les solutions de (EH) sont alors les fonctions de la forme :

$$t \mapsto e^{\alpha t} (\lambda \cos \omega t + \mu \sin \omega t) \quad \text{où } \lambda \text{ et } \mu \text{ sont des constantes réelles.}$$

(que l'on peut aussi écrire $Ae^{\alpha t} \cos(\omega t + B)$, A et B réels.)

4.2.2 Résolution de l'équation complète

Proposition 57

On obtient toutes les solutions de (E) en ajoutant une solution particulière de (E) à la solution générale de (EH) .

Proposition 58

Si $f(t) = e^{rt} P(t)$ où P est un polynôme, il existe une solution particulière de (E) qui est de la forme :

- $e^{rt} Q(t)$ si r n'est pas solution de l'équation caractéristique.
- $e^{rt} t Q(t)$ si r est racine simple de (EC) .
- $e^{rt} t^2 Q(t)$ si r est racine double de (EC) .

où, à chaque fois, Q est un polynôme de même degré que P .

Remarque

◆ Ce résultat s'applique au cas où $f(t) = k$ une constante ($k = e^{0t} k$), au cas où $f(t) = P(t)$ et aussi au cas où $f(t) = e^{rt}$.

◆ On peut aussi utiliser la méthode de variation des constantes.



Proposition 59

Soit t_0 un élément de I , x_0 et x'_0 deux réels. Il existe alors une unique solution $x(t)$ de (E) telle que $x(t_0) = x_0$ et $x'(t_0) = x'_0$.

4.3 Notion de stabilité

On s'intéresse au comportement asymptotique des solutions, c'est à dire à leur limite en $+\infty$.



Définition 60

On dit qu'une solution constante d'une équation différentielle (E) est un équilibre de l'évolution régie par (E) , et on dit que cet équilibre est globalement stable si toute solution de (E) tend vers cette constante quand $t \rightarrow +\infty$.



Remarque

Si $(E) : x''(t) + ax'(t) + bx(t) = f(t)$ est une équation d'ordre 1 ou 2 (1 si $b = 0$), elle ne peut admettre de solution constante que si $f(t)$ est constante. Dans toute la suite de ce paragraphe, on supposera donc que $f(t) = c$ une constante. Si un équilibre n'est pas globalement stable, on appelle ensemble de stabilité de cet équilibre l'ensemble des conditions initiales telles que les solutions associées convergent vers cet équilibre. C'est un sous ensemble de \mathbb{R}^n où n est l'ordre de l'équation différentielle.

4.3.1 Equation différentielle d'ordre 1

Considérons une équation différentielle $(E) : x'(t) = ax(t) + b$ ($a \neq 0$) où b est une constante réelle. On peut alors voir facilement que la solution de (E) qui prend la valeur x_0 en 0 est donnée par :

$$x(t) = \left(x_0 + \frac{b}{a}\right) e^{at} - \frac{b}{a} \text{ et } t \mapsto -\frac{b}{a} \text{ est une solution constante, donc un équilibre.}$$



Proposition 61

L'équilibre $-\frac{b}{a}$ est globalement stable ssi $a < 0$.

4.3.2 Equation différentielle d'ordre 2

On considère une équation différentielle $(E) : x''(t) + ax'(t) + bx(t) = c$, où a, b, c sont des constantes réelles, d'équation caractéristique : $r^2 + ar + b = 0$



Proposition 62

les deux racines (réelles ou complexes, distinctes ou confondues) de l'équation $r^2 + ar + b = 0$ ont des parties réelles strictement négatives ssi $a > 0$ et $b > 0$.



Preuve

◆ Si les parties réelles sont strictement négatives, la somme des deux racines est strictement négative (que les racines soient réelles ou complexes). Or la somme vaut $-a$, donc $a > 0$. Comme le produit des racines vaut b , si les racines sont réelles négatives, leur produit est positif, et si les racines sont complexes, elles sont conjuguées, et leur produit vaut alors le carré de leur module, donc est positif. On a donc dans tous les cas $a > 0$ et $b > 0$.

◆ Supposons $a > 0$ et $b > 0$. Si les deux racines sont réelles, leur produit est positif, elles sont donc de même signe, et comme leur somme est négative, elles sont toutes les deux strictement négatives. Si les deux racines sont complexes conjuguées, leur somme vaut deux fois leur partie réelle, qui est donc strictement négative.

Proposition 63

Soit $(E) : x''(t) + ax'(t) + bx(t) = c$, qui admet une solution constante $\frac{c}{b}$ ($b \neq 0$). L'équilibre est globalement stable ssi $a > 0$ et $b > 0$.

Preuve

◆ Si les deux racines r_1 et r_2 sont réelles distinctes, la solution générale de (E) s'écrit :

$$x(t) = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t} + \frac{c}{b} \quad \text{où } \lambda \text{ et } \mu \text{ sont des constantes réelles.}$$

Le résultat en découle.

◆ S'il n'y a qu'une racine réelle double r_1 , la solution générale de (E) s'écrit :

$$(\lambda t + \mu) e^{r_1 t} + \frac{c}{b} \quad \text{où } \lambda \text{ et } \mu \text{ sont des constantes réelles}$$

Le résultat est immédiat.

◆ S'il y a deux racines complexes conjuguées de parties réelles α , la solution générale de (E) s'écrit :

$$e^{\alpha t} (\lambda \cos \omega t + \mu \sin \omega t) + \frac{c}{b} \quad \text{où } \lambda \text{ et } \mu \text{ sont des constantes réelles.}$$

Là encore, le résultat est immédiat.

4.4 Équations différentielles d'ordre un à coefficients non constants

4.4.1 Cas linéaire

On veut résoudre : $(E) : x'(t) = a(t)x(t) + b(t)$ où $a(t)$ et $b(t)$ sont des fonctions continues sur un intervalle I .
On lui associe l'équation homogène : $(EH) : x'(t) = a(t)x(t)$.

Résolution de l'équation homogène

Proposition 64

Soit $A(t)$ une primitive sur I de $a(t)$. La solution générale de (EH) est de la forme :

$$x(t) = \lambda e^{A(t)} = \lambda e^{\int a(t) dt} \quad \text{où } \lambda \text{ est une constante réelle}$$

Résolution de l'équation complète

Deux méthodes encore :

◆ on ajoute à la solution générale de (EH) une solution particulière de (E) .

◆ on utilise la méthode de variation des constantes : on cherche la solution générale de (E) sous la forme $x(t) = \lambda(t)e^{A(t)}$ et on montre facilement que :

$$x(t) = \lambda(t)e^{A(t)} \text{ solution de } (E) \iff \lambda(t) = \int b(t)e^{-A(t)} dt$$

D'où les solutions de (E) :

$$x(t) = e^{A(t)} \int b(t)e^{-A(t)} dt$$

4.4.2 Équation de Bernoulli

On appelle ainsi une équation de la forme :

$$(EB) : x'(t) = a(t)x(t) + b(t)[x(t)]^\alpha$$

où α est un réel. Si $\alpha = 0$ ou 1 , l'équation est linéaire. Si α n'est pas entier, on suppose $x(t) > 0$ sur I . Pour résoudre (EB) , on pose $y(t) = [x(t)]^{1-\alpha}$ (on suppose $\alpha \neq 0$ et de 1). Il est facile de voir que :

$$x(t) \text{ solution de } (EB) \iff y(t) \text{ solution de } \frac{1}{1-\alpha} y'(t) = a(t)y(t) + b(t)$$

et cette dernière équation est linéaire.

4.5 Exercices

Exercice 39

Pour chacune des équations différentielles suivantes, déterminer l'ensemble des fonctions solutions puis spécifier celle qui vérifie la condition initiale indiquée :

1. $y' - 2y = 7$ avec $y(0) = 5$

3. $y' - 3y = 2e^{-3t} + 1$ avec $y(0) = 0$

2. $2y' + 3y = 3t$ avec $y(0) = \frac{1}{3}$

4. $my' - y = e^{2t}$ avec $y(0) = 0$ et $m > 0$.

Exercice 40

Déterminer la solution des équations du second ordre suivantes avec les conditions initiales $y(0) = y'(0) = -1$. Discuter la stabilité des solutions quand t tend vers $+\infty$.

1. $y'' + 3y' + 2y = te^{-t}$

3. $y'' - 6y' + 9y = -2e^{3t}$

2. $y'' - 4y = 10$

4. $8y'' - 4y' + 3y = -3e^{-t}$

Exercice 41

Soit l'équation différentielle dépendant du paramètre réel m

$$(E) \quad y'' + 4y' + my = e^{-2t}$$

1. Soit (H) l'équation homogène associée et $w(t)$ la solution générale de (H) :

(a) donner la forme de $w(t)$ suivant les valeurs de m ;

(b) en déduire une condition nécessaire et suffisante sur m pour que toutes les fonctions vérifiant (H) tendent vers 0 lorsque $t \rightarrow +\infty$.

2. Suivant les valeurs de m

(a) déterminer la valeur d'équilibre de (E) ;

(b) préciser la nature de l'équilibre obtenu.

Exercice 42

Soit l'équation différentielle dépendant du paramètre réel non nul m

$$(E) \quad my'' + 3(m-1)y' + 3y = 6$$

1. Déterminer une solution particulière de (E) .

2. Quelle est la valeur d'équilibre de (E) ?

3. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur m pour que cet équilibre soit stable (utiliser les conditions de stabilité).

4. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur m pour que toutes les solutions de (E) présentent :

(a) des oscillations ;

(b) des oscillations amorties.

Exercice 43

Déterminer, selon les valeurs du paramètre réel m , une solution particulière de l'équation

$$y'' - 4y' + 4y = te^{mt}$$

Donner la solution générale de l'équation et préciser la nature de l'équilibre obtenu.

Exercice 44

On considère le marché d'un bien sur lequel se confrontent, à chaque instant t , une offre $S(t)$ et une demande $D(t)$. On désigne par $P(t)$ le prix constaté du bien à l'instant t et par $\widehat{P}(t)$ le prix espéré par les producteurs pour l'instant t . On fait l'hypothèse que le prix s'ajuste selon un niveau qui assure l'équilibre de l'offre et de la demande. On suppose que $S(t)$, $D(t)$ et $P(t)$ sont des fonctions continues et dérivables de la variable t et que le système est régi par les lois suivantes :

$$\begin{cases} S(t) = a\widehat{P}(t) - 20 & a \in \mathbb{R}, a > 0 \\ D(t) = -bP(t) + 200 & b \in \mathbb{R}, b > 0 \\ \widehat{P}(t) = P(t) + dP'(t) & d \in \mathbb{R}^* \end{cases}$$

1. Déterminer l'équation différentielle d'ordre 1 vérifiée par le prix.
2. Résoudre cette équation et donner la solution correspondant à un prix initial noté P_0 .
3. Discuter le comportement asymptotique de ce prix.
4. Déterminer la solution correspondant aux valeurs numériques suivantes :

$$a = 3, b = 2, d = 5/3, P_0 = 30$$

Exercice 45

On considère un système économique dans lequel le niveau du revenu national est déterminé par le niveau de la demande globale. En temps continu, ceci est exprimé par la relation suivante :

$$Y'(t) = a(D(t) - Y(t))$$

où $Y(t)$ est l'output national au temps t , $D(t)$ la demande globale et a un coefficient de réaction ($a > 0$). On suppose, d'autre part, que la demande globale est fonction du revenu national selon la relation :

$$D(t) = cY(t) + 1$$

où c est la propension marginale à consommer ($0 < c < 1$).

1. Déterminer l'équation différentielle linéaire vérifiée par $Y(t)$ et la résoudre en supposant que $Y(0) = 0$.
2. On suppose maintenant que la demande globale est formée de deux parties : l'une provenant des agents économiques privés et l'autre provenant du gouvernement. Si G est la demande effectivement réalisée par le gouvernement, on a désormais

$$D(t) = cY(t) + G(t) + 1$$

Si G^* est la valeur théorique de cette demande, on donne en outre les relations suivantes :

$$\begin{cases} G'(t) = G^*(t) - G(t) \\ G^*(t) = -\frac{1}{8} \times G(t) \end{cases}$$

Déterminer l'équation différentielle d'ordre 2 vérifiée par Y et la résoudre avec les données numériques suivantes :

$$a = 2 \quad c = \frac{3}{4} \quad Y(0) = 0 \quad Y'(0) = 2.$$

Chapitre 5

Espaces vectoriels

Contenu

5.1	Espaces vectoriels-Sous espaces vectoriels	44
5.1.1	Espaces vectoriels	44
5.1.2	Sous-espaces vectoriels	44
5.2	Bases des espaces vectoriels	46
5.2.1	Familles génératrices, familles libres	46
5.2.2	Bases	46
5.3	Applications linéaires	47
5.4	Exercices	49

5.1 Espaces vectoriels-Sous espaces vectoriels

\mathbb{K} désigne le corps des réels \mathbb{R} ou le corps des complexes \mathbb{C} .

5.1.1 Espaces vectoriels



Définition 65

On appelle structure de \mathbb{K} -espace vectoriel (ou espace vectoriel sur \mathbb{K}) la donnée d'un ensemble non vide E et de deux lois de compositions $+$ et \cdot telles que :

- $+$ est une loi de composition interne (lci) sur E qui est commutative, associative, qui possède un élément neutre (noté 0_E ou 0), et pour laquelle tout élément de E admet un symétrique dans E .
- \cdot est une loi de composition externe (lce) de $\mathbb{K} \times E$ dans E qui vérifie les 4 axiomes suivants :

$$\forall (u, v) \in E^2, \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2 :$$

- $1.u = u$
- $(\alpha + \beta).u = \alpha.u + \beta.u$
- $(\alpha\beta).u = \alpha.(\beta.u)$
- $\alpha.(u + v) = \alpha.u + \alpha.v$

Les éléments de E s'appellent des vecteurs et ceux de \mathbb{K} des scalaires.

Si u_1, u_2, \dots, u_n sont n vecteurs et $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sont n scalaires, l'élément de E égal à $\sum_{i=1}^n \lambda_i u_i$ s'appelle une combinaison linéaire (C.L.) de u_1, u_2, \dots, u_n .



Exemple

Exemples fondamentaux :

- $\mathbb{K}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n), x_i \in \mathbb{K}\}$ muni de :

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \\ \lambda \cdot (x_1, x_2, \dots, x_n) &= (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \end{aligned}$$

est un \mathbb{K} -espace vectoriel et $0_{\mathbb{K}^n} = (0, 0, \dots, 0)$.

- Soit D un ensemble non vide quelconque (presque toujours, D sera un intervalle de \mathbb{R} ou un sous ensemble de \mathbb{R}^n) et E est l'ensemble des applications de D dans \mathbb{K} . On le munit de :

$$\begin{aligned} f + g &: D \longrightarrow \mathbb{K} \\ x &\longrightarrow (f + g)(x) = f(x) + g(x) \\ \lambda \cdot f &: D \longrightarrow \mathbb{K} \\ x &\longrightarrow (\lambda \cdot f)(x) = \lambda f(x) \end{aligned}$$

C'est un \mathbb{K} -espace vectoriel qui a pour élément neutre l'application nulle sur D .

- L'ensemble des suites à valeurs dans \mathbb{K} , muni des opérations habituelles : $(u_n) + (v_n) = (u_n + v_n)$ et $\alpha(u_n) = (\alpha u_n)$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel dont l'élément neutre est la suite nulle (tous ses termes valent 0).

5.1.2 Sous-espaces vectoriels



Définition 66

Soit $(E, +, \cdot)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel. On appelle sous-espace vectoriel (sev) de E tout sous-ensemble non vide de E qui est un \mathbb{K} -espace vectoriel pour les mêmes lois que E .



Proposition 67

Soit $(E, +, \cdot)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel. Une partie F de E est un sev de E ssi : $\begin{cases} F \text{ est non vide} \\ F \text{ est stable par C.L.} \end{cases}$.



Exemple

- L'ensemble des n -uplets (x_1, x_2, \dots, x_n) tels que $\sum_{i=1}^n a_i x_i = 0$ où les a_i sont des éléments de \mathbb{K} fixés est un sev de \mathbb{K}^n .
- L'ensemble des fonctions dérivables sur un intervalle I qui vérifient une équation différentielle linéaire homogène.
- L'ensemble des suites d'éléments de \mathbb{K} qui vérifient une relation de récurrence linéaire sans second membre.
- Soit $(E, +, \cdot)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel. Soient u_1, u_2, \dots, u_n n éléments de E . Alors l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires de u_1, u_2, \dots, u_n est un sev de E . On dit que c'est le sev engendré par la partie $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ et on le note $\text{Vect}\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$.

La suite du paragraphe peut être omise en première lecture.



Proposition 68

Soient F_1, F_2, \dots, F_p p sev d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E . Alors $\bigcap_{i=1}^p F_i$ est un sev de E .



Définition 69

Soient F_1, F_2, \dots, F_p p sev d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E . On appelle somme de F_1, F_2, \dots, F_p l'ensemble des $x_1 + x_2 + \dots + x_p$ où $x_i \in F_i$ pour tout i . On note cet ensemble $F_1 + F_2 + \dots + F_p$ ($\sum_{i=1}^p F_i$).



Proposition 70

$F_1 + F_2 + \dots + F_p$ est un sev de E . C'est le plus petit sous espace de E qui contient tous les F_i .



Définition 71

Soient F_1, F_2, \dots, F_p p sev d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E . On dit que ces sev sont en somme directe si tout élément de $\sum_{i=1}^p F_i$ s'écrit d'une seule façon sous la forme $\sum_{i=1}^p x_i$, $x_i \in F_i$. (Autrement dit, $\sum_{i=1}^p x_i = \sum_{i=1}^p y_i$ avec x_i et y_i éléments de F_i pour tout i implique que $x_i = y_i$ pour tout i .) On note alors cette somme $F_1 \oplus F_2 \oplus \dots \oplus F_p$.



Proposition 72

Les sev F_i sont en somme directe ssi $F_i \cap \left(\sum_{j \neq i} F_j\right) = \{0\}$.

Cas particulier : deux sev F_1 et F_2 de E sont en somme directe ssi $F_1 \cap F_2 = \{0\}$.



Définition 73

Deux sev F_1 et F_2 de E sont dits supplémentaires si ils sont en somme directe et si $F_1 \oplus F_2 = E$. Ce qui équivaut à dire que tout élément de E s'écrit d'une seule façon comme somme d'un élément de F_1 et d'un élément de F_2 .

5.2 Bases des espaces vectoriels

5.2.1 Familles génératrices, familles libres



Définition 74

Soit $(E, +, \cdot)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel.

- Une famille finie (u_1, u_2, \dots, u_n) d'éléments de E est dite génératrice de E si tout élément de E peut s'écrire comme C.L. des u_i . Un \mathbb{K} -espace vectoriel qui admet une famille génératrice finie est dit de dimension finie (attention, il existe des sev qui n'admettent pas de famille génératrice finie, ils sont dits de dimension infinie).
- Une famille finie (u_1, u_2, \dots, u_n) d'éléments de E est dite libre (on dit aussi que les n éléments de la famille sont linéairement indépendants) si :

$$\forall (\alpha_i)_{i=1}^n \in \mathbb{K}^n, \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i = 0_E \implies \alpha_i = 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$$

Une famille qui n'est pas libre est liée (les éléments de la famille sont linéairement dépendants).

5.2.2 Bases



Définition 75

Une base de E est une famille finie qui est à la fois libre et génératrice de E .



Remarque

On peut voir facilement qu'une famille finie (u_1, u_2, \dots, u_n) est une base de E ssi tout élément de E s'écrit d'une façon unique comme combinaison linéaire des u_i . Si u est un élément de E et si $u = \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i$ est l'unique écriture de u comme combinaison linéaire des u_i , les coefficients α_i s'appellent les coordonnées de u dans la base (u_i) . On écrira $u \left(\begin{matrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{matrix} \right)$ et, dans la mesure du possible, on distinguera u de $U = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ le vecteur colonne des coordonnées de u .



Exemple

- Base canonique de \mathbb{K}^n : on pose $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ où le 1 se trouve à la $i^{\text{ème}}$ place. On montre facilement que $(e_i)_{i=1}^n$ est une base de \mathbb{K}^n . On l'appelle la base canonique de \mathbb{K}^n . Son intérêt est que si $u = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, alors ses coordonnées dans la base canonique sont $u \left(\begin{matrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{matrix} \right)$. Autrement dit, avec les notations précédentes, $U = {}^t u$.
- Si $\mathbb{K}_n[X]$ désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans \mathbb{K} et de degré $\leq n$, la famille $(p_i)_{i=0}^n$ où $p_i(X) = X^i$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$ que l'on appelle la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$. Là encore, si $P(X) = \sum_{i=0}^n \alpha_i X^i$, ses coordonnées dans la base canonique sont les α_i .
- Attention, $\mathbb{K}[X]$, espace vectoriel de tous les polynômes à coefficients dans \mathbb{K} ou l'espace des suites n'admettent pas de bases finies.

La suite du paragraphe peut être omise en première lecture.



Théorème 76

Théorème de la base incomplète : Soit E un \mathbb{K} -ev non réduit à $\{0\}$, (u_1, u_2, \dots, u_r) une famille génératrice de E et (v_1, v_2, \dots, v_s) une famille libre de E . On peut alors compléter la famille libre par des vecteurs choisis dans la famille génératrice de façon à obtenir une base de E .



Théorème 77

Soit E un \mathbb{K} -ev de dimension finie, non réduit à $\{0\}$. Alors E admet des bases et toutes ces bases ont le même nombre d'éléments. Ce nombre s'appelle la dimension de E et se note $\dim E$ (par convention, $\dim \{0\} = 0$).



Exemple

\mathbb{K}^n est un ev de dimension n sur \mathbb{K} . $\mathbb{K}_n[X]$ est de dimension $n + 1$ sur \mathbb{K} . $\mathbb{K}[X]$ est de dimension infinie.

On a en vrac les propriétés suivantes :



Remarque

- Toute sur-famille d'une famille génératrice est génératrice.
- Toute sous-famille d'une famille libre est libre.
- Une base est une famille libre maximale.
- Une base est une famille génératrice minimale.
- Si F est un sev d'un ev E de dimension finie, alors F est de dimension finie et $\dim F \leq \dim E$.
- Soit (u_1, u_2, \dots, u_n) une famille d'éléments de E . Cette famille est une base de E ssi tout élément de E s'écrit d'une seule façon comme C.L. des u_i .
- Soit E un ev de dimension n .
 - Toute famille libre de E a au plus n éléments.
 - Toute famille génératrice de E a au moins n éléments.
 - Toute famille libre de E à n éléments est une base de E .
 - Toute famille génératrice de E à n éléments est une base de E .



Définition 78

Soit (u_1, u_2, \dots, u_n) une famille d'éléments d'un \mathbb{K} -ev E . On appelle rang de la famille la dimension de $\text{Vect} \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$. On montre que ce rang est égal au nombre maximum de vecteurs linéairement indépendants dans la famille.



Proposition 79

Soient F_1, F_2, \dots, F_p p sev d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E . Alors $E = F_1 \oplus F_2 \oplus \dots \oplus F_p$ ssi la réunion de bases de chaque F_i est égale à une base de E .

5.3 Applications linéaires



Définition 80

Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels. On appelle application linéaire de E dans F toute application f de E dans F telle que :

$$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2, \forall (u, v) \in E^2, f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v)$$

L'ensemble des applications linéaires de E dans F se note $\mathcal{L}(E, F)$, et muni des lois classiques sur les applications, c'est un \mathbb{K} -ev. Une application linéaire de E dans \mathbb{K} s'appelle une forme linéaire. $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ se note E^* .



Définition 81

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

- On appelle noyau de f , et on note $\ker f$, le sous ensemble de E défini par :

$$\ker f = \{u \in E / f(u) = 0_F\}$$

- On appelle image de f , et on note Imf , le sous ensemble de F défini par :

$$Imf = \{v \in F / \exists u \in E \text{ avec } f(u) = v\}$$

Proposition 82

On obtient facilement que $\ker f$ est un sev de E et Imf est un sev de F . De plus :

$$\begin{aligned} f \text{ injective} &\iff \ker f = \{0_E\} \\ f \text{ surjective} &\iff Imf = F \end{aligned}$$

Proposition 83

Soit (e_1, e_2, \dots, e_n) une base de E (qui est donc de dimension finie) et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors :

- Imf est engendrée par $(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n))$. Sa dimension s'appelle le rang de f .
- f est complètement déterminée par $f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)$.
- On a : $\dim E = \dim Imf + \dim \ker f$
- Si de plus F est de même dimension finie n que E , alors :

$$f \text{ injective} \iff f \text{ surjective} \iff f \text{ bijective}$$

Proposition 84

Soit E un \mathbb{K} -ev de dimension finie n et (e_1, e_2, \dots, e_n) une base de E .

- Toute forme linéaire sur E est donnée par :

$$f \left(\sum_{i=1}^n x_i e_i \right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \quad \text{où } \alpha_i = f(e_i) .$$

- Une forme linéaire f non nulle sur E est surjective et son noyau est un hyperplan de E (c'est à dire un sev de dimension $n - 1$). Tout hyperplan de E est le noyau d'une forme linéaire non nulle.

5.4 Exercices

Exercice 46

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et V une partie de E . Vérifier que si $0 \notin V$, alors V n'est pas un sev de E .

Exercice 47

On donne ci-dessous des exemples d'ev E sur \mathbb{K} ainsi que des vecteurs v, v_1, v_2, \dots, v_n de E . Dire à chaque fois s'il est possible d'écrire v comme combinaison linéaire des v_i .

- $E = \mathbb{R}^3$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $v = (2, 4, 6)$, $v_1 = (1, 2, 3)$, $v_2 = (4, 5, 6)$, $v_3 = (7, 8, 9)$.
- $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $v = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$, $v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
- $E = \mathbb{C}^2$, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $v = (1 + 2i, 3 - 4i)$, $v_1 = (i, 0)$, $v_2 = (0, i)$.
- $E = \mathbb{C}^2$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $v = (1 + 2i, 3 - 4i)$, $v_1 = (i, 0)$, $v_2 = (0, i)$.

Exercice 48

Montrer que les sous ensembles suivants sont des sev de \mathbb{R}^3 :

- $A = \{(0, y, 0), y \in \mathbb{R}\}$
- $C = \{(x, y, x + y), x, y \in \mathbb{R}\}$
- $F = \{(x, y, z) \mid x + 2y - z = 0\}$

Exercice 49

Soit S l'ensemble des solutions du système :
$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 52y + 37z = 0 \\ 31x + 1287y + 389z = 0 \end{cases}$$
. S est-il un sev de \mathbb{R}^3 ? En est-il de même pour l'ensemble des solutions de n'importe quel système linéaire ?

Exercice 50

Déterminer si les familles suivantes de vecteurs de \mathbb{R}^4 sont libres :
 $\{(1, 0, 1, 0); (1, 0, 0, 1); (0, 0, 1, 1)\}$ $\{(1, 0, 1, 0); (1, 0, -1, 0); (1, 0, 0, 0)\}$

Exercice 51

Quelles sont les bases canoniques des espaces suivants :

- \mathbb{R}^n ?
- $\mathcal{M}_{(n,m)}(\mathbb{R})$?
- $\mathbb{R}_n[X]$?

Exercice 52

Est-ce que $\{(1, 2, 3); (4, 5, 12); (0, 8, 0)\}$ engendre \mathbb{R}^3 ?

Exercice 53

La famille $((1, 0, 2), (2, 5, 4), (-2, 1, 0))$ est une base de \mathbb{R}^3 (vérifiez-le). Trouvez les coordonnées de $(17, 26, 18)$ dans cette base. Trouvez les coordonnées d'un élément quelconque (x, y, z) dans cette base.

Exercice 54

Lesquelles de ces familles forment une base de \mathbb{R}^3 :

$$\{(1, 1, 1); (1, 2, 1)\} \quad \{(1, 1, 1); (1, 2, 1); (1, 0, 1)\} \quad \{(1, 1, 1); (1, 2, 1); (1, 0, 0); (0, 1, 0)\}$$

Exercice 55

Soit $V = \text{Vect}\{(1, -2, 0, 3), (2, 3, 0, 1), (2, -1, 2, 1)\}$. Trouver une base de V .

Même question si $V = \text{Vect}\{(1, 2, 3, 4), (2, 5, 10, 13), (1, 4, 11, 18), (0, 1, 4, 7)\}$.

Exercice 56

Soient $V_1 = \text{Vect}\{(1, 2, 3), (4, 5, 6)\}$, $V_2 = \text{Vect}\{(0, 3, 6), (0, 9, 12)\}$ et $V_3 = \text{Vect}\{(0, 3, 6), (10, 11, 12)\}$.

Quelles sont les dimensions de V_1, V_2, V_3 ? V_1 est-il égal à V_3 ?

Exercice 57

Montrer que l'ensemble des matrices symétriques de type 2×2 est un sous-espace vectoriel de l'espace des matrices 2×2 .

Les matrices $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}$ forment-elles une base de ce sous-espace?

Si oui, quelles sont les coordonnées de $\begin{pmatrix} 4 & -11 \\ -11 & -7 \end{pmatrix}$ dans cette base?

Chapitre 6

Rang et déterminant des matrices

Contenu

6.1	Rang des matrices	52
6.1.1	Espace des lignes-Espace des colonnes	52
6.1.2	Rang et inversibilité	53
6.1.3	Rang et systèmes linéaires	54
6.2	Déterminant des matrices carrées	55
6.2.1	Définition et propriétés	55
6.2.2	Calcul du déterminant	56
6.3	Exercices	56

6.1 Rang des matrices

6.1.1 Espace des lignes-Espace des colonnes

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

On peut décomposer A en lignes : $A = \begin{pmatrix} a_{1*} \\ \vdots \\ a_{m*} \end{pmatrix}$ ou en colonnes : $A = (a_{*1} \quad \cdots \quad a_{*n})$.

On associe à A deux sev de \mathbb{K}^n :

$\mathcal{L}(A) = Vect \{a_{1*}, \dots, a_{m*}\}$ le sev engendré par les lignes de A .

$\mathcal{C}(A) = Vect \{a_{*1}, \dots, a_{*n}\}$ le sev engendré par les colonnes de A .

On a le théorème suivant :



Théorème 85

Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$, $\dim \mathcal{L}(A) = \dim \mathcal{C}(A)$.

La démonstration de ce théorème repose sur plusieurs lemmes.



Lemme 86

Soit A, B, C trois matrices à coefficients dans \mathbb{K} , telles que $A = BC$.

Alors : $\mathcal{C}(A) \subset \mathcal{C}(B)$ et $\mathcal{L}(A) \subset \mathcal{L}(C)$



Preuve

$B \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ et $A \in \mathcal{M}_{mp}(\mathbb{K})$. On écrit le produit BC sous la forme :

$$BC = (b_{*1} \quad \cdots \quad b_{*n}) \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{np} \end{pmatrix}$$

Ce qui donne les colonnes de A :

$$a_{*i} = \sum_{j=1}^n b_{*j} c_{ji}$$

Donc les colonnes de A sont des combinaisons linéaires des colonnes de B et donc $\mathcal{C}(A) \subset \mathcal{C}(B)$.

On procède de même pour l'autre inclusion en décomposant C en lignes :

$$BC = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{1*} \\ \vdots \\ c_{n*} \end{pmatrix} = A = \begin{pmatrix} a_{1*} \\ \vdots \\ a_{m*} \end{pmatrix}$$

D'où :

$$a_{i*} = \sum_{j=1}^n b_{ij} c_{j*}$$

Ce qui prouve que $\mathcal{L}(A) \subset \mathcal{L}(C)$.



Lemme 87

Soit A, B_1, C_2 trois matrices, $A \in \mathcal{M}_{mp}(\mathbb{K})$, $B_1 \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$ et $C_2 \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$

1. Si $\mathcal{C}(A) \subset \mathcal{C}(B_1)$, il existe alors une matrice $C_1 \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ telle que $A = B_1 C_1$
2. Si $\mathcal{L}(A) \subset \mathcal{L}(C_2)$, il existe alors une matrice $B_2 \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$ telle que $A = B_2 C_2$

 Preuve

Si $\mathcal{C}(A) \subset \mathcal{C}(B_1)$, les colonnes de A sont des C.L. des colonnes de B_1 . On peut donc écrire :

$$a_{*i} = \sum_{j=1}^n c_{ji} b_{*j} = a_{*i} = \sum_{j=1}^n b_{*j} c_{ji} \text{ pour } i = 1, 2, \dots, p$$

Il suffit alors de poser $C_1 = (c_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}}$. De même pour 2..

 Preuve

Preuve du théorème : Soit $c = \dim \mathcal{C}(A)$ et $l = \dim \mathcal{L}(A)$. On choisit une base (x_1, \dots, x_c) de $\mathcal{C}(A)$. Les x_i sont des éléments de \mathbb{K}^m . Leurs coordonnées dans la base canonique de \mathbb{K}^m , écrites en colonnes, donnent une matrice $B_1 \in \mathcal{M}_{mc}(\mathbb{K})$ telle que $\mathcal{C}(A) = \mathcal{C}(B_1)$. D'après le lemme, il existe alors une matrice $C_1 \in \mathcal{M}_{cn}(\mathbb{K})$ telle que $A = B_1 C_1$. On a alors $\mathcal{L}(A) \subset \mathcal{L}(C_1)$ ce qui prouve que :

$$l \leq \dim \mathcal{L}(C_1) \leq c$$

Pour obtenir l'inégalité $c \leq l$, on choisit une base (y_1, \dots, y_l) de $\mathcal{L}(A)$ dans \mathbb{K}^n et on écrit en ligne les coordonnées des y_i dans la base canonique de \mathbb{K}^n . On obtient ainsi une matrice C_2 de $\mathcal{M}_{ln}(\mathbb{K})$ telle que $\mathcal{L}(A) = \mathcal{L}(C_2)$ et on termine comme précédemment.

On peut donc donner la définition suivante :

 Définition 88

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$. On appelle rang de A la dimension de $\mathcal{C}(A)$ (ou de $\mathcal{L}(A)$). On a clairement :

$$\text{rang} A \leq \min(m, n) \text{ et } \text{rang} A = \text{rang} ({}^t A)$$

Il est à peu près évident que les opérations élémentaires ne modifient pas le rang d'une matrice. Pour calculer le rang d'une matrice, il suffit donc de l'échelonner par rapport à ses lignes (resp. ses colonnes) et le rang est alors égal au nombre de lignes (resp. de colonnes) non nulles de la matrice échelonnée. C'est donc aussi le nombre de pivots non nuls d'une réduite de Gauss-Jordan de la matrice.

 Proposition 89

Soit A, B, C trois matrices telles que $A = BC$. Alors $\text{rang} A \leq \min(\text{rang} B, \text{rang} C)$.

Preuve : Si $A = BC$, on sait que $\mathcal{C}(A) \subset \mathcal{C}(B)$ et $\mathcal{L}(A) \subset \mathcal{L}(C)$. Ce qui donne bien le résultat.

6.1.2 Rang et inversibilité

 Proposition 90

Soit $A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$. A est inversible à gauche (resp. à droite) ssi $\text{rang} A = n$ (resp. $\text{rang} A = m$).

 Preuve

Supposons A inversible à gauche : il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_{nm}(\mathbb{K})$ telle que : $BA = I_n$. Mézalors :

$$\text{rang} I_n \leq \min(\text{rang} A, \text{rang} B) \Rightarrow \text{rang} A \geq n \Rightarrow \text{rang} A = n$$

Réciproquement, supposons que $\text{rang} A = n$. Comme $\mathcal{L}(A)$ est un sev de \mathbb{K}^n , $\mathcal{L}(A) = \mathbb{K}^n = \mathcal{L}(I_n)$. Il existe alors une matrice $B \in \mathcal{M}_{nm}(\mathbb{K})$ telle que $I_n = BA$. A est donc inversible à gauche. Même type de raisonnement pour l'inversibilité à droite.



Corollaire 91

Toute matrice inversible est carrée, et pour une matrice carrée A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a :

$$A \text{ inversible} \iff \text{rang}A = n$$

(On dit aussi régulière pour inversible).



Corollaire 92

Le rang d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$ est égal à l'ordre de la plus grande sous matrice carrée régulière que l'on peut extraire de A .



Preuve

Soit $r = \text{rang}A$. Si $r = 0$, il n'y a rien à dire. On suppose $r > 0$. Il y a donc dans A r lignes linéairement indépendantes. Soit $A' \in \mathcal{M}_{rn}(\mathbb{K})$ formées de ces r lignes linéairement indépendantes. Il est clair que $\text{rang}A' = r$. Il y a donc dans A' r colonnes linéairement indépendantes. Soit A'' extraite de A' et formée de ces r colonnes. Alors A'' est carrée et régulière extraite de A . Donc le rang d'une plus grande matrice régulière extraite de A est $\geq r$.

Inversement, si A' est régulière de rang s extraite de A ($s \geq 1$), on la complète en lignes par exemple et on obtient une matrice $A'' \in \mathcal{M}_{ms}(\mathbb{K})$ de rang s . Il existe alors s colonnes de A'' qui sont linéairement indépendantes. Ce sont des colonnes de A qui sont linéairement indépendantes, donc $\text{rang}A \geq s$.

6.1.3 Rang et systèmes linéaires

Soit

$$(S) : \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

On l'écrit $AX = B$ avec $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$ $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m1}(\mathbb{K})$.

On note aussi A' la matrice complète du système.



Proposition 93

Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) (S) admet au moins une solution.

(ii) $\text{rang}A' = \text{rang}A$.

(iii) $B \in \mathcal{C}(A)$. En supposant ces conditions satisfaites, la solution est unique ssi $\text{rang}A = n$, ou encore si et seulement si les colonnes de A sont linéairement indépendantes.

 Preuve

(i) \Leftrightarrow (iii) : c'est évident car le système s'écrit $x_1 a_{*1} + \dots + x_n a_{*n} = B$.

Donc (S) admet une solution $\Leftrightarrow B \in \mathcal{C}(A)$.

(iii) \Rightarrow (ii) : si $B \in \mathcal{C}(A)$, alors $B = C.L.(a_{*1}, \dots, a_{*n})$ donc $Vect\{a_{*1}, \dots, a_{*n}, B\} = Vect\{a_{*1}, \dots, a_{*n}\}$ et $rang A = rang A'$.

(ii) \Rightarrow (iii) : Soit $r = rang A = rang A'$. Si $r = 0$, il n'y a rien à dire. On suppose donc $r > 0$. Il y a dans A r colonnes linéairement indépendantes. Soit A'' la matrice qu'elles forment. Alors $rang(A''|B) = r$ où $(A''|B)$ désigne la juxtaposition de A'' et de B . Donc B est combinaison linéaire des colonnes de A'' , donc des colonnes de A .

Supposons maintenant que $B \in \mathcal{C}(A)$:

◆ Si les colonnes de A sont linéairement indépendantes, elles forment une base de $\mathcal{C}(A)$, d'où l'unicité.

◆ Si unicité, soit $\sum_{i=1}^n x_i a_{*i} = B$ une solution. Soit alors n réels $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ tels que $\sum_{i=1}^n \alpha_i a_{*i} = 0$. On a alors en additionnant : $\sum_{i=1}^n (x_i + \alpha_i) a_{*i} = B$ et l'unicité de la solution implique que tous les α_i sont nuls, ce qui montre que la famille des colonnes de A est libre.

6.2 Déterminant des matrices carrées

6.2.1 Définition et propriétés

Notations : Soit A une matrice carrée (a_{ij}) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ($n \geq 1$). On écrit :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1*} \\ \vdots \\ a_{n*} \end{pmatrix} \text{ où } a_{i*} \text{ est la } i^{\text{ème}} \text{ ligne de la matrice.}$$

 Théorème 94

Il existe une unique application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans \mathbb{K} , appelée déterminant et notée \det , possédant les trois propriétés suivantes :

(1) $\forall i = 1, \dots, n \quad \forall a_{1*}, \dots, a_{i-1*}, a_{i+1*}, \dots, a_{n*} \quad \forall \alpha$ et β de \mathbb{K} et $\forall x$ et y de \mathbb{K}^n

$$\det \begin{pmatrix} a_{1*} \\ \vdots \\ a_{i-1*} \\ \alpha x + \beta y \\ a_{i+1*} \\ \vdots \\ a_{n*} \end{pmatrix} = \alpha \det \begin{pmatrix} a_{1*} \\ \vdots \\ a_{i-1*} \\ x \\ a_{i+1*} \\ \vdots \\ a_{n*} \end{pmatrix} + \beta \det \begin{pmatrix} a_{1*} \\ \vdots \\ a_{i-1*} \\ y \\ a_{i+1*} \\ \vdots \\ a_{n*} \end{pmatrix}$$

(\det est une forme n - linéaire par rapport aux lignes)

(2) \det est alternée par rapport aux lignes, c'est à dire que : $a_{i*} = a_{j*}$ pour $i \neq j \implies \det \begin{pmatrix} a_{1*} \\ \vdots \\ a_{i*} \\ \vdots \\ a_{j*} \\ \vdots \\ a_{n*} \end{pmatrix} = 0$.

(3) $\det(I_n) = 1$.

 Remarque

Conséquences :

- La valeur de $\det A$ ne change pas si on remplace une ligne par la somme de cette ligne et d'un multiple d'une autre ligne.
- La valeur de $\det A$ est changée en son opposée si on échange deux lignes.
- La valeur de $\det A$ est multipliée par λ si on multiplie une ligne par λ , et donc $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$.

Les preuves sont évidentes (pour (2), calculer de deux façons $\det(a_{1*}, \dots, a_{i*} + a_{j*}, \dots, a_{i*} + a_{j*}, \dots, a_{n*})^T$).

Proposition 95

Pour toutes matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a :

- (i) $\det A \neq 0 \iff A$ régulière
- (ii) $\det(AB) = \det A \cdot \det B$
- (iii) $\det({}^t A) = \det A$.

Tout ceci se démontre en utilisant les réduites de Gauss-Jordan et les matrices élémentaires (voir exercice).

Remarque

Conséquences :

$\det({}^t A) = \det A$ montre que \det est une forme n -linéaire alternée des colonnes et $\det(AB) = \det A \cdot \det B$ montre que si A est régulière, $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$ et que $\det(ABA^{-1}) = \det B$ pour toute matrice B .

6.2.2 Calcul du déterminant

Proposition 96

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ($n \geq 2$). Pour tout couple (i, j) , on appelle A_{ij} la matrice de $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ obtenue en supprimant dans A la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne. On a alors :

- $\forall k = 1, 2, \dots, n \quad \det A = \sum_{l=1}^n (-1)^{l+k} a_{lk} \det A_{lk}$ (développement suivant la $k^{\text{ème}}$ colonne)
- $\forall i = 1, 2, \dots, n \quad \det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}$ (développement suivant la $i^{\text{ème}}$ ligne)

On admettra cette proposition, qui se démontre par récurrence sur n . Le scalaire $\det A_{ij}$ s'appelle le mineur de a_{ij} dans A et le scalaire $(-1)^{i+j} \det A_{ij}$ s'appelle son cofacteur. On associe à A la matrice des cofacteurs, que l'on notera $\text{cof} A$, qui vaut donc $\text{cof} A = \left((-1)^{i+j} \det A_{ij} \right)_{(i,j)}$.

On a le résultat (admis lui aussi) :

Proposition 97

Soit A une matrice carrée régulière. On a :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} {}^t (\text{cof} A)$$

Corollaire 98

Soit $AX = B$ un système linéaire où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et X et B appartiennent à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Soit B_i la matrice obtenue en remplaçant dans A la $i^{\text{ème}}$ colonne par B . Si A est régulière, les solutions x_i sont données par :

$$x_i = \frac{\det B_i}{\det A} \text{ pour } i = 1, 2, \dots, n. \quad (\text{Formules de Cramer})$$

Preuve

Supposons A régulière. On développe $\det B_i$ suivant la $i^{\text{ème}}$ colonne :

$$\det B_i = \sum_{k=1}^n (-1)^{i+k} b_{ki} \det (B_i)_{ki} = \sum_{k=1}^n (-1)^{i+k} b_{ki} \det A_{ki}$$

ce qui montre que $\det B_i$ est la $i^{\text{ème}}$ ligne de la matrice colonne ${}^t (\text{cof} A) B$. Or :

$$AX = B \iff X = A^{-1}B = \frac{1}{\det A} {}^t (\text{cof} A) B$$

6.3 Exercices

Exercice 58

Calculer le rang des matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \\ 2 & 8 & 6 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 10 & 13 \\ 1 & 4 & 11 & 14 \\ 0 & 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

Trouver une sous matrice de B , carrée et régulière, dont l'ordre soit égal au rang de B .

Exercice 59

Calculer le rang de la matrice suivante en fonction du paramètre réel m :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & m & 2 \\ m-2 & -3/2 & -1 \\ 2m & 2(m+1) & m+1 \end{pmatrix}$$

Exercice 60

Pour chacune des matrices suivantes, donner une base du noyau et une base de l'image :

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 & 1 & -5 & 1 \\ 8 & 5 & -10 & 8 \\ -4 & 2 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

Exercice 61

Pour chacune des matrices suivantes, déterminer une base de l'espace colonne, de l'espace ligne et du noyau :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 9 & 8 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 62

Calculer le déterminant des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{pmatrix}$$

Exercice 63

Calculer sous forme factorisée les déterminants suivants :

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix} & \text{b)} \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} & \text{c)} \begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix} & \text{d)} \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix} \\ \text{e)} \begin{vmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{vmatrix} & & & & \end{array}$$

Exercice 64

On considère une matrice $A = (a_{ij})$ de $\mathcal{M}_n(K)$ telle que $a_{ij} = 0$ si $j \leq n - i$. Cela signifie que A est de la forme :

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{1,n} \\ 0 & & 0 & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & a_{n-1,2} & & & a_{n-1,n} \\ a_{n,1} & & \cdots & & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Calculer son déterminant.

Exercice 65

Pour illustrer ces chapitres : la notion de portefeuille.

On suppose qu'il y a A actifs d'investissement qu'un investisseur peut acquérir au début de la période et revendre à la fin de cette période. On suppose qu'on a S climats financiers possibles (les états de la nature). Un seul de ces états se produira au cours de la période. Si v_i est la valeur courante de l'actif i et y_{si} sa valeur à la fin de la période si l'état s se produit, on appelle rendement de l'actif i dans l'état s : $\mathcal{R}_{si} = \frac{y_{si}}{v_i}$ on note $\mathcal{R} = (R_{si})$ la matrice $S \times A$ des rendements.

L'investisseur dispose d'un patrimoine w_0 . Soit n_i la quantité d'actif i qu'il achète ($n_i \geq 0$ ou $n_i \leq 0$). On a : $\sum_{i=1}^A n_i v_i = w_0$. On pose : $\frac{n_i v_i}{w_0} = x_i$. C'est la part du patrimoine investie dans l'actif i . Le A -uplet (x_1, \dots, x_A) tel que $\sum_{i=1}^A x_i = 1$ s'appelle un portefeuille, les x_i sont les parts du portefeuille. Le rendement dans l'état s du portefeuille est : $R_s = \frac{\sum_{i=1}^A y_{si} n_i}{w_0} = \sum_{i=1}^A x_i R_{si}$.

Un portefeuille est dit sans risque s'il possède le même rendement dans tous les états de la nature. Il est dit duplicable s'il existe un portefeuille différent qui possède le même rendement que lui dans tous les états de la nature. Un état s^* est dit assurable s'il existe une portefeuille dont le rendement soit strictement positif dans l'état s^* et nul dans tous les autres états.

1. Montrer qu'il existe un portefeuille sans risque ssi $\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ appartient à l'espace colonne de \mathcal{R} , c'est à dire ssi le système $\mathcal{R}X = \mathbf{1}$ admet une solution. En particulier, montrer que si $\text{rang}(\mathcal{R}) = S$, il existe un portefeuille sans risque.

2. Montrer que l'état s^* est assurable ssi le système $RX = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ (où le 1 se trouve à la s^* ligne) admet

(au moins) une solution.

3. Tous les états sont assurables ssi $\text{rang}(\mathcal{R}) = S$.
4. Il existe un portefeuille duplicable ssi $\text{rang}(\tilde{\mathcal{R}}) < A$ où $\tilde{\mathcal{R}}$ est la matrice \mathcal{R} à laquelle on a ajouté une $s + 1^{\text{ème}}$ ligne formée de 1. Montrer qu'alors tous les portefeuilles sont duplicables.

Chapitre 7

Applications linéaires

Contenu

7.1	Définition et premières propriétés	60
7.1.1	Notion d'application linéaire	60
7.1.2	Applications linéaires et sous espaces vectoriels	60
7.1.3	Composition	61
7.2	Applications linéaires en dimension finie	61
7.2.1	Applications linéaires et bases	61
7.2.2	Théorème du rang (ou des dimensions)	62
7.2.3	Quelques notions sur les formes linéaires	63
7.3	Matrices et applications linéaires	64
7.3.1	Définitions et opérations	64
7.3.2	Changement de base	65
7.4	Exercices	66

7.1 Définition et premières propriétés

7.1.1 Notion d'application linéaire



Définition 99

Soit E et F deux \mathbb{K} -ev ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}). On dit qu'une application $\varphi : E \rightarrow F$ est une application \mathbb{K} -linéaire ou que φ est un homomorphisme de \mathbb{K} -ev si :

$$\begin{aligned} \forall (u, v) \in E^2 & \quad \varphi(u + v) = \varphi(u) + \varphi(v) \\ \forall \alpha \in \mathbb{K}, \quad \forall u \in E & \quad \varphi(\alpha u) = \alpha \varphi(u) \end{aligned}$$



Proposition 100

Soit $\varphi : E \rightarrow F$, E et F deux \mathbb{K} -ev. Alors φ est linéaire ssi :

$$\forall (u, v) \in E^2 \quad \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2 \quad \varphi(\alpha u + \beta v) = \alpha \varphi(u) + \beta \varphi(v)$$

et on a alors :

$$\forall (u_1, \dots, u_n) \in E^n \quad \forall (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n \quad \varphi\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i u_i\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi(u_i)$$



Remarque

◆ Si φ est linéaire, $\varphi(0) = 0$.

◆ On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F et $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans E (endomorphismes de E). Il est facile de voir que $(\mathcal{L}(E, F), +, \cdot)$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel.

7.1.2 Applications linéaires et sous espaces vectoriels



Proposition 101

Soit E et F deux \mathbb{K} -ev et $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors, pour tout sev E_1 de E , $\varphi(E_1)$ est un sev de F . En particulier, $\varphi(E)$ est un sev de F , qui s'appelle l'image de φ et qui se note $Im\varphi$.

La preuve est évidente, il suffit d'écrire que $\varphi(E_1) = \{\varphi(x) \text{ où } x \in E_1\}$.



Proposition 102

Soit E et F deux \mathbb{K} -ev et $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors, pour tout sev F_1 de F , $\varphi^{-1}(F_1)$ est un sev de E . En particulier, $\varphi^{-1}(\{0\})$ est un sev de E qui s'appelle le noyau de φ et que l'on note $\ker \varphi$.

Preuve : tout est trivial, il suffit de savoir que : $\varphi^{-1}(F_1) = \{x \in E / \varphi(x) \in F_1\}$.



Proposition 103

Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors :

- φ surjective $\iff Im\varphi = F$
- φ injective $\iff \ker \varphi = \{0\}$

7.1.3 Composition

Proposition 104

Soit E, F et G trois \mathbb{K} -ev. Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\psi \in \mathcal{L}(F, G)$. Alors $\psi \circ \varphi \in \mathcal{L}(E, G)$.

Proposition 105

Soit E et F deux \mathbb{K} -ev et $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$. Si φ est bijective, alors $\varphi^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$.

Vocabulaire : si $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ et si φ est bijective, on dit que φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels et que E et F sont deux ev isomorphes. Un endomorphisme bijectif de E s'appelle un automorphisme de E .

7.2 Applications linéaires en dimension finie

7.2.1 Applications linéaires et bases

Proposition 106

Soit E et F deux \mathbb{K} -ev, E de dimension finie n . Soit $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ une base de E et u_1, u_2, \dots, u_n n vecteurs de F . Il existe alors une unique application linéaire φ de E dans F telle que, pour tout $i = 1, 2, \dots, n$ $\varphi(e_i) = u_i$. Autrement dit, une application linéaire est déterminée de manière unique par l'image des vecteurs d'une base de E .

Preuve

Il est clair que l'application φ définie par $\varphi(\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i$ est l'unique application linéaire qui convient.

Proposition 107

Soit $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ une base de E et $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors $\{\varphi(e_1), \varphi(e_2), \dots, \varphi(e_n)\}$ est une famille génératrice de $Im\varphi$. On définit le rang de φ par : $rang\varphi = \dim Im\varphi$.

Preuve

Un élément de $Im\varphi$ s'écrit $\varphi(u) = \varphi(\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i)$ (car $(e_i)_i$ est une base de E).
 $= \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi(e_i)$ ce qui prouve le résultat. Remarque : $rang\varphi \leq \dim E$ et, si F est aussi de dimension finie, $rang\varphi \leq \dim F$.

Proposition 108

Soit E de dimension finie et $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors :

$$\varphi \text{ injective} \iff rang\varphi = \dim E$$

Si de plus F est de dimension finie, alors :

$$\varphi \text{ surjective} \iff rang\varphi = \dim F$$

et donc si E et F sont de dimensions finies, alors :

$$\varphi \text{ bijective} \iff rang\varphi = \dim E = \dim F$$

7.2.2 Théorème du rang (ou des dimensions)



Théorème 109

Soit E un \mathbb{K} -ev de dimension finie n et $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors :

$$\dim E = \dim \ker \varphi + \text{rang} \varphi$$



Preuve

Soit (e_1, \dots, e_p) une base de $\ker \varphi$. On la complète en une base de E par (e_{p+1}, \dots, e_n) . On sait que $(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_p), \varphi(e_{p+1}), \dots, \varphi(e_n))$ est une famille génératrice de $\text{Im} \varphi$. Comme les e_i pour $i = 1, \dots, p$ sont dans $\ker \varphi$, $\varphi(e_1) = \dots = \varphi(e_p) = 0$. Donc la famille $(\varphi(e_{p+1}), \dots, \varphi(e_n))$ est génératrice de $\text{Im} \varphi$. Montrons qu'elle est libre : soit α_i des scalaires tels que :

$$\sum_{i=p+1}^n \alpha_i \varphi(e_i) = 0 \Rightarrow \varphi \left(\sum_{i=p+1}^n \alpha_i e_i \right) = 0 \Rightarrow \sum_{i=p+1}^n \alpha_i e_i \in \ker \varphi \Rightarrow \sum_{i=p+1}^n \alpha_i e_i = \sum_{i=1}^p \beta_i e_i$$

$$\Rightarrow \sum_{i=p+1}^n \alpha_i e_i - \sum_{i=1}^p \beta_i e_i = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0 \text{ et } \beta_i = 0 \text{ (les } e_i \text{ forment une base)} \Rightarrow \text{la famille } (\varphi(e_{p+1}), \dots, \varphi(e_n)) \text{ est libre. C'est donc une base de } \text{Im} \varphi, \text{ donc } \text{rang} \varphi = n - p, \text{ ce qui donne l'égalité.}$$



Corollaire 110

Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$, E et F deux \mathbb{K} -ev tous les deux de dimensions finies. Alors φ est bijective ssi il existe une base de E qui a pour image par φ une base de F , et alors toute base de E a pour image par φ une base de F .



Preuve

Soit $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ une base de E telle que $\{\varphi(e_1), \varphi(e_2), \dots, \varphi(e_n)\}$ soit une base de F . Alors $\dim E = \dim F$. Mais $\dim E = \text{rang} \varphi + \dim \ker \varphi$. Comme $\text{rang} \varphi = n$, on a $\dim \ker \varphi = 0$ donc φ est injective et comme $\text{Im} \varphi = F$, φ est surjective, donc bijective. Soit alors φ isomorphisme de E dans F et $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ une base de E . On sait que $\dim F = n$. Comme $\{\varphi(e_1), \varphi(e_2), \dots, \varphi(e_n)\}$ est une famille génératrice de $\text{Im} \varphi = F$ qui a n éléments, c'est une base de F .

On a la proposition évidente suivante :



Proposition 111

Deux \mathbb{K} -ev de dimension finie sont isomorphes ssi ils ont même dimension. En particulier, tout \mathbb{K} -ev de dimension n est isomorphe à \mathbb{K}^n .



Proposition 112

Soit E et F deux \mathbb{K} -ev de même dimension finie n et φ linéaire de E dans F . Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) φ est bijective
- (ii) φ est surjective
- (iii) φ est injective.



Preuve

C'est une conséquence immédiate du théorème du rang.

7.2.3 Quelques notions sur les formes linéaires

On suppose dans toute la suite que E est un \mathbb{K} -ev de dimension finie.



Définition 113

Soit E un \mathbb{K} -ev. On appelle forme linéaire sur E toute application linéaire de E dans \mathbb{K} . $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ se note E^* et s'appelle le dual de E .



Proposition 114

Soit E un \mathbb{K} -ev de dimension finie n . Le noyau de toute forme linéaire non nulle est un hyperplan de E (i.e. un sev de E de dimension $n - 1$). Inversement, tout hyperplan de E peut être considéré comme le noyau d'une forme linéaire non nulle.



Preuve

Soit $\varphi \in E^*$, φ non nulle. $\text{Im}\varphi$ est un sev de \mathbb{K} , donc de dimension 0 ou 1. Comme φ est non nulle, $\text{rang}\varphi = 1$ et donc $\dim \ker \varphi = n - 1$. Si maintenant H est un hyperplan de E , on choisit une base (e_1, \dots, e_{n-1}) de H que l'on complète par un vecteur e_n en une base de E . φ linéaire définie par :

$$\begin{cases} \varphi(e_i) = 0 \text{ si } i = 1, 2, \dots, n - 1 \\ \varphi(e_n) = 1 \end{cases} \quad \text{répond à la question.}$$



Proposition 115

Soit E un \mathbb{K} -ev de dimension n et (e_1, \dots, e_n) une base de E . Alors toute forme linéaire sur E est de la forme :

$$\begin{aligned} \varphi & : E \rightarrow \mathbb{K} \\ u & = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i \rightarrow \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i \quad \text{où les } a_i \text{ sont des éléments fixés dans } \mathbb{K}. \end{aligned}$$



Preuve

Il suffit de poser $a_i = \varphi(e_i)$.



Proposition 116

Soit E un \mathbb{K} -ev de dimension n et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Pour tout $i = 1, 2, \dots, n$ on définit la forme linéaire e_i^* par :

$$e_i^*(e_j) = \delta_{ij} \quad \text{où } \delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$$

Alors la famille (e_1^*, \dots, e_n^*) est une base de E^* . On l'appelle la base duale de la base \mathcal{B} . En particulier, $\dim E^* = n$ et E et E^* sont isomorphes.



Preuve

Soit φ une forme linéaire sur E . Soit, pour tout i , $\varphi(e_i) = a_i$. Il est à peu près clair que $\varphi = \sum_{i=1}^n a_i e_i^*$. La famille (e_i^*) est donc génératrice de E^* . Si maintenant $\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i^* = 0$, alors, pour tout $j = 1, 2, \dots, n$, on a $(\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i^*)(e_j) = 0$ et donc $\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i^*(e_j) = 0$ ce qui donne $\alpha_j = 0$ pour tout j . La famille est donc libre.

7.3 Matrices et applications linéaires

Dans toute la suite, les ev sont de dimension finie sur \mathbb{K} .

7.3.1 Définitions et opérations



Définition 117

Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ où E et F sont deux \mathbb{K} -ev, $\dim E = n$ et $\dim F = m$. Soit $\mathcal{B} = (e_i)_{i=1}^n$ une base de E , $\mathcal{C} = (f_j)_{j=1}^m$ une base de F . On appelle matrice de φ dans les bases \mathcal{B} et \mathcal{C} la matrice $(a_{ij}) \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$ où a_{ij} est la $i^{\text{ème}}$ composante de $\varphi(e_j)$ dans la base \mathcal{C} .

On obtient cette matrice par :

$$\begin{matrix} & \varphi(e_1) & \varphi(e_2) & \cdots & \varphi(e_n) \\ \begin{matrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_m \end{matrix} & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{matrix}$$

On notera cette matrice par $M_{\mathcal{BC}}(\varphi)$ ou, s'il n'y a pas ambiguïté sur les bases, $M(\varphi)$.



Proposition 118

Soit M la matrice de φ dans les bases \mathcal{B} et \mathcal{C} . Soit u un élément quelconque de E et X le vecteur colonne de ses coordonnées dans la base \mathcal{B} . Alors le vecteur colonne des coordonnées de $\varphi(u)$ dans la base \mathcal{C} est $Y = MX$.



Proposition 119

Soit \mathcal{B} une base de E et \mathcal{C} une base de F . Alors l'application

$$\begin{aligned} \Phi & : \mathcal{L}(E, F) \rightarrow \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K}) \\ \varphi & \rightarrow \Phi(\varphi) = M_{\mathcal{BC}}(\varphi) \end{aligned}$$

est un isomorphisme d'espace vectoriel.

La preuve est triviale. Il faut retenir que si φ et ψ sont deux applications linéaires de E dans F et si α est un réel, alors :

$$M_{\mathcal{BC}}(\varphi + \psi) = M_{\mathcal{BC}}(\varphi) + M_{\mathcal{BC}}(\psi) \text{ et } M_{\mathcal{BC}}(\alpha\varphi) = \alpha M_{\mathcal{BC}}(\varphi)$$

Ceci montre aussi que $\mathcal{L}(E, F)$ est de dimension mn .



Proposition 120

Soit E, F et G trois \mathbb{K} -ev de dimension finie. Soit \mathcal{B}, \mathcal{C} et \mathcal{D} une base respectivement de E, F, G . Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\psi \in \mathcal{L}(F, G)$ et soit $M = M_{\mathcal{BC}}(\varphi)$ et $N = M_{\mathcal{CD}}(\psi)$. Alors $M_{\mathcal{BD}}(\psi \circ \varphi) = NM$.



Preuve

On écrit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$, $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_m)$, $\mathcal{D} = (g_1, \dots, g_p)$.
 $\varphi(e_i) = \sum_{j=1}^m a_{ji} f_j$ $\psi(f_j) = \sum_{k=1}^p b_{kj} g_k$ d'où

$$\begin{aligned} (\psi \circ \varphi)(e_i) &= \sum_{j=1}^m a_{ji} \left(\sum_{k=1}^p b_{kj} g_k \right) = \sum_{k=1}^p \left(\sum_{j=1}^m a_{ji} b_{kj} \right) g_k = \sum_{k=1}^p \left(\sum_{j=1}^m b_{kj} a_{ji} \right) g_k \\ &= \sum_{k=1}^p c_{ki} g_k \text{ où } c_{ki} = \sum_{j=1}^m b_{kj} a_{ji} \end{aligned}$$

ce qui montre bien que $M_{\mathcal{BD}}(\psi \circ \varphi) = NM$.

On a enfin un résultat prévisible :



Proposition 121

Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ et soit $M_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(\varphi)$ sa matrice dans une base \mathcal{B} de E et une base \mathcal{C} de F . Alors :

$$\text{rang}\varphi = \text{rang}M_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(\varphi)$$

En particulier, si $\dim E = \dim F$, φ est bijective ssi $M_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(\varphi)$ est régulière et on a :

$$M_{\mathcal{C}\mathcal{B}}(\varphi^{-1}) = (M_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(\varphi))^{-1}$$



Preuve

Il suffit de voir que l'isomorphisme de F dans \mathbb{K}^m qui envoie tout vecteur de F sur ses coordonnées par rapport à la base \mathcal{C} est une bijection de $\text{Im}\varphi$ sur $\mathcal{C}(M)$, d'où le résultat. De plus, si E et F ont la même dimension, φ est bijective ssi elle est surjective, c'est à dire ssi son rang est égal à $\dim F$, ce qui équivaut donc à dire que $\text{rang}M = \dim E = \dim F$, donc que M est régulière. Le résultat sur la composition des applications et le produit des matrices donne la dernière égalité.

7.3.2 Changement de base

Soit E un ev sur \mathbb{K} de dimension n . On note I_E l'application identité de E dans E . Elle est linéaire.

Soit \mathcal{B} une base de E . Il est clair que $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(I_E) = I_n$ où I_n est la matrice identité.

Soit maintenant une base \mathcal{B}' de E . La matrice de I_E dans les bases \mathcal{B}' et \mathcal{B} est obtenue en écrivant en colonnes les coordonnées des vecteurs de \mathcal{B}' dans la base \mathcal{B} . Si $\mathcal{B} = (e_i)_{i=1}^n$ et $\mathcal{B}' = (e'_i)_{i=1}^n$, on a la matrice :

$$M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}(I_E) = \begin{matrix} & e'_1 & e'_2 & \cdots & e'_n \\ \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{matrix} & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Si u est un élément fixé de E , on appelle X et X' les vecteurs colonnes de ses coordonnées dans les bases \mathcal{B} et \mathcal{B}' . On a la relation :

$$X = M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}(I_E) X'$$

(par définition de la matrice d'une application linéaire). Cette matrice s'appelle la matrice de changement de la base \mathcal{B} à la base \mathcal{B}' . On a la propriété suivante :



Proposition 122

Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$, \mathcal{B} et \mathcal{B}' deux bases de E et \mathcal{C} et \mathcal{C}' deux bases de F . On appelle P la matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}' dans E et Q la matrice de passage de \mathcal{C} à \mathcal{C}' dans F . On a alors :

$$M_{\mathcal{B}'\mathcal{C}'}(\varphi) = Q^{-1} [M_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(\varphi)] P$$

En particulier, si $E=F$, on a :

$$M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}'}(\varphi) = P^{-1} [M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(\varphi)] P$$



Preuve

Il suffit d'écrire le schéma :

$$\begin{matrix} E & I_E & E & \varphi & F & I_F & F \\ \mathcal{B}' \rightarrow & \mathcal{B} & \rightarrow & \mathcal{C} & \rightarrow & \mathcal{C}' \end{matrix}$$

et de considérer les matrices.



Remarque

Il est facile de voir qu'on peut toujours considérer une matrice régulière comme une matrice de changement de base.

Ces résultats permettent de définir le déterminant d'un endomorphisme d'un ev E de dimension finie.

Proposition 123

Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$. Soit M sa matrice dans une base quelconque de E . Alors $\det M$ ne dépend pas de la base choisie, et on l'appelle le déterminant de φ ($\det \varphi$). On a de plus :

$$\varphi \text{ bijective} \iff \det \varphi \neq 0$$

Preuve

Si \mathcal{B} et \mathcal{B}' sont deux bases de E et P la matrice de passage, on sait que :

$$\begin{aligned} M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}'}(\varphi) &= P^{-1} [M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(\varphi)] P \text{ d'où } \det (M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}'}(\varphi)) = \det (P^{-1} [M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(\varphi)] P) \\ &= \det (P^{-1}) \det [M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(\varphi)] \det (P) = \det [M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(\varphi)] \end{aligned}$$

et comme φ bijective $\iff M$ régulière $\iff \det M \neq 0$.

Proposition 124

Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ et $\psi \in \mathcal{L}(E)$. Alors :

$$\det (\psi \circ \varphi) = \det \varphi \cdot \det \psi$$

7.4 Exercices

Exercice 66

Soit f une application linéaire de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^4 définie par :

$$f(1, 1, 1) = (1, 1, 1, 3), \quad f(1, 1, 0) = (1, 1, 1, 2) \text{ et } f(1, 0, 0) = (1, 1, 1, 1)$$

Que vaut $f(3, 2, 1)$? $f(x, y, z)$?

Exercice 67

Existe-t-il une application linéaire f de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^4 telle que $f(1, 1, 3) = (1, 1, 1, 1)$, $f(1, 1, 2) = (1, 1, 1, 0)$ et $f(1, 1, 1) = (1, 1, 0, 0)$?

Exercice 68

Soit $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'application linéaire dont la matrice dans les bases canoniques est :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Que vaut $\varphi(x, y, z)$, pour (x, y, z) quelconque dans \mathbb{R}^3 . Déterminer le noyau et l'image de φ .

Exercice 69

Soit E un K -ev de dimension 4, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ une base de E et $f \in \mathcal{L}(E)$ définie par :

$$f(e_1) = e_1 + e_2, \quad f(e_2) = 2e_2 + e_3, \quad f(e_3) = 3e_3 + e_4, \quad f(e_4) = 4e_4$$

Montrer que $f(\mathcal{B})$ est une base de E . Quelle est la matrice de f dans \mathcal{B} et sa matrice dans $f(\mathcal{B})$?

Exercice 70

Dans \mathbb{R}^3 , on considère la base canonique \mathcal{C} ainsi que les bases $\mathcal{F} = ((1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0))$ et $\mathcal{G} = ((1, -1, 0), (2, -1, -2), (1, -1, -2))$.

- Calculer les matrices de changement de base de \mathcal{C} à \mathcal{F} et de \mathcal{F} à \mathcal{G} .
- Si $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ est définie par : $f(x, y, z) = (3x - 2y + z, x + 3y, x - y + z)$, calculer $M_{\mathcal{C}\mathcal{C}}(f)$, $M_{\mathcal{C}\mathcal{F}}(f)$ et $M_{\mathcal{F}\mathcal{G}}(f)$.

Exercice 71

Soit T l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont la matrice dans la base canonique est : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & -5 \\ 3 & 3 & -4 \end{pmatrix}$.

1. Calculer les matrices de T dans la base $\{(1, 1, 1) ; (1, -1, 0) ; (0, 1, 1)\}$, puis dans la base $\{(2, -1, 2) ; (0, 1, -1) ; (0, 0, 1)\}$.
2. Calculer les matrices de T^2, T^3 et T^{10} dans la base canonique de \mathbb{R}^3 .

Chapitre 8

Projections

Contenu

8.1	Endomorphismes idempotents	69
8.2	Cas particulier de \mathbb{R}^n - Projections orthogonales	69
8.2.1	Produit scalaire	69
8.2.2	Projections orthogonales	71
8.3	Exercices	72

8.1 Endomorphismes idempotents

E est un espace vectoriel de dimension finie n sur \mathbb{K} .



Définition 125

Soit $\varphi \in L(E)$. On dit que φ est idempotent si $\varphi \circ \varphi = \varphi$ ($\varphi^2 = \varphi$). C'est évidemment équivalent à dire que sa matrice A dans n'importe quelle base est idempotente, c'est à dire vérifie $A^2 = A$.



Exemple

Soit $E = E_1 \oplus E_2$. Tout u de E s'écrit d'une unique façon sous la forme : $u = u_1 + u_2$ avec $u_i \in E_i$. L'application p_1 de E dans E définie par $p_1(u) = u_1$ est linéaire, idempotente, et s'appelle la projection sur E_1 parallèlement à E_2 . De même l'application p_2 définie par $p_2(u) = u_2$ est également linéaire, idempotente, et s'appelle la projection sur E_2 parallèlement à E_1 . On a clairement $p_2 = Id_E - p_1$.



Théorème 126

Soit $\varphi \in L(E)$, idempotente. Alors : $E = Im\varphi \oplus \ker \varphi$ et φ est la projection sur $Im\varphi$ parallèlement à $\ker \varphi$. On dit que φ est un projecteur de E .



Preuve

Soit $u \in Im\varphi \cap \ker \varphi$. Il existe alors $v \in E$ tel que $u = \varphi(v)$ et $\varphi(u) = 0$. Mais : $0 = \varphi(u) = \varphi \circ \varphi(v) = \varphi(v) = u$. Donc $Im\varphi$ et $\ker \varphi$ sont en somme directe. Soit alors $u \in E$. Comme $\varphi[u - \varphi(u)] = 0$, $u - \varphi(u) \in \ker \varphi$ et donc $u - \varphi(u) = u_2 \in \ker \varphi$, donc $u = \varphi(u) + u_2$ ce qui prouve que $E = Im\varphi \oplus \ker \varphi$.



Remarque

Si φ est idempotent, ses seules valeurs propres éventuelles sont 0 ou 1 puisqu'elles doivent vérifier $\lambda^2 = \lambda$.

8.2 Cas particulier de \mathbb{R}^n - Projections orthogonales

8.2.1 Produit scalaire

\mathbb{R}^n est muni de sa base canonique, et pour un élément $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ de \mathbb{R}^n , on notera $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ le vecteur colonne de ses coordonnées dans la base canonique et X' le transposé de X (façon économétrie).



Définition 127

Soit $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ deux éléments de \mathbb{R}^n . On appelle produit scalaire de x et y , et on note $\langle x, y \rangle$ le réel $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i = X'Y = Y'X$.



Proposition 128

Le produit scalaire est une forme bilinéaire, symétrique et définie positive.



Définition 129

La norme d'un élément x de \mathbb{R}^n , notée $\|x\|$ est définie par : $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$. Elle possède les trois propriétés suivantes :

- $\forall x \in \mathbb{R}^n, \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^n, \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$
- $\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall y \in \mathbb{R}^n, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$



Définition 130

Deux éléments x et y de \mathbb{R}^n sont dits orthogonaux si $\langle x, y \rangle = 0$ (ou encore $X'Y = 0$). On le note $x \perp y$.



Définition 131

Une base (e_1, \dots, e_n) de \mathbb{R}^n est dite orthonormée si $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$ où $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$ (δ_{ij} s'appelle le symbole de Kronecker).



Proposition 132

Les coordonnées d'un élément x de \mathbb{R}^n dans la base orthonormée (e_1, \dots, e_n) sont les produits scalaires $\langle x, e_i \rangle$ autrement dit : $x = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i$.



Proposition 133

(procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt) Soit (e_1, \dots, e_n) une base de \mathbb{R}^n . On peut construire une base (q_1, \dots, q_n) orthonormée de \mathbb{R}^n telle que, pour tout $k = 1, 2, \dots, n$, $\text{Vect}(q_1, \dots, q_k) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$. La matrice de passage de la base (e_1, \dots, e_n) à la base (q_1, \dots, q_n) est triangulaire supérieure.



Preuve

Soit $u_1 = e_1$ et $q_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|}$ puis

$$u_2 = e_2 - \langle q_1, e_2 \rangle q_1$$

u_2 est orthogonal à u_1 et à q_1 et on pose $q_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|}$ puis

$$u_3 = e_3 - \langle q_1, e_3 \rangle q_1 - \langle q_2, e_3 \rangle q_2 \text{ et } q_3 = \frac{u_3}{\|u_3\|} \text{ puis}$$

$$u_4 = e_4 - \langle q_1, e_4 \rangle q_1 - \langle q_2, e_4 \rangle q_2 - \langle q_3, e_4 \rangle q_3 \text{ et } q_4 = \frac{u_4}{\|u_4\|} \text{ etc...}$$

$$u_k = e_k - \langle q_1, e_k \rangle q_1 - \langle q_2, e_k \rangle q_2 - \dots - \langle q_{k-1}, e_k \rangle q_{k-1} \text{ et } q_k = \frac{u_k}{\|u_k\|} \text{ On vérifie sans peine que}$$

la famille (q_1, \dots, q_n) répond à la question.



Orthonormalisez $\{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$ dans \mathbb{R}^3 .



Théorème 134

Les matrices de passage d'une base orthonormée à une base orthonormée sont les matrices P qui vérifient $P' = P^{-1}$ (une telle matrice est dite orthogonale).

Preuve

Soit (e_1, \dots, e_n) et (f_1, \dots, f_n) deux bases orthonormées et P la matrice de passage de la première à la deuxième base. On sait que $P = (p_{ij})$ et que les colonnes de P sont les coordonnées des f_j dans la base (e_i) . Si on note $P' = (p'_{ij})$ la transposée de P , on a :

$$P'P = (q_{ij}) \text{ où } q_{ij} = \sum_{l=1}^n p'_{il} p_{lj} = \sum_{l=1}^n p_{li} p_{lj} = \langle f_i, f_j \rangle = \delta_{ij}$$

Donc $P'P = I_n$. La réciproque est vraie, c'est à dire que si (e_1, \dots, e_n) est orthonormée, et si la matrice de passage de (e_1, \dots, e_n) à (f_1, \dots, f_n) est orthogonale, alors (f_1, \dots, f_n) est orthonormée. C'est facile à voir.

8.2.2 Projections orthogonales

Définition 135

Soit φ un projecteur de \mathbb{R}^n ($\varphi \circ \varphi = \varphi$). On dit que φ est un projecteur orthogonal si $\ker \varphi \perp \text{Im} \varphi$ (i.e. tout élément de $\ker \varphi$ est orthogonal à tout élément de $\text{Im} \varphi$).

Notations : Soit (x_1, \dots, x_k) une famille de k éléments linéairement indépendants de \mathbb{R}^n , et $F = \text{Vect} \{x_1, \dots, x_k\}$. On note X_i le vecteur colonne des coordonnées de x_i dans la base canonique de \mathbb{R}^n et $X = (X_1 X_2 \dots X_k)$ la matrice $n \times k$ formée par ces colonnes. Clairement :

$$(x_1, \dots, x_k) \text{ libre} \Leftrightarrow \text{rang} X = k$$

Proposition 136

La matrice de la projection orthogonale sur F dans la base canonique est :

$$P_X = X (X'X)^{-1} X'$$

On a besoin du lemme :

Lemme 137

Si A est une matrice idempotente et symétrique, alors A est la matrice d'une projection orthogonale (base canonique).

Preuve

Preuve de la proposition : Soit φ de matrice $X (X'X)^{-1} X'$

- $X'X$ est une matrice $k \times k$. On montre (voir Johnston, Econométrie), que $\text{rang}(X'X) = \text{rang} X$. Comme la famille (x_1, \dots, x_k) est libre, X et donc $X'X$ sont de rang k . $X'X$ est donc inversible et $(X'X)^{-1}$ existe.

- P_X est idempotente :

$$P_X^2 = X (X'X)^{-1} X' X (X'X)^{-1} X' = X (X'X)^{-1} X' = P_X$$

- P_X est symétrique :

$$P_X' = \left[X (X'X)^{-1} X' \right]' = X (X'X)^{-1} X' = P_X$$

grâce au lemme, on peut dire que φ est une projection orthogonale.

- φ est la projection orthogonale sur F :

$$X (X'X)^{-1} X' X = X \text{ donc } \left[X (X'X)^{-1} X' \right] (X_1 \dots X_k) = \left[X (X'X)^{-1} X' X_1 \dots X (X'X)^{-1} X' X_k \right] = (X_1 \dots X_k) \text{ ce qui prouve que les } x_i \text{ sont invariants par } \varphi \text{ et donc } F \subset \text{Im} \varphi \text{ et comme } \text{rang} P_X = \text{rang} \varphi \leq k, \text{ on a bien } \text{Im} \varphi = F.$$



Proposition 138

Soit (x_1, \dots, x_k) une famille de k éléments linéairement indépendants de \mathbb{R}^n , φ la projection orthogonale sur $\text{Vect}\{x_1, \dots, x_k\}$. Alors pour tout y de \mathbb{R}^n , $\varphi(y)$ est l'unique élément de $\text{Vect}\{x_1, \dots, x_k\}$ tel que :

$$\|y - \varphi(y)\| = \min_{z \in \text{Vect}\{x_1, \dots, x_k\}} \|y - z\|$$



Preuve

Soit $y \in \mathbb{R}^n$ et $z \in \text{Vect}\{x_1, \dots, x_k\}$. On a :

$$\|y - z\|^2 = \|y - \varphi(y) + \varphi(y) + z\|^2 = \|y - \varphi(y)\|^2 + \|\varphi(y) - z\|^2$$

car $y - \varphi(y) \perp \varphi(y) - z$ et c'est le théorème de Pythagore. D'où :

$$\|y - z\|^2 \geq \|y - \varphi(y)\|^2$$

et on a l'égalité ssi $\varphi(y) = z$. Autrement dit, $\varphi(y)$ est la meilleure approximation de y au sens des moindres carrés par une combinaison linéaire des x_i .

8.3 Exercices



Exercice 72

Montrer que toute famille de vecteurs non nuls deux à deux orthogonaux est libre. En déduire que les trois vecteurs suivants de \mathbb{R}^4 forment une famille libre :

$$(2, 0, -2, 1) ; (1, -28, 1, 0) ; (0, 1/4, 7, 14)$$



Exercice 73

Soit u_1, \dots, u_n une famille orthogonale de vecteurs de \mathbb{R}^n . Montrer que :

$$\|u_1 + u_2 + \dots + u_n\|^2 = \|u_1\|^2 + \|u_2\|^2 + \dots + \|u_n\|^2$$



Exercice 74

Vérifiez que les vecteurs $(-2, 2, -1) ; (1, 2, 2) ; (2, 1, -2)$ forment une base orthogonale de \mathbb{R}^3 . Calculer ensuite les coordonnées de $(-3, 3, 3)$ et de $(9, -4, 1)$ dans cette base.



Exercice 75

Soient les vecteurs de \mathbb{R}^4 :

$$u_1 = (1, 0, 2, 0) ; u_2 = (0, 0, 1, -1) ; u_3 = (1, 1, 2, 6) ; u_4 = (0, -1, 1, -7)$$

Trouver une base orthonormale de $\text{Vect}\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$.

Exercice 76

Trouver la projection orthogonale de $b = (5, 2\sqrt{3}, 0, -1)$ sur l'espace des solutions du système linéaire homogène suivant :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - \sqrt{3}x_3 - \frac{2}{\sqrt{3}}x_4 = 0 \\ \sqrt{3}x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

Exercice 77

Montrer que si une matrice carrée A possède deux des trois propriétés suivantes, elle possède les trois propriétés :

- A est orthogonale
- A est symétrique
- A est involutive ($A^2 = A$)

Exercice 78

Déterminez α, β, γ et δ de telle sorte que la matrice :

$$A = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 4 & \gamma \\ \alpha & -3 & 0 \\ 0 & \beta & \delta \end{pmatrix}$$

soit orthogonale.

Exercice 79

Soit une matrice carrée A d'ordre n telle qu'il existe une matrice U orthogonale et un réel α tels que :

$$A = \alpha U$$

1. Calculer $\det A$
2. A est-elle inversible ?
3. Calculer A^{-1} lorsque A est inversible.

Chapitre 9

Notions de calcul différentiel

Contenu

9.1	Notion de topologie sur \mathbb{R}^n	75
9.1.1	Normes-Distances	75
9.1.2	Suites convergentes dans \mathbb{R}^n	75
9.1.3	Ouverts-Fermés	76
9.1.4	Ensembles convexes-Fonctions convexes	76
9.2	Différentiabilité des fonctions de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}	77
9.2.1	Différentielle d'une fonction de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}	77
9.2.2	Formules de Taylor pour une fonction de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}	79
9.2.3	Différentiabilité et convexité	80
9.3	Fonctions de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^m	80
9.3.1	Différentielles-Jacobiennes	80
9.3.2	Les fonctions implicites	82
9.3.3	Fonction réciproque	82
9.4	Exercices	83

9.1 Notion de topologie sur \mathbb{R}^n

9.1.1 Normes-Distances



Définition 139

Soit $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ un élément de \mathbb{R}^n . On appelle norme euclidienne de X et on note $\|X\|_2$ le réel :

$$\|X\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

On appelle norme 1, et on note $\|X\|_1$ le réel $\sum_{i=1}^n |x_i|$ et norme infini le réel $\|X\|_\infty = \sup_{i=1, \dots, n} |x_i|$.



Proposition 140

On remarque que $\|\cdot\|_2, \|\cdot\|_1, \|\cdot\|_\infty$ sont des normes sur \mathbb{R}^n , c'est à dire que :

- $\forall X \in \mathbb{R}^n, \|X\| = 0 \iff X = 0$
- $\forall X \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \|\lambda X\| = |\lambda| \cdot \|X\|$
- $\forall X_1 \in \mathbb{R}^n, \forall X_2 \in \mathbb{R}^n, \|X_1 + X_2\| \leq \|X_1\| + \|X_2\|$

On utilise la notation $\|\cdot\|$ pour désigner indifféremment l'une de ces normes.



Définition 141

Soit X et Y deux éléments de \mathbb{R}^n . On appelle distance de X à Y le réel positif ou nul

$$d(X, Y) = \|X - Y\|$$



Proposition 142

Soit d une distance, c'est à dire :

- $\forall X \in \mathbb{R}^n, \forall Y \in \mathbb{R}^n, d(X, Y) = d(Y, X)$
- $\forall X \in \mathbb{R}^n, \forall Y \in \mathbb{R}^n, d(X, Y) = 0 \iff X = Y$
- $\forall X \in \mathbb{R}^n, \forall Y \in \mathbb{R}^n, \forall Z \in \mathbb{R}^n, d(X, Z) \leq d(X, Y) + d(Y, Z)$



Définition 143

Soit $X_0 \in \mathbb{R}^n$ et $r \in \mathbb{R}_+$. On appelle boule ouverte (respectivement boule fermée) de centre X_0 et de rayon r l'ensemble des X de \mathbb{R}^n tels que $d(X_0, X) < r$ (respectivement $d(X_0, X) \leq r$). On note la boule ouverte $\overset{\circ}{B}(X_0, r)$ et la boule fermée $B(X_0, r)$.

9.1.2 Suites convergentes dans \mathbb{R}^n



Définition 144

Soit $(X_p)_{p \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de \mathbb{R}^n et X un élément de \mathbb{R}^n . On dit que la suite (X_p) converge vers X si $\|X_p - X\|$ tend vers 0 quand p tend vers l'infini.

En notant $X_p = (x_1^p, x_2^p, \dots, x_n^p)$ et $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ on voit facilement que $(X_p) \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} X$ si et seulement si $x_k^p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} x_k$ pour tout $k = 1, 2, \dots, n$.

9.1.3 Ouverts-Fermés



Définition 145

Un sous ensemble U de \mathbb{R}^n est dit ouvert si chaque fois qu'il contient un élément, il contient une boule ouverte centrée en cet élément, ce qui s'écrit :

$$U \text{ ouvert} \iff \forall X \in U, \exists r > 0 \text{ tel que } \overset{\circ}{B}(X, r) \subset U$$



Définition 146

Un sous ensemble de \mathbb{R}^n est dit fermé si son complémentaire est ouvert.

On peut montrer la proposition suivante :



Proposition 147

Soit F un ensemble. F est fermé ssi toute limite d'éléments de F est un élément de F .



Définition 148

Soit A un sous ensemble de \mathbb{R}^n . Un point X de A est dit intérieur à A s'il existe une boule ouverte de centre X contenu dans A . L'ensemble des points intérieurs à A s'appelle l'intérieur de A et se note $\overset{\circ}{A}$. C'est un ouvert. C'est le plus grand ouvert contenu dans A .



Définition 149

Soit $A \subset \mathbb{R}^n$. Un point X est dit adhérent à A si toute boule ouverte centrée en X rencontre A ($\forall r > 0, \overset{\circ}{B}(X, r) \cap A \neq \emptyset$). L'ensemble des points adhérents à A s'appelle l'adhérence de A et se note \bar{A} .



Définition 150

Un sous ensemble de \mathbb{R}^n est dit compact s'il est fermé et borné.

9.1.4 Ensembles convexes-Fonctions convexes



Définition 151

Un sous ensemble C de \mathbb{R}^n est dit convexe si pour tout (X, Y) de C^2 , le segment $[X, Y]$ est inclus dans C . C'est à dire :

$$\forall X \in C, \forall Y \in C, \forall t \in [0, 1], \quad tX + (1-t)Y \in C$$



Proposition 152

- Toute intersection de convexes est convexe.
- L'adhérence d'un convexe est convexe.
- Un demi-espace est convexe.
- Toute intersection de demi-espaces est convexe.



Définition 153

Soit f une fonction de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} , définie sur un ensemble convexe C . On dit que f est convexe (respectivement concave) sur C si :

$$\forall X \in C, \forall Y \in C, \forall t \in [0, 1], \quad f(tX + (1-t)Y) \leq tf(X) + (1-t)f(Y)$$

(respectivement $f(tX + (1-t)Y) \geq tf(X) + (1-t)f(Y)$)



Remarque

- f est concave sur $C \iff -f$ est convexe sur C .
- Si f_1, f_2, \dots, f_m sont convexes sur C , alors $\max\{f_1, \dots, f_m\}$ et $\sum_{i=1}^m \alpha_i f_i$ avec $\alpha_i \geq 0$ sont convexes sur C .
- Si f_1, f_2, \dots, f_m sont concaves sur C , alors $\min\{f_1, \dots, f_m\}$ et $\sum_{i=1}^m \alpha_i f_i$ avec $\alpha_i \geq 0$ sont concaves sur C .
- On définit des fonctions strictement convexes par :

$$\forall X \in C, \forall Y \in C, \forall t \in]0, 1[, \quad f(tX + (1-t)Y) < tf(X) + (1-t)f(Y)$$

et de même pour les fonctions strictement concaves.



Définition 154

Une fonction f de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} , définie sur un ensemble convexe C est dite quasi concave si :

$$\forall X \in C, \forall Y \in C, \forall t \in [0, 1], \quad f(tX + (1-t)Y) \geq \min\{f(X), f(Y)\}$$

On montre que cela équivaut à dire que pour tout α de \mathbb{R} , l'ensemble $A_\alpha = \{X \in C \text{ tels que } f(X) \geq \alpha\}$ est convexe. On a une définition analogue pour une fonction quasi convexe.

9.2 Différentiabilité des fonctions de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}

Tout le calcul différentiel repose sur l'idée d'approximation d'une fonction par une fonction plus simple, c'est à dire une fonction linéaire. En dimension 1 (i.e. pour $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$), ce fait est masqué parce que toute application linéaire de \mathbb{R} dans \mathbb{R} est de la forme $x \rightarrow ax$. Et on ne retient que le réel a , la dérivée de f en x_0 . Il en est autrement en dimension supérieure, et plus généralement dans les espaces de Banach, mais cela nous entrainerait trop loin.

9.2.1 Différentielle d'une fonction de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}



Définition 155

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, définie sur un voisinage de X_0 (c'est à dire un ouvert contenant X_0). On dit que f est différentiable en X_0 s'il existe une application linéaire L_0 de $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ telle que, pour X assez proche de X_0 , on ait :

$$f(X) = f(X_0) + L_0(X - X_0) + \|X - X_0\| \varepsilon(X)$$

où $\lim_{X \rightarrow X_0} \varepsilon(X) = 0$

L_0 s'appelle la différentielle de f en X_0 et se note Df_{X_0} .

Remarque

- ◆ L_0 est bien une application linéaire qui approche f en X au voisinage de X_0 , d'autant mieux que X est plus proche de X_0 (le terme correctif $\|X - X_0\| \varepsilon(X)$ tend très vite vers 0).
- ◆ Comme L_0 est une application linéaire de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} , on sait (voir algèbre linéaire) qu'il existe n réels a_1, a_2, \dots, a_n tels que pour tout $X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $L_0(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n$. Donc dire que f est différentiable en X_0 équivaut à dire qu'il existe n réels a_1, a_2, \dots, a_n tels que pour tout $X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ assez proche de $X_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$, on a :

$$f(X) = f(X_0) + \sum_{i=1}^n a_i(x_i - x_i^0) + \|X - X_0\| \varepsilon(X) \quad \text{où} \quad \lim_{X \rightarrow X_0} \varepsilon(X) = 0$$

Proposition 156

- ◆ Si f est différentiable en X_0 alors f admet des dérivées partielles par rapport à chaque variable et on a :

$$f(X) = f(X_0) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0)(x_i - x_i^0) + \|X - X_0\| \varepsilon(X) \quad \text{où} \quad \lim_{X \rightarrow X_0} \varepsilon(X) = 0$$

autrement dit :

$$Df_{X_0}(h_1, \dots, h_n) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0)h_i$$

- ◆ Si f est définie au voisinage de X_0 et si f admet en X_0 des dérivées partielles continues en X_0 , alors f est différentiable en X_0 . On dit que f est continûment différentiable en X_0 .

Définition 157

On dit que f est continûment différentiable sur un ouvert D (ou de classe C^1 sur D) si f est continûment différentiable en tout point de D .

Définition 158

On dit qu'une fonction f définie sur un sous ensemble A de \mathbb{R}^n est homogène de degré α ($\alpha \in \mathbb{R}$) si :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \forall X \in A, tX \in A \quad \text{et} \quad f(tX) = t^\alpha f(X)$$

Proposition 159

Si f est homogène de degré α et si f admet une dérivée partielle par rapport à x_i , alors $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ est homogène de degré $\alpha - 1$.

Proposition 160

(Euler) Si f est homogène de degré α et si f est différentiable en X , on a :

$$\sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(X) = \alpha f(X)$$

La réciproque est vraie.



Exemple

Soit f une fonction de production homogène de degré 1 (rendements constants). L'égalité d'Euler $\sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(X) = f(X)$ montre que le produit $f(X)$ permet de payer chaque facteur utilisé à sa productivité

marginale, et aussi que la somme des élasticités $\sum_{i=1}^n x_i \frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(X)}{f(X)}$ vaut 1.

9.2.2 Formules de Taylor pour une fonction de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}



Définition 161

Soit f une fonction de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} définie sur un ouvert U de \mathbb{R}^n . On dit que f est de classe C^2 sur U si ses dérivées partielles d'ordre 2 existent et sont continues sur U . On définit de même les fonctions de classe C^n et même de classe C^∞ (de classe C^n pour tout entier naturel n) sur U .



Remarque

On sait alors (Schwarz) que :

$$\forall i, j, \quad \forall X \in U, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(X)$$



Définition 162

Soit f de classe C^2 sur un ouvert U . La matrice hessienne de f en X , notée $H(f)_X$ est la matrice carrée symétrique d'ordre n donnée par :

$$H(f)_X = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X) \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$$

On a alors un développement limité d'ordre 2 de f au voisinage de X_0 de U .



Théorème 163

Soit f une fonction de classe C^2 au voisinage de X_0 . Alors, pour Y de norme assez petite, on a :

$$f(X_0 + Y) = f(X_0) + Df_{X_0}(Y) + \frac{1}{2} {}^t Y H(f)_{X_0} Y + \|Y\|^2 \varepsilon(Y)$$

$$\text{où } \lim_{Y \rightarrow 0} \varepsilon(Y) = 0$$

(${}^t Y H(f)_{X_0} Y$ est la valeur de la forme quadratique définie par la hessienne de f en X_0 au point Y , voir cours sur les formes quadratiques.)



Remarque

Cette formule de Taylor à l'ordre 2 donne l'approximation de f au voisinage de X_0 par un polynôme de degré 2. Ce qui suit permet d'approcher f au voisinage de X_0 par des polynômes de degré supérieur.



Définition 164

Soit f une fonction de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} de classe C^k sur un ouvert U de \mathbb{R}^n . Pour $l \leq k$, on pose :

$$D^l f_X(Y, \dots, Y) = \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \dots \sum_{i_l=1}^n \frac{\partial^l f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_l}}(X) \cdot y_{i_1} y_{i_2} \dots y_{i_l} = \sum_{1 \leq i_1, i_2, \dots, i_l \leq n} \frac{\partial^l f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_l}}(X) \cdot y_{i_1} y_{i_2} \dots y_{i_l}$$

où $Y = (y_1, \dots, y_n)$.

On peut montrer que :

$$D^l f_X(Y, \dots, Y) = \sum_{\substack{\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{N} \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = l}} \frac{l!}{\alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n!} \frac{\partial^l f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}(X) \cdot y_1^{\alpha_1} y_2^{\alpha_2} \dots y_n^{\alpha_n}$$



Exemple

$$D^2 f_X(Y, Y) = \sum_{l_1+l_2+\dots+l_n=2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^{l_1} \partial x_2^{l_2} \dots \partial x_n^{l_n}}(X) \cdot y_1^{l_1} y_2^{l_2} \dots y_n^{l_n} = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X) y_i y_j = {}^t Y H(f)_X Y$$

On a alors la proposition suivante (formule de Taylor à l'ordre k) :



Proposition 165

Soit f une fonction de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} de classe C^k sur un voisinage de X_0 . Alors, pour Y de norme assez petite, on a :

$$f(X_0 + Y) = f(X_0) + Df_{X_0}(Y) + \frac{1}{2} D^2 f_{X_0}(Y, Y) + \dots + \frac{1}{k!} D^k f_{X_0}(Y, \dots, Y) + \|Y\|^k \varepsilon(Y)$$

où $\lim_{Y \rightarrow 0} \varepsilon(Y) = 0$

9.2.3 Différentiabilité et convexité

On a deux théorèmes qui caractérisent les fonctions convexes à l'aide des différentielles.



Théorème 166

Soit U un ouvert convexe de \mathbb{R}^n . Pour qu'une fonction f de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} , différentiable sur U , soit convexe, il faut et il suffit que pour tout X et X_0 de U , on ait :

$$f(X) \geq f(X_0) + Df_{X_0}(X - X_0)$$

(renverser l'inégalité pour qu'une fonction soit concave).



Théorème 167

Soit f de classe C^2 sur un ouvert convexe U de \mathbb{R}^n . Pour que f soit convexe (resp. concave) sur U , il faut et il suffit que pour tout X de U la matrice hessienne de f en X soit positive (resp. négative) (la forme quadratique qu'elle définit est positive, i.e. ${}^t Y H(f)_{X_0} Y \geq 0 \quad \forall Y \in \mathbb{R}^n$) (resp. négative : ${}^t Y H(f)_{X_0} Y \leq 0 \quad \forall Y \in \mathbb{R}^n$).

9.3 Fonctions de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^m

Une fonction F de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^m sera notée :

$$F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$
$$X = (x_1, \dots, x_n) \rightarrow F(X) = (f_1(X), \dots, f_m(X))$$

Où les f_i sont des fonctions de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} que l'on appelle les fonctions coordonnées de F .

9.3.1 Différentielles-Jacobiennes



Définition 168

On dit qu'une fonction F de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^m , définie sur un voisinage de X_0 est différentiable en X_0 si ses fonctions coordonnées sont différentiables en X_0 .

On peut donc écrire, pour tout $i = 1, \dots, m$ et pour X assez proche de X_0 :

$$f_i(X) = f_i(X_0) + Df_{iX_0}(X - X_0) + \|X - X_0\| \varepsilon_i(X)$$

$$\text{où } \lim_{X \rightarrow X_0} \varepsilon_i(X) = 0$$

On peut alors définir une application linéaire de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^m , notée DF_{X_0} par :

$$DF_{X_0}(Y) = (Df_{1X_0}(Y), \dots, Df_{mX_0}(Y))$$

DF_{X_0} s'appelle la différentielle de F en X_0 . On peut alors écrire :

$$F(X) = F(X_0) + DF_{X_0}(X - X_0) + \|X - X_0\| \varepsilon(X)$$

$$\text{où } \lim_{X \rightarrow X_0} \varepsilon(X) = 0$$

Cette égalité donne encore une approximation de F au voisinage de X_0 par une application linéaire. Le fait de travailler en dimension finie va permettre de traduire cette égalité matriciellement. Supposons que les $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(X_0)$ existent et soient continues en X_0 pour tout $i = 1, \dots, m$ et tout $j = 1, \dots, n$ (on dit que F est de classe C^1). On sait alors que la différentielle Df_{iX_0} est définie par :

$$Df_{iX_0}(y_1, \dots, y_n) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(X_0) y_j$$

Donc chaque composante de $DF_{X_0}(Y)$ dans la base canonique de \mathbb{R}^m sera : $\sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(X_0) y_j$, ou encore que le vecteur colonne de ses coordonnées dans la base canonique est :

$$DF_{X_0}(Y) \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_1}{\partial x_j}(X_0) y_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_m}{\partial x_j}(X_0) y_j \end{pmatrix}$$

On a alors l'égalité matricielle :

$$\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_1}{\partial x_j}(X_0) y_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_m}{\partial x_j}(X_0) y_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(X_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(X_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(X_0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(X_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Ce qui prouve que la matrice de DF_{X_0} dans les bases canoniques de \mathbb{R}^n et \mathbb{R}^m est :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(X_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(X_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(X_0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(X_0) \end{pmatrix}$$

Cette matrice s'appelle la jacobienne de F en X_0 et se note en général $J(F)_{X_0}$. C'est une matrice $m \times n$. Si $m = n$, son déterminant s'appelle le jacobien de F en X_0 (noté $|J(F)_{X_0}|$). On a une propriété importante de composition :

Proposition 169

Soit $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ différentiable en X_0 et $G : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ différentiable en $Y_0 = F(X_0)$. Alors $G \circ F$ est différentiable en X_0 et :

$$D(G \circ F)_{X_0} = DG_{F(X_0)} \circ DF_{X_0}$$

Ce qui se traduit matriciellement, si F et G sont de classe C^1 par :

$$J(G \circ F)_{X_0} = J(G)_{F(X_0)} \times J(F)_{X_0}$$

Ce résultat permet ce que l'on appelle parfois des dérivations en chaînes (voir exercices).

9.3.2 Les fonctions implicites

Cas de deux variables

Théorème 170

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 sur un ouvert contenant $X_0 = (x_0, y_0)$. On pose $k = f(X_0)$. On suppose que $\frac{\partial f}{\partial y}(X_0) \neq 0$. Il existe alors un voisinage de x_0 ($]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$, $\alpha > 0$) et une fonction $x \rightarrow y(x)$ de \mathbb{R} dans

\mathbb{R} , de classe C^1 sur ce voisinage, tels que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \blacklozenge \forall x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[, f(x, y(x)) = k \\ \blacklozenge y(x_0) = y_0 \\ \blacklozenge y'(x_0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)} \end{array} \right.$$

Ce théorème signifie que la courbe de niveau k de f peut être considérée localement (c'est à dire pour X proche de X_0) comme la courbe représentative d'une fonction d'une variable et la dernière formule permet de calculer la dérivée de cette fonction en x_0 .

Cas (plus) général

Théorème 171

Soit

$$\begin{aligned} f_i : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \text{ pour } i = 1, \dots, n \\ (x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) &\rightarrow f_i(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) = f_i(x, y) \end{aligned}$$

n fonctions à valeurs réelles, de classe C^1 sur un ouvert $U \times V$ contenant $(a, b) = (a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n)$. On suppose que $f_i(a, b) = 0$ pour $i = 1, \dots, n$ et que le jacobien $\det \left[\left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j} \right)_{i,j=1,\dots,n} \right]$ est différent de 0. Il existe alors un réel $\alpha > 0$ et un unique système de n fonctions scalaires g_1, \dots, g_n définies et de classe C^1 sur $W = \{x \in U / \|x - a\| < \alpha\}$ telles que :

- ◆ $g_i(a_1, \dots, a_m) = b_i$ pour $i = 1, \dots, n$
- ◆ $\forall x = (x_1, \dots, x_m) \in W, \forall i = 1, \dots, n$
 $f_i(x_1, \dots, x_m, g_1(x_1, \dots, x_m), \dots, g_n(x_1, \dots, x_m)) = 0$ La jacobienne des g_i est donnée par :

$$J(g_1, \dots, g_n)(x_1, \dots, x_m) = \left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x) \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} = -B^{-1}A$$

où A (resp. B) est obtenue en remplaçant y_i par $g_i(x)$ ($i = 1, \dots, n$) dans la matrice jacobienne $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_k}(x, y) \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq k \leq m}}$ (resp. $\left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(x, y) \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$). Si on suppose que f est de classe C^k ($k \geq 1$) sur $U \times V$, alors les g_i sont aussi de classe C^k sur W .

9.3.3 Fonction réciproque

Le théorème suivant s'obtient en appliquant le théorème des fonctions implicites à la fonction $f(x) - y$.

Théorème 172

Soit f une fonction de $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, de classe C^1 sur un voisinage de x_0 , et dont la différentielle en x_0 , Df_{x_0} , est bijective. Il existe alors un voisinage ouvert U de x_0 et un voisinage ouvert V de $y_0 = f(x_0)$ tels que f soit une bijection de U sur V . Si on note f^{-1} la bijection réciproque (définie sur V), f^{-1} est de classe C^1 sur V et $Df_y^{-1} = (Df_x)^{-1} \quad \forall x \in U \text{ et } y = f(x)$.

9.4 Exercices

Exercice 80

Donner le polynôme de Taylor d'ordre 2 pour la fonction f définie par $f(x, y) = x^{1/4}y^{3/4}$ au point $(1, 1)$. En déduire une approximation de $f(1, 1; 0, 9)$. Calculer ensuite son polynôme de Taylor d'ordre 3 au voisinage de $(1, 1)$.

Exercice 81

Calculer les polynômes de Taylor d'ordre 1, 2, 3 pour les fonctions suivantes au voisinage du point indiqué :

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{x}{1+y} \text{ en } (0, 0) & g(x, y) &= e^x \sqrt{1+y^2} \text{ en } (0, 0) \\ h(x, y, z) &= x^{1/4}y^{1/2}z^{1/4} \text{ en } (1, 1, 1) & k(x, y) &= \frac{e^x}{1+y} \text{ en } (0, 1) \end{aligned}$$

Exercice 82

Soit $f(x, y) = a_0 + a_1x + a_2y + b_1x^2 + b_2xy + b_3y^2$ un polynôme à deux variables de degré inférieur ou égal à 2. Montrer que son polynôme de Taylor d'ordre supérieur ou égal à deux au voisinage de tout point (x, y) est égal à f .

Exercice 83

Soit f une fonction de n variables à valeurs réelles différentiable en $(X_0 + t_0V)$ où $V = (v_1, \dots, v_n)$ est un vecteur non nul. Montrer que la fonction g de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par $g(t) = f(X_0 + tV)$ est dérivable en t_0 et que

$$g'(t_0) = Df_{(X_0+t_0V)}(V) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0 + t_0V)v_i$$

Application : calculer la différentielle en $X_0 = (x_0, y_0, z_0)$ de la fonction $f(x, y, z) = (x^2 + y)e^z$ et la dérivée en t_0 de $g(t) = f(X_0 + tV)$ où $V = (v_1, v_2, v_3) = (0, 0, 0)$.

Exercice 84

Soit a, b, c trois réels non nuls. Pour quelles valeurs des paramètres α, β, γ la fonction f définie par

$$f(x, y, z) = ax^\alpha y^\beta + by^\beta z^\gamma + cz^\alpha x^\beta$$

est-elle homogène ? Vérifier alors l'identité d'Euler.

Exercice 85

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$. Calculer sa jacobienne et son jacobien en un point quelconque.

Exercice 86

Soit $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ qui à (x_1, \dots, x_m) associe $g(x_1, \dots, x_m) = (g_1(x_1, \dots, x_m), \dots, g_n(x_1, \dots, x_m))$ et $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ qui à (t_1, \dots, t_n) associe $f(t_1, \dots, t_n)$. On suppose g de classe C^1 en X_0 et f de classe C^1 en $T_0 = g(X_0)$. Soit $h = f \circ g$. En utilisant les jacobiniennes, retrouver le résultat bien connu :

$$\forall i = 1, 2, \dots, m \quad \frac{\partial h}{\partial x_i}(X_0) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial t_j}(T_0) \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(X_0)$$

Exercice 87

Quels sont les effets marginaux des paramètres a et b sur la solution (x, y) du système de 2 équations :

$$\begin{aligned} xy + ax^2 + by - 2b &= 0 \\ \frac{y}{x^2 + y^2} + ay - bx + \frac{a}{2} &= 0 \end{aligned}$$

au voisinage de $a_0 = 2, b_0 = 1, x_0 = 1, y_0 = 0$?

Exercice 88

Soit $f(x, y, z) = x^{1/4}y^{1/4}z^{1/2}$ une fonction définie sur $(\mathbb{R}_+^*)^3$ à valeurs dans \mathbb{R} .

1. Calculer le polynôme de Taylor d'ordre 2 de f au voisinage de $(1, 1, 1)$. Comment obtenir une valeur approchée de $f(0.98; 1.02; 1.03)$?
2. Calculer la matrice hessienne de f en un point $(a; b; c)$ quelconque de $(\mathbb{R}_+^*)^3$.
3. Montrer que la hessienne est définie négative en tout point de $(\mathbb{R}_+^*)^3$ (on aura intérêt à mettre en facteur les plus grandes puissances négatives de a, b, c dans la matrice et à utiliser la méthode des mineurs diagonaux principaux qui figure dans le cours). Que peut-on en conclure pour f ?
4. On considère maintenant la fonction F de $(\mathbb{R}_+^*)^3$ dans \mathbb{R}^3 définie par :

$$F(x, y, z) = (f(x, y, z), g(x, y, z), h(x, y, z))$$

où f est la fonction précédente, $g(x, y, z) = e^{x^2+y^2+z^2}$ et $h(x, y, z) = \ln(x + y + z)$.

- (a) Calculer la matrice jacobienne de $J_1(F)$ au point $(1; 1; 1)$.
- (b) Montrer sans calculs que $\det(J_1(F)) = 0$. En déduire que 0 est valeur propre de $J_1(F)$.

Chapitre 10

Diagonalisation

Contenu

10.1 Rappels : changement de base	86
10.2 Vecteurs propres-Sous espaces propres	86
10.3 Polynôme caractéristiques-Endomorphismes diagonalisables	87
10.3.1 Polynôme caractéristique	87
10.3.2 Diagonalisation	88
10.3.3 Forme réduite	90
10.3.4 Forme de Jordan	90
10.3.5 Théorème de Cayley-Hamilton	90
10.4 Application au calcul des puissances d'une matrice	91
10.4.1 Utilisation du théorème de Cayley-Hamilton	91
10.4.2 Utilisation d'une forme réduite	91
10.5 Exercices	92

Dans tout le chapitre, E désigne un espace vectoriel sur \mathbb{K} ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}) de dimension finie n . $\mathcal{L}(E)$ est l'espace vectoriel des endomorphismes de E et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans \mathbb{K} .

10.1 Rappels : changement de base



Définition 173

Soit f un endomorphisme de E et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E . On appelle matrice de f dans la base \mathcal{B} la matrice $A = (a_{ij})$ où $f(e_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij}e_i$.



Proposition 174

Soit $V = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$ un élément de E et A la matrice de f dans la base \mathcal{B} . Alors $W = f(V) \iff \widehat{W} = A\widehat{V}$ où \widehat{W} et \widehat{V} sont les vecteurs colonnes des coordonnées de W et de V dans la base \mathcal{B} .

Preuve : c'est évident.



Définition 175

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ deux bases de E . On pose $e'_j = \sum_{i=1}^n \alpha_{ij}e_i$. Alors la matrice $P = (\alpha_{ij})$ s'appelle la matrice de passage de la base \mathcal{B} à la base \mathcal{B}' . C'est aussi la matrice de $Id_E : (E, \mathcal{B}') \rightarrow (E, \mathcal{B})$.



Proposition 176

Si P est inversible et P^{-1} est la matrice de passage de la base \mathcal{B}' à la base \mathcal{B} alors P^{-1} est la matrice de $Id_E : (E, \mathcal{B}) \rightarrow (E, \mathcal{B}')$.



Preuve

On peut considérer P comme la matrice dans la base \mathcal{B} de f telle que $f(e_i) = e'_i$. Et comme f transforme une base en une base, elle est bijective, donc sa matrice est inversible.



Proposition 177

◆ Soit V un élément de E et \widehat{V} (respectivement \widehat{V}') la matrice colonne de ses coordonnées dans la base \mathcal{B} (respectivement dans la base \mathcal{B}'). Alors : $\widehat{V} = P\widehat{V}'$ et $\widehat{V}' = P^{-1}\widehat{V}$.
 ◆ Soit A la matrice de f dans la base \mathcal{B} et A' sa matrice dans la base \mathcal{B}' . Alors :

$$A' = P^{-1}AP \quad \text{et} \quad A = PA'P^{-1}$$

On dit que A et A' sont semblables.

10.2 Vecteurs propres-Sous espaces propres



Définition 178

◆ Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et A sa matrice dans une base de E . Un scalaire λ est appelé une valeur propre de f (ou de A) s'il existe un vecteur V de E^* tel que $f(V) = \lambda V$.
 ◆ Si λ est une valeur propre de f , tout vecteur V de E tel que $f(V) = \lambda V$ s'appelle un vecteur propre relatif à la valeur propre λ . L'ensemble de tous les vecteurs propres relatifs à la valeur propre λ est un sev, que l'on appelle le sous espace propre relatif à la valeur propre λ et que l'on note $E(\lambda)$.



Définition 179

- ◆ Un endomorphisme f de E est dit diagonalisable s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est diagonale. C'est équivalent à dire qu'il existe une base de E formée de vecteurs propres. Les éléments diagonaux de la matrice de f dans cette base sont alors des valeurs propres de f .
- ◆ Une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale. C'est équivalent à dire que A est la matrice dans une base d'un endomorphisme diagonalisable.



Proposition 180

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Un scalaire λ est valeur propre de f ssi $(f - \lambda Id_E)$ est non injective et alors $E(\lambda) = \ker(f - \lambda Id_E)$.



Preuve

λ est valeur propre de f ssi il existe $V \in E^*$ tel que $f(V) = \lambda V \iff$ il existe $V \in E^*$ tel que $f(V) - \lambda V = 0$
 \iff il existe $V \in E^*$ tel que $(f - \lambda Id_E)(V) = 0$ ce qui équivaut à dire que $(f - \lambda Id_E)$ est non injective et (presque) par définition, $E(\lambda) = \ker(f - \lambda Id_E)$.

10.3 Polynôme caractéristiques-Endomorphismes diagonalisables

10.3.1 Polynôme caractéristique



Définition 181

Soit f un endomorphisme de E , de matrice A dans une base \mathcal{B} . Alors le polynôme

$$P_f(X) = P_A(X) = \det(A - XI)$$

ne dépend pas de la base choisie. On l'appelle le polynôme caractéristique de f (ou de A). Il s'écrit :

$$P_f(X) = (-1)^n X^n + (-1)^{n-1} Tr(A) X^{n-1} + \dots + \det(A)$$



Preuve

Si \mathcal{B}' est une autre base et P la matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}' , on sait que f a pour matrice $A' = P^{-1}AP$ dans la base \mathcal{B}' . Mais alors :

$$\begin{aligned} \det(A' - XI) &= \det(P^{-1}AP - XP^{-1}P) = \det[P^{-1}(A - XI)P] \\ &= (\det P^{-1}) \det(A - XI) (\det P) = \det(A - XI) = P_A(X) \end{aligned}$$

Le polynôme est donc indépendant de la base choisie. Calculons $\det(A - XI) = \begin{vmatrix} a_{11} - X & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} - X \end{vmatrix}$.

Si on développe par rapport à une colonne, on voit apparaître le terme $(a_{11} - X) \dots (a_{nn} - X)$, tous les autres termes ne comportant qu'au plus $(n - 2)$ facteurs $(a_{ii} - X)$. Les seuls termes en X^n et X^{n-1} viennent donc du développement de $(a_{11} - X) \dots (a_{nn} - X)$, ce qui donne $(-1)^n X^n + (-1)^{n-1} (\sum_{i=1}^n a_{ii}) X^{n-1}$ (Au passage, comme ce polynôme ne dépend pas de la base, ce résultat montre que la trace de deux matrices semblables est la même, donc que la trace ne dépend que de l'endomorphisme). Comme il est clair que $P(0) = \det A$, le terme constant du polynôme caractéristique est bien $\det(A)$.



Proposition 182

On dit que λ est une valeur propre de f (ou de A) ssi λ est racine du polynôme caractéristique.

Preuve

On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} \lambda \text{ racine de } P_f(X) &\iff P_f(\lambda) = 0 \iff \det(f - \lambda Id_E) = 0 \\ &\iff (f - \lambda Id_E) \text{ non injective} \iff \lambda \text{ valeur propre de } f \end{aligned}$$

Remarque

Un endomorphisme d'un \mathbb{R} -ev peut ne pas admettre de valeur propre. Par exemple f de matrice :
 $\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$, avec $\alpha \neq k\pi$, n'admet pas de valeur propre, son polynôme caractéristique vaut en effet : $X^2 - 2X \cos \alpha + 1$.

10.3.2 Diagonalisation

Définition 183

Soit f un endomorphisme de E , A sa matrice dans une base quelconque de E , λ une valeur propre de f (ou de A) et $P(X)$ le polynôme caractéristique de f (ou de A). On appelle ordre de multiplicité de λ son ordre de multiplicité comme racine de $P(X)$, c'est à dire que son ordre de multiplicité est l'unique entier naturel non nul m tel que : $P(X) = (X - \lambda)^m Q(X)$ avec $Q(\lambda) \neq 0$.

Lemme 184

Soit λ une valeur propre de f d'ordre de multiplicité m et $E(\lambda)$ le sous espace propre associé. Alors :

$$1 \leq \dim E(\lambda) \leq m$$

Preuve

Soit (e_1, \dots, e_r) une base de $E(\lambda)$, avec $r = \dim E(\lambda)$, que l'on complète en une base de E . La matrice A de f dans cette base est de la forme :

$$A = \left(\begin{array}{c|c} \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_r \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} B \\ \vdots \\ B \end{pmatrix} \end{array} \right)$$

On a alors :

$$P(X) = \det(A - XI) = (\lambda - X)^r Q(X)$$

ce qui prouve que $r \leq m$. Et $1 \leq r$ par définition.

Lemme 185

Soit $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ des valeurs propres de f , deux à deux distinctes et $E(\lambda_i)$ les sous espaces propres correspondants. Alors la somme $E(\lambda_1) + E(\lambda_2) + \dots + E(\lambda_s)$ est directe.

Preuve

Par récurrence sur s . Si $s = 1$, il n'y a rien à démontrer. Supposons la propriété vraie pour $s - 1$ valeurs propres deux à deux distinctes et considérons le cas de s valeurs propres distinctes deux à deux. Soient $x_i \in E(\lambda_i)$ pour $i = 1, \dots, s$ tels que $\sum_{i=1}^s x_i = 0$. Alors

$$f\left(\sum_{i=1}^s x_i\right) = 0 \text{ et donc } \sum_{i=1}^s \lambda_i x_i = 0 = \lambda_s \left(\sum_{i=1}^s x_i\right)$$

Par différence, il vient :

$$\sum_{i=1}^{s-1} (\lambda_i - \lambda_s) x_i = 0$$

et l'hypothèse de récurrence assure que $(\lambda_i - \lambda_s) x_i = 0$ pour tout $i = 1, \dots, s - 1$. Comme les λ_i sont deux à deux distincts, on a $x_i = 0$ pour $i = 1, \dots, s - 1$ d'où $x_s = 0$, ce qui donne le résultat.

Théorème 186

Soit $f \in L(E)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) f est diagonalisable.
- (ii) $P_f(X)$ admet toutes ses racines dans \mathbb{K} et pour chaque valeur propre λ_i , d'ordre de multiplicité m_i , on a : $m_i = \dim E(\lambda_i)$.
- (iii) Si $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ sont les différentes valeurs propres de f , alors $E = E(\lambda_1) \oplus \dots \oplus E(\lambda_r)$.

Preuve

(i) \Rightarrow (ii) f est diagonalisable : il existe donc une base dans laquelle la matrice de f est diagonale. Quitte à changer l'ordre des vecteurs de la base, on peut supposer que la matrice de f est :

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & \lambda_1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \lambda_r & \vdots \\ \vdots & & & & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & & \dots & 0 & \lambda_r \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique vaut alors :

$$P(X) = \det(A - XI) = (\lambda_1 - X)^{m_1} \dots (\lambda_r - X)^{m_r}$$

Chaque λ_i a pour ordre de multiplicité m_i . Les m_1 premiers vecteurs de la base engendrent un sev qui est de dimension m_1 et est contenu dans $E(\lambda_1)$. Comme $\dim E(\lambda_1) \leq m_1$, il suit que $E(\lambda_1)$ est exactement le sev engendré par les m_1 premiers vecteurs de la base. On raisonne de même pour les m_2 suivants, puis ... pour les m_r derniers. Ce qui montre bien que pour tout i , $m_i = \dim E(\lambda_i)$.

(ii) \Rightarrow (iii) Le polynôme caractéristique s'écrit donc :

$$P(X) = \prod_{i=1}^r (\lambda_i - X)^{m_i} \text{ avec les } \lambda_i \text{ deux à deux distincts et } \sum_{i=1}^r m_i = n.$$

Comme la somme $E(\lambda_1) \oplus \dots \oplus E(\lambda_r)$ est directe, on a $\dim(E(\lambda_1) \oplus \dots \oplus E(\lambda_r)) = \sum \dim E(\lambda_i) = \sum m_i = n$ d'où $E = E(\lambda_1) \oplus \dots \oplus E(\lambda_r)$.

(iii) \Rightarrow (i) Il suffit de prendre une base dans chaque $E(\lambda_i)$. Leur réunion donne une base de E dans laquelle la matrice de f est diagonale.



Corollaire 187

Si le polynôme caractéristique de f a toutes ses racines simples, alors f est diagonalisable.

10.3.3 Forme réduite



Théorème 188

Soit u un endomorphisme d'un \mathbb{K} -ev E de dimension n ($K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}), de matrice A dans une base de E . On appelle $P(X)$ son polynôme caractéristique et on suppose que P a toutes ses racines dans \mathbb{K} (toujours vrai si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). On écrit $P(X) = (\lambda_1 - X)^{\alpha_1} \dots (\lambda_r - X)^{\alpha_r}$. On pose $E(\lambda_i) = \ker(\lambda_i Id - u)$ (le sous-espace propre associé à la valeur propre λ_i et $E_i = \ker(\lambda_i Id - u)^{\alpha_i}$ (on l'appelle le sous-espace caractéristique relatif à la valeur propre λ_i). On a alors :

- $E(\lambda_i) \subset E_i$
- $\dim(E_i) = \alpha_i$
- $E = E_1 \oplus E_2 \oplus \dots \oplus E_r$
- $u(E_i) \subset E_i$

Si on prend alors une base de E_1, E_2, \dots, E_r et si on les recolle, on obtient une base de E dans laquelle la matrice \hat{A} de u est de la forme :

$$\begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_r \end{pmatrix}$$

où J_i est une matrice carrée d'ordre α_i , triangulaire supérieure, avec λ_i sur la diagonale. Une telle forme s'appelle une forme réduite de A .

10.3.4 Forme de Jordan



Théorème 189

Soit u un endomorphisme d'un \mathbb{K} -ev E de dimension n ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}), de matrice A dans une base de E . On appelle $P(X)$ son polynôme caractéristique et on suppose que P a toutes ses racines dans \mathbb{K} (toujours vrai si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). On écrit $P(X) = (\lambda_1 - X)^{\alpha_1} \dots (\lambda_r - X)^{\alpha_r}$. Il existe alors une base de E dans laquelle la matrice \hat{A} de u est de la forme :

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \varepsilon_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \varepsilon_n \\ & & & \lambda_r \end{pmatrix} \text{ où } \varepsilon_i = 0 \text{ ou } 1.$$

Une telle matrice s'appelle une forme de Jordan et la base dans laquelle on l'a obtenue s'appelle une base de Jordan pour u .

10.3.5 Théorème de Cayley-Hamilton



Théorème 190

Soit u un endomorphisme d'un \mathbb{K} -ev E de dimension n ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}), de matrice A dans une base de E . On appelle $P(X)$ son polynôme caractéristique et on écrit : $P(X) = (-1)^n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_0$. Alors on a :

$$\begin{aligned} (-1)^n u^n + a_{n-1} u^{n-1} + \dots + a_0 Id &= 0 & \text{et} \\ (-1)^n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \dots + a_0 I &= 0 \end{aligned}$$

Ce que l'on note : $P(u) = 0$ et $P(A) = 0$.

10.4 Application au calcul des puissances d'une matrice

10.4.1 Utilisation du théorème de Cayley-Hamilton

Indication

Soit u un endomorphisme d'un \mathbb{K} -ev E de dimension n ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}), de matrice A dans une base de E et de polynôme caractéristique $P(X)$. Soit m un entier naturel. On calcule le reste de la division euclidienne de X^m par $P(X)$ i.e. :

$$X^m = P(X)Q(X) + R(X) \quad \text{où} \quad \deg R < \deg P = n$$

On peut alors écrire :

$$\begin{aligned} A^m &= P(A)Q(A) + R(A) \\ &= R(A) \text{ puisque } P(A) = 0 \end{aligned}$$

10.4.2 Utilisation d'une forme réduite

Proposition 191

Soit \hat{A} une matrice sous forme réduite. On note $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ l'ordre des blocs triangulaires qui composent \hat{A} . Alors $\hat{A} = D + N$ où :

- D est la matrice diagonale qui a les mêmes éléments diagonaux que \hat{A} .
- D et N commutent ($ND = DN$).
- N est nilpotente et plus précisément, $N^m = 0$ sitôt que $m \geq \text{Max} \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\} = s$.
- Pour $p \geq s - 1$, on a :

$$\hat{A}^p = D^p + \binom{p}{1} D^{p-1} N + \dots + \binom{p}{s-1} D^{p-s+1} N^{s-1}$$

Remarque

Conséquence : si u est un endomorphisme de E , de matrice A dans une base donnée, et si on peut mettre A sous forme réduite \hat{A} , on a, en notant P la matrice de passage :

$$A = P\hat{A}P^{-1} \quad \text{d'où} \quad A^m = P\hat{A}^mP^{-1}$$

ce qui donne simplement A^m .

10.5 Exercices

Exercice 89

Pour chacune des matrices suivantes, dire si elle est diagonalisable, et dans l'affirmative, diagonalisez-la et calculez ses puissances $n^{\text{ième}}$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 15 & -2 & 6 \\ 21 & -2 & 9 \\ -28 & 4 & -11 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} a & a & 0 \\ b & b & 0 \\ c & d & e \end{pmatrix} \text{ (on discutera selon les valeurs de } a, b, c, d, e \text{)}$$

Exercice 90

Mêmes questions pour les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 3/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1/2 & 1 & 3/2 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 91

Soit A une matrice diagonalisable. Etudier la diagonalisation de A^n où n est un entier naturel, $P(A)$ où P est un polynôme et de A^{-1} si A est inversible.

Exercice 92

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ une matrice à coefficients réels.

1. Dire, selon les valeurs de a et de b , si la matrice est diagonalisable.
2. Dans le cas où $a = 3$ et $b = 0$, diagonaliser A .

Exercice 93

Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que f n'est pas diagonalisable.
2. Montrer que $(A - 4I)^2 = 0$ (I désigne la matrice identité).
3. Soit $u_2 = (1, 1, 1)$. Montrer que $(f - 4Id)(u_2)$ est un vecteur propre u_1 de f (Id désigne l'application identique de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^3).
4. On pose $u_3 = (2, 0, 1)$. Montrer que $\{u_1, u_2, u_3\}$ est une base de \mathbb{R}^3 . Quelle est la matrice de f dans cette base? Calculer A^n .

Exercice 94

- Soit $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que A_3 est diagonalisable. Diagonaliser A_3 et calculer A_3^m pour $m \in \mathbb{N}$.
- On généralise. Soit A_n la matrice carrée d'ordre n ($n \in \mathbb{N}^*$) définie par :

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- (a) Montrer que le polynôme caractéristique de A_n , $P_{A_n}(X) = \det(A - XI)$ peut s'écrire :

$$P_{A_n}(X) = (n - X)(-X)^{n-1}$$

(On pourra faire la somme des colonnes par exemple.)

- (b) Si $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ désigne la base canonique de \mathbb{R}^n , $V(0)$ et $V(n)$ les sous-espaces propres relatifs aux valeurs propres 0 et n , montrer que l'on peut prendre $\{e_1 - e_2, e_1 - e_3, \dots, e_1 - e_n\}$ comme base de $V(0)$ et $\{e_1 + e_2 + \dots + e_n\}$ comme base de $V(n)$.

En déduire que A_n est diagonalisable.

- (c) (C'est un petit peu plus difficile). On pose $u_i = e_1 - e_{i+1}$ pour $i = 1, 2, \dots, n-1$ et $u_n = \sum_{i=1}^n e_i$. Montrer, en calculant e_1, e_2, \dots, e_n en fonction des u_i , que si P désigne la matrice de passage de la base $\{e_i\}$ à la base $\{u_i\}$, alors :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & -\frac{n-1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{1}{n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \frac{1}{n} & -\frac{n-1}{n} \\ \frac{1}{n} & \cdots & \cdots & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} \end{pmatrix}$$

- (d) En déduire que :

$$A_n^m = \begin{pmatrix} n^{m-1} & n^{m-1} & \cdots & n^{m-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n^{m-1} & \cdots & \cdots & n^{m-1} \end{pmatrix}$$

Exercice 95

On dit qu'une matrice carrée d'ordre n (a_{ij}) est stochastique si tous ses éléments sont positifs ou nuls ($a_{ij} \geq 0 \forall i, j$) et si la somme des termes de chaque ligne vaut 1 : $\sum_{j=1}^n a_{ij} = 1 \quad \forall i = 1, \dots, n$.

- Montrer que si A et B sont stochastiques, alors AB et A^n sont stochastiques pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- Montrer que si α et β sont deux réels positifs tels que $\alpha + \beta = 1$, alors $\alpha A + \beta B$ est stochastique.
- Soit A une matrice stochastique. Montrer que $U = (1, 1, \dots, 1)^T$ est un vecteur propre de A pour la valeur propre 1.
- Retrouver que 1 est valeur propre de A stochastique en montrant que l'on peut mettre $(1 - \lambda)$ en facteur dans son polynôme caractéristique (on ne demande pas de calculer ce polynôme).

Exercice 96

Soit $a \in \mathbb{R}$, notons A la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a & 1+a \end{pmatrix}.$$

On définit une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, par la donnée de u_0 et u_1 et la relation de récurrence suivante, pour $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+2} = (1+a)u_{n+1} - au_n$$

1. Pour quelles valeurs de a la matrice A est-elle diagonalisable ?
2. Lorsque A est diagonalisable, calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.
3. On suppose A diagonalisable. On note U_n le vecteur $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$, exprimer U_{n+1} en fonction de U_n et de A , puis U_n en fonction de U_0 et de A .

Exercice 97

Soit (u_n) une suite réelle vérifiant l'équation de récurrence : $u_{n+3} = 6u_{n+2} - 11u_{n+1} + 6u_n$.

1. On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$. Montrer qu'il existe une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $X_{n+1} = AX_n$.
2. Diagonaliser A . En déduire u_n en fonction de u_0, u_1, u_2 et n .

Chapitre 11

Fonctions homogènes, concaves et convexes

Contenu

11.1 Introduction	96
11.2 Fonctions homogènes en économie	96
11.3 Fonctions d'une variable : Rappels	97
11.4 Passage à la dimension n	98
11.5 Formes quadratiques et matrices symétriques	99
11.6 Hessienne et fonctions concaves ou convexes	99
11.7 Etude du signe d'une forme quadratique	100
11.8 Exercices	101

11.1 Introduction



Définition 192

Soit $f : (\mathbb{R}_+^*)^n \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $r \in \mathbb{R}$.
On dit que f est homogène de degré r si :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, f(tX) = t^r f(X), \text{ pour tout } X \in (\mathbb{R}_+^*)^n$$



Exemple

$$f(x, y, z) = kx^\alpha y^\beta z^\gamma \text{ (Cobb-Douglas à 3 variables)}$$

$$f(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz \text{ (quadratique)}$$



$f(x, y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$
 f n'est pas homogène.

11.2 Fonctions homogènes en économie



Définition 193

Si f est une fonction de production de n variables : $f(x_1, \dots, x_n)$ n inputs pour 1 output

1. Si f est homogène de degré 1 alors $f(tx_1, \dots, tx_n) = tf(x_1, \dots, tx_n)$.
Si on double tous les inputs alors la production double.
On dit qu'une telle fonction est à rendements d'échelle constants.
2. Si f est homogène de degré r avec $0 < r < 1$ alors f est dite à rendements d'échelle décroissants.
3. Si f est homogène de degré r avec $r > 1$ alors f est dite à rendements d'échelle croissants.



Exemple

Une fonction de Cobb-Douglas $f(x_1, \dots, x_n) = kx_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$
est homogène de degré $\alpha_1 + \dots + \alpha_n$.



Proposition 194

Si f est de classe C^1 et si f est homogène de degré r , alors ses dérivées partielles sont homogènes de degré $r - 1$.



Théorème 195

(Théorème d'Euler.)

Soit f une fonction de classe C^1 sur $(\mathbb{R}_+^*)^n$ et homogène de degré r .

Alors, pour tout $X \in (\mathbb{R}_+^*)^n$:

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(X) + \dots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(X) = r \times f(X) = X \cdot \nabla f(X)$$

Ce qui s'écrit :

$$\sum_{i=1}^n \epsilon_{f/x_i}(X) = r.$$



Théorème 196

(Réciproque du Théorème d'Euler.)

Si f est une fonction de classe C^1 sur $(\mathbb{R}_+^*)^n$ et si

$$\sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(X) = r \times f(X)$$

pour tout $X \in (\mathbb{R}_+^*)^n$. Alors, f est homogène de degré r .

11.3 Fonctions d'une variable : Rappels



Définition 197

La fonction f est dite convexe si

$$\forall (x, y) \in I^2, \forall \lambda \in [0, 1], f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

Elle est dite concave si $-f$ est convexe.



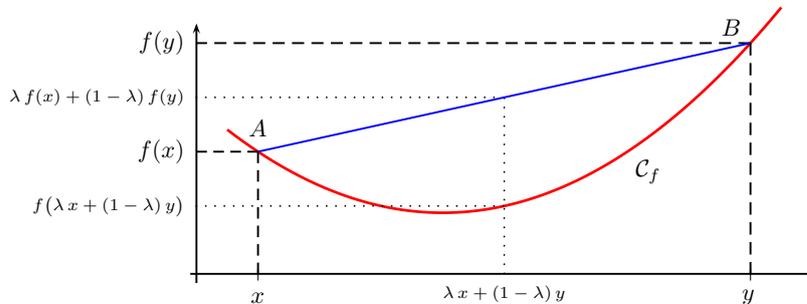
Définition 198

On dit que f est convexe (resp. concave) sur un intervalle I si pour tous points A et B de la courbe représentant f , l'arc de courbe est situé au-dessous (au-dessus) du segment $[AB]$.



Exemple

Les fonctions $x \mapsto x^2$, $x \mapsto |x|$ sont convexes.



Proposition 199

Soit f une fonction de classe C^1 sur un intervalle I .

Alors f est convexe (resp. concave) sur I si et seulement si :

$$f(y) - f(x) \geq f'(x)(y - x), \quad \forall (x, y) \in I^2$$

$$(\text{resp. } f(y) - f(x) \leq f'(x)(y - x), \quad \forall (x, y) \in I^2)$$



Proposition 200

Soit f une fonction de classe C^2 sur un intervalle I . Alors :

- f est convexe sur $I \iff f''(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$
- f est concave sur $I \iff f''(x) \leq 0$ pour tout $x \in I$



Exemple

Inégalités de convexité Si f est dérivable et convexe sur I alors sa courbe représentative est au-dessus de chacune de ses tangentes :

$$\forall a, x \in I, f(x) \geq f'(a)(x - a) + f(a)$$

Pour les fonctions concaves l'inégalité est inversée.



Remarque

L'intérêt des fonctions convexes ou concaves dans les problèmes d'optimisation s'explique par le résultat suivant :



Proposition 201

Soit f une fonction concave (resp. convexe) sur intervalle ouvert I . Si x_0 est un point critique pour f , alors f présente en x_0 un maximum (resp. minimum) global sur I .

11.4 Passage à la dimension n



Définition 202

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ définie sur un ensemble convexe U .
On dit que f est concave (resp. convexe) sur U si :

$$\forall \lambda \in [0, 1], \forall X, Y \in U$$

$$f(\lambda X + (1 - \lambda)Y) \geq \lambda f(X) + (1 - \lambda)f(Y)$$

$$\text{(resp. } f(\lambda X + (1 - \lambda)Y) \leq \lambda f(X) + (1 - \lambda)f(Y)\text{)}$$



Proposition 203

Soit f de classe C^1 définie sur un convexe U .
Alors f est concave (resp. convexe) sur U si et seulement si :

$$\forall X, Y \in U$$

$$f(Y) - f(X) \leq \nabla f(X) \cdot (Y - X)$$

$$\text{ou encore } f(y_1, \dots, y_n) - f(x_1, \dots, x_n) \leq \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(y_i - x_i)$$

$$\left(\text{resp. } f(y_1, \dots, y_n) - f(x_1, \dots, x_n) \geq \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(y_i - x_i) \right)$$

11.5 Formes quadratiques et matrices symétriques



Définition 204

Une forme quadratique définie sur \mathbb{R}^n est une fonction à valeurs réelles qui peut s'écrire sous la forme :

$$q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n a_{ii}x_i^2 + 2 \sum_{i < j} a_{ij}x_i x_j$$

où $A = (a_{ij})$ est l'unique matrice symétrique correspondant à l'expression de q .

Réciproquement, à toute matrice symétrique A , peut être associée une fonction à valeurs réelles $q(x_1, \dots, x_n) = X A^t X$ avec $X = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)$, identique à celle définie précédemment.

Cette fonction est une forme quadratique.



Définition 205

Soit A une matrice symétrique d'ordre n .

Alors A est dite :

1. définie positive (resp. semi-définie positive) si $q(x_1, \dots, x_n) = X A^t X > 0$ pour tout $X \in \mathbb{R}^n$ et $X \neq O_{\mathbb{R}^n}$ (resp. $q(x_1, \dots, x_n) = X A^t X \geq 0$)
2. définie négative (resp. semi-définie négative) si $q(x_1, \dots, x_n) = X A^t X < 0$ pour tout $X \in \mathbb{R}^n$ et $X \neq O_{\mathbb{R}^n}$ (resp. $q(x_1, \dots, x_n) = X A^t X \leq 0$)
3. indéfinie s'il existe des vecteurs X de \mathbb{R}^n tel que $X A^t X > 0$ et d'autres tel que $X A^t X < 0$.

11.6 Hessienne et fonctions concaves ou convexes



Proposition 206

Soit f de classe C^2 sur un sous-ensemble ouvert U de \mathbb{R}^n . Alors, f est une fonction concave sur U si et seulement si la matrice hessienne de f est semi-définie négative pour tout X de U .

La fonction f est convexe sur U si et seulement si la matrice hessienne de f est semi-définie positive pour tout X de U .



Proposition 207

Soit f de classe C^2 sur un sous-ensemble ouvert U de \mathbb{R}^n . Alors, f est une fonction concave sur U si et seulement si la matrice hessienne de f a toutes ses valeurs propres négatives ou nulles.

La fonction f est convexe sur U si et seulement si la matrice hessienne de f a toutes ses valeurs propres positives ou nulles.



Remarque

Dans \mathbb{R}^2 , on utilisera une propriété pratique...car décomposer des formes quadratiques en somme de carrés...ce

n'est pas gagné 😊.



Proposition 208

Soit f de classe C^2 sur un sous-ensemble ouvert U de \mathbb{R}^2 . Alors :

1. f est concave sur U si et seulement si $\forall (x, y) \in U, \text{tr}(H_f(x, y)) < 0$ et $\det(H_f(x, y)) \geq 0$.
2. f est convexe sur U si et seulement si $\forall (x, y) \in U, \text{tr}(H_f(x, y)) > 0$ et $\det(H_f(x, y)) \geq 0$.

Remarque

Une fonction de production de Cobb-Douglas définie sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ est concave si et seulement si ses rendements d'échelle sont constants ou décroissants.

11.7 Etude du signe d'une forme quadratique

Proposition 209

On peut décomposer une forme quadratique sur \mathbb{R}^n comme combinaison linéaire de carrés de formes linéaires indépendantes. Cette décomposition n'est pas unique, mais les nombres de coefficients strictement positifs et strictement négatifs de ces CL est fixe. Le couple (m, p) de ces deux nombres s'appelle la signature de la forme quadratique.

Définition 210

Soit A une matrice carrée d'ordre n . On appelle mineur principal d'ordre k ($k = 1, 2, \dots, n$) le déterminant de la matrice obtenue en éliminant de A les mêmes $n - k$ colonnes et $n - k$ lignes. On appelle mineur diagonal principal d'ordre k ($k = 1, 2, \dots, n$) le déterminant de la matrice obtenue en éliminant de A les $n - k$ dernières colonnes et les $n - k$ dernières lignes.

Exemple

Déterminons les mineurs diagonaux principaux de $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{(3,3)}(\mathbb{R})$.

$$M_1 = \begin{vmatrix} a_{11} \end{vmatrix} = a_{11}$$

$$M_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$M_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Exemple

Déterminons les mineurs principaux de $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{(3,3)}(\mathbb{R})$.

Trois mineurs principaux d'ordre un :

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{11} \end{vmatrix} = a_{11} \quad , \quad M_{22} = \begin{vmatrix} a_{22} \end{vmatrix} = a_{22} \quad , \quad M_{33} = \begin{vmatrix} a_{33} \end{vmatrix} = a_{33}$$

Trois mineurs principaux d'ordre deux :

$$M_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad , \quad M_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \quad , \quad M_{23} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Un mineur principal d'ordre trois : $M_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

Proposition 211

Soit q une forme quadratique sur \mathbb{R}^n et A la matrice symétrique associée. Alors :

- (i) q est définie positive ssi tous ses n mineurs diagonaux principaux sont strictement positifs.
- (ii) q est définie négative ssi tous ses n mineurs diagonaux principaux d'ordre k ($k = 1, \dots, n$) M_k vérifient : $(-1)^k M_k > 0$.
- (iii) Si l'un des mineurs diagonaux principaux est non nul et ne vérifie pas l'une des deux règles de signes ci-dessus, alors q est de signe variable (q est indéfinie).

Proposition 212

Soit q une forme quadratique sur \mathbb{R}^n et A la matrice symétrique associée. Alors :

- (i) q est semi-définie positive ssi tous ses $2^n - 1$ mineurs principaux sont positifs ou nuls.
- (ii) q est semi-définie négative ssi tous ses $2^n - 1$ mineurs principaux d'ordre k ($k = 1, \dots, n$) M_k vérifient : $(-1)^k M_k \geq 0$.
- (iii) Sinon q est de signe variable (q est indéfinie).

11.8 Exercices

Exercice 98

On considère une fonction de Cobb-Douglas de deux variables définie par

$$f(x, y) = x^\alpha y^\beta \quad \text{pour } x > 0 \text{ et } y > 0$$

1. Calculer la matrice hessienne de f au point (a, b) . On la note $H_f(a, b)$.
2. Montrer que la forme quadratique définie par $H_f(a, b)$ est :

$$q(x, y) = a^{\alpha-2} b^{\beta-2} [\alpha(\alpha-1)b^2 x^2 + \beta(\beta-1)a^2 y^2 + 2\alpha\beta abxy]$$

3. En déduire que si $\begin{cases} \alpha > 0 \\ \beta > 0 \\ \alpha + \beta < 1 \end{cases}$ alors f est concave sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.

Remarque

Une fonction de production de Cobb-Douglas définie sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ est concave si et seulement si ses rendements d'échelle sont constants ou décroissants.

Exercice 99

Soit f la fonction de production définie sur $D' = (\mathbb{R}_+^*)^2$ par

$$f(x, y) = x^{1/3} \sqrt{y}$$

1. Montrer que f est homogène et déterminer son degré d'homogénéité.
2. Si on double les quantités x et y , comment varie la production de f ?
3. Montrer que f vérifie l'égalité d'Euler.
4. Calculer la hessienne de f au point $(a, b) \in D'$.
5. Montrer que la fonction f est concave sur D' .

Chapitre 12

Optimisation des fonctions de plusieurs variables

Contenu

12.1	Extrema locaux et globaux	103
12.1.1	Introduction	103
12.1.2	Théorème des extrema globaux sur un compact	103
12.1.3	Condition nécessaire d'extremum local	103
12.2	Extrema et Hessienne	105
12.3	Extrema globaux et convexité	107
12.3.1	Résumons la marche à suivre	107
12.4	Exercices	108

12.1 Extrema locaux et globaux

12.1.1 Introduction



Définition 213

On étudie le comportement d'une fonction de plusieurs variables à valeurs réelles. Une telle fonction peut avoir des valeurs extrémales : des minima (des valeurs les plus petites) ou des maxima (des valeurs les plus grandes) sur tout le domaine de définition ou bien sur une certaine partie.

On les appelle des extrema.



Définition 214

Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur une partie $D \subset \mathbb{R}^n$.

1. On dit que f admet un maximum (resp. minimum) global au point $A \in D$ si pour tout $X \in D$ on a $f(X) \leq f(A)$ (resp. $f(X) \geq f(A)$). Le maximum (resp. minimum) est appelé strict si $f(X) < f(A)$ (resp. $f(X) > f(A)$).
2. On dit que f admet un maximum (resp. minimum) local au point $A \in D$ si on peut trouver un nombre $r > 0$ tel que $X \in D$ et $\|X - A\| < r$ entraîne $f(X) \leq f(A)$ (resp. $f(X) \geq f(A)$).

Les extrema globaux sont appelés aussi extrema absolus.

12.1.2 Théorème des extrema globaux sur un compact



Théorème 215

Soit $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur un compact $K \subset \mathbb{R}^n$ (compact=fermé+borné). Alors f admet un maximum global et un minimum global sur K .



Remarque

En dimension $n = 1$ la fonction a des points extrémaux sur un intervalle. Soit ils sont à l'intérieur de l'intervalle, auquel cas ils vérifient $f'(x) = 0$, soit ils sont au bord de l'intervalle (sur le bord, la condition $f'(x) = 0$ n'est pas forcément satisfaite).

Donc pour trouver les extrema on cherche d'abord des points critiques (où la dérivée s'annule), puis on compare la valeur des points critiques avec les valeurs sur le bord de l'intervalle. Les valeurs max et min se trouvent parmi ces valeurs-là.



Définition 216

Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 sur une partie D de \mathbb{R}^n . On dit que $A \in D$ est un point critique de f si toutes les dérivées partielles s'annulent en A (équivalent à dire que le gradient de f est nul en A , équivalent à dire aussi que la différentielle de f est nulle en A).

12.1.3 Condition nécessaire d'extremum local



Proposition 217

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 définie sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ admettant un maximum ou un minimum local au point $A \in U$. Alors A est un point critique de f .



La réciproque est fausse!!!

⚡ Preuve

Reprenons la formule de Taylor à l'ordre 2 en dimension 2.
La preuve se généralise sans problème aux dimensions supérieures.

$$f(a+h, b+k) - f(a, b) = h \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) + k \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) + \frac{1}{2} \left(h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) + 2hk \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) + k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) \right) + o(\|(h, k)\|^2)$$

Si on a un maximum local en A , alors $f(a+h, b+k) - f(a, b) \leq 0$ pour tout (h, k) suffisamment petit. La valeur de la fonction linéaire de deux variables $h \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) + k \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$, si elle n'est pas 0, est grande par rapport aux termes suivants. Donc cette valeur, si elle n'est pas égale à 0, doit être négative.

Pourtant pour h, k positifs il faut que les constantes $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a, b) \leq 0$, $i = 1, 2$ et pour h, k négatifs il faut que les mêmes valeurs $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a, b) \geq 0$, $i = 1, 2$, d'où $\frac{\partial f}{\partial x_i} \equiv 0$, $i = 1, 2$.

On peut refaire le même raisonnement pour un min local.

⚡ Exemple

Soit $f : (x, y) \mapsto x^2 - 2x + xy + y^2$, définie et de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 .

Montrons que f admet un minimum local en $\left(\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right)$.

Si f admet un extremum local en $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, alors $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$ ou encore $\begin{cases} 2x + y = 2 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$.

On trouve alors après calculs que $(x, y) = \left(\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ est l'unique point critique de f sur \mathbb{R}^2 .

⚠ Est-il vraiment un extremum local ?

⚡ Exemple

Il faut comparer $f(x, y)$ et $f\left(\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ pour (x, y) voisin de $\left(\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right)$. Ce qui revient à étudier le signe de

$$f\left(\frac{4}{3} + h, -\frac{2}{3} + k\right) \text{ pour } (h, k) \text{ voisin de } (0, 0)$$

D'après la formule de Taylor à l'ordre 2, on a pour tout $(h, k) \in \mathbb{R}^2$:

$$f\left(\frac{4}{3} + h, -\frac{2}{3} + k\right) - f\left(\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right) = h^2 + hk + k^2 = \left(h + \frac{k}{2}\right)^2 + \frac{3k^2}{4}$$

$$f\left(\frac{4}{3} + h, -\frac{2}{3} + k\right) - f\left(\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right) \geq 0$$

⚠ f admet un minimum local en $\left(\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ qui vaut $f\left(\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right) = -\frac{4}{3}$.

⚡ Remarque

Tout ceci est long et fastidieux il faut étudier des conditions du second ordre en se servant de la matrice Hessienne.

12.2 Extrema et Hessienne

Soit $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ et $X_0 \in D$.

Remarque

Quand $n = 1$, pour savoir si un point critique X_0 est un maximum local ou un minimum local, on étudie la dérivée seconde (quand elle existe) :

- si $f''(X_0) > 0$, alors $f(X_0)$ est un minimum local,
- si $f''(X_0) < 0$, alors $f(X_0)$ est un maximum local,
- si $f''(X_0) = 0$, il faut faire des calculs supplémentaires de dérivées supérieures - ce peut être un point d'inflexion, un maximum ou un minimum.



Dans le cas des fonctions de plusieurs variables, à la place de f'' , on étudie la Hessienne.

Proposition 218

Soit $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ et $X_0 \in D$ un point critique de f .

On suppose que la Hessienne $H_f(X_0)$ existe. Alors

- si $H_f(X_0)$ est définie positive (${}^tXH_f(X_0)X > 0$, pour tout $X \in \mathbb{R}^n$ et $X \neq O_{\mathbb{R}^n}$) alors $f(X_0)$ est un minimum local,
- si $H_f(X_0)$ est définie négative (${}^tXH_f(X_0)X < 0$, pour tout $X \in \mathbb{R}^n$ et $X \neq O_{\mathbb{R}^n}$) alors $f(X_0)$ est un maximum local,
- si $H_f(X_0)$ est indéfinie alors X_0 n'est ni un maximum local ni un minimum local : X_0 est un point selle,
- sinon il faut étudier des termes d'ordre supérieur dans la décomposition de Taylor en X_0 ...

Proposition 219

Soit $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ et $X_0 \in D$ un point critique de f .

On suppose que la Hessienne $H_f(X_0)$ existe. Alors

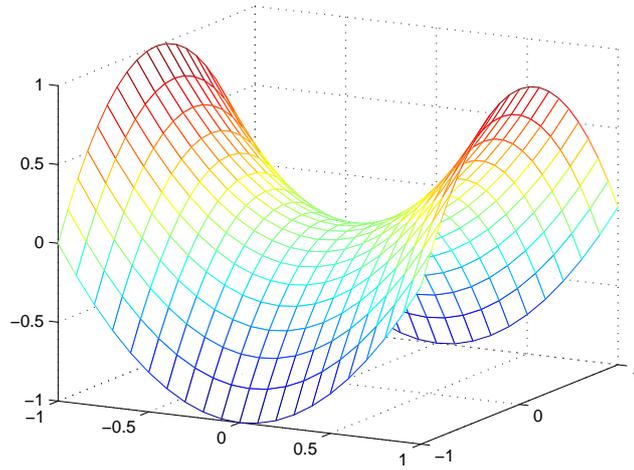
- si $H_f(X_0)$ est définie positive (ssi tous ses n mineurs diagonaux principaux sont strictement positifs) alors $f(X_0)$ est un minimum local,
- si $H_f(X_0)$ est définie négative (ssi tous ses n mineurs diagonaux principaux d'ordre k ($k = 1, \dots, n$) M_k vérifient : $(-1)^k M_k > 0$) alors $f(X_0)$ est un maximum local,
- si l'un des mineurs diagonaux principaux est non nul et ne vérifie pas l'une des deux règles de signes ci-dessus, alors X_0 est un point selle (comme selle de cheval) ou point col (comme dans les montagnes),
- sinon on ne pas conclure.

Proposition 220

Soit $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ et $X_0 \in D$ un point critique de f .

On suppose que la Hessienne $H_f(X_0)$ existe. Alors

- si $\det(H_f(X_0)) > 0$, f admet un extremum local en X_0
 - si $\text{tr}(H_f(X_0)) > 0$ alors $f(X_0)$ est un minimum local,
 - si $\text{tr}(H_f(X_0)) < 0$ alors $f(X_0)$ est un maximum local,
- si $\det(H_f(X_0)) < 0$ alors X_0 est un point selle (comme selle de cheval) ou point col (comme dans les montagnes)
- si $\det(H_f(X_0)) = 0$ alors on ne peut pas conclure, on doit regarder la formule de Taylor à l'ordre supérieur (à l'ordre 3 et parfois plus)...



$$f(x, y) = x^2 - y^2$$

(0; 0) point selle

Exemple

Extrema locaux et globaux de $f(x, y) = 2x^2y + 2x^2 + y^2$ sur \mathbb{R}^2 . Points critiques :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 4xy + 4x = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2 + 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(y+1) = 0 \\ x^2 + y = 0 \end{cases}$$

On trouve alors trois points critiques $(0, 0)$, $(-1, -1)$ et $(1, -1)$.

Points critiques	$(0, 0)$	$(-1, -1)$	$(1, -1)$
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 4y + 4$	4	0	0
$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 4x$	0	-4	4
$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 2$	2	2	2
$\det(H_f(X_0))$	8	-16	-16
Signe de $\text{tr}(H_f(X_0))$	> 0		
Nature du point critique :	min	point selle	point selle

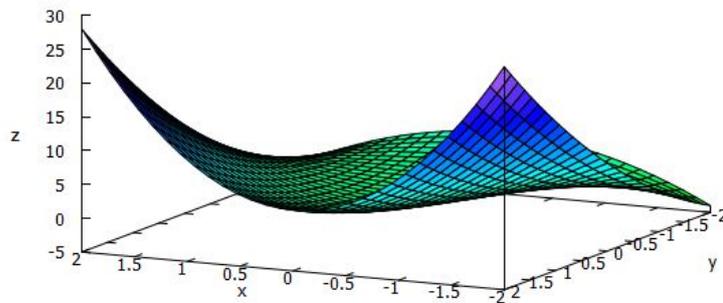
Pour les extrema globaux on voit que :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x, 0) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} 2x^2 = +\infty$$

donc pas de maximum global.

Pas de minimum global non plus car

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x, -2) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} -2x^2 + 4 = -\infty$$



$$f(x, y) = 2x^2y + 2x^2 + y^2$$

12.3 Extrema globaux et convexité

Proposition 221

Soit f une fonction convexe sur un ouvert convexe Ω de \mathbb{R}^n .

- Si f admet en $X_0 \in \Omega$ un minimum local, alors f admet en X_0 un minimum global.
- Si f est de classe C^1 sur Ω . Alors si $\text{grad } f(X_0) = 0$, f admet en X_0 un minimum global sur Ω .

On a des énoncés équivalents en remplaçant convexe par concave et minimum par maximum.

12.3.1 Résumons la marche à suivre

Remarque

Il s'agit d'optimiser une fonction f sur un domaine fermé borné Δ de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ délimité par des inégalités que doivent vérifier les variables; en microéconomie elles seront du type $x \geq 0$ et $y \geq 0$ et $ax + by \leq c$ avec a, b, c constantes positives. La fonction f étant continue elle admet sur Δ un maximum (global) et un minimum (global).



- On recherche les éventuels points critiques de f à l'intérieur de Δ et on examine en ces points la condition du second ordre : on a ainsi optimisé la fonction à l'intérieur de Δ .
- On étudie localement la fonction sur le bord de Δ (en se ramenant à une fonction d'une variable à étudier sur un segment).
- On conclut en regroupant tous les points critiques à l'intérieur et sur le bord de Δ .

12.4 Exercices

Exercice 100

Pour les fonctions suivantes, donner les points critiques, et, quand c'est possible, leur nature (max local, min local, point selle).

1. $f(x, y) = x^4 + x^2 - 6xy + 3y^2$

3. $h(x, y) = xy^2 + x^3y - xy$

2. $g(x, y) = x^2 - 6xy + 2y^2 + 10x + 2y - 5$

4. $k(x, y) = 3x^4 + 3x^2y - y^3$

Exercice 101

Soit f définie par

$$f(x, y) = x^4 + 2x^2y + 2y^2 + 2y + 1$$

1. La fonction f est-elle de classe C^2 sur \mathbb{R}^2 ?
2. Déterminer les points critiques de f sur \mathbb{R}^2 .
3. Calculer en chaque point critique la matrice des dérivées secondes et identifier les extremums locaux de f en étudiant la forme quadratique associée.
4. S'agit-il d'extremums (globaux) sur \mathbb{R}^2 ?

Exercice 102

Soit $l(x, y, z) = x^2 + 6xy + y^2 - 3yz + 4z^2 - 10x - 5y - 21z$.

1. Montrer que $(2; 1; 3)$ est l'unique point critique de l .
2. Montrer que la forme quadratique définie par $H_l(2; 1; 3)$ est :

$$q(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 + 8z^2 + 12xy - 6yz$$

3. Montrer que $q(x, y, z) = 2(x + 3y)^2 - 16(y + \frac{3}{16}z)^2 + \frac{137}{16}z^2$.
4. En déduire la nature du point critique.
5. Retrouver ce résultat en utilisant la méthode des mineurs diagonaux principaux.

Exercice 103

On considère la fonction f définie et de classe C^∞ sur \mathbb{R}^2 par :

$$f(x, y) = x^3 + 2xy - 2x^2 + y^2$$

1. Trouver les extrema locaux éventuels de f .
2. En utilisant la matrice hessienne de f , déterminer la nature des points critiques de f .
3. On veut maintenant trouver les extrema de f sur le domaine :

$$\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que : } -3 \leq x \leq 3 \text{ ; } -3 \leq y \leq 3 \}$$

- (a) Donner une représentation graphique de Δ permettant d'identifier clairement les sommets.
- (b) Montrer que f possède des extrema sur Δ .
- (c) Déterminer, en étudiant successivement l'intérieur et les arêtes de Δ , l'ensemble des points où f admet un minimum et un maximum sur Δ .

Indication

 $f\left(\frac{2-\sqrt{22}}{3}, -3\right) \simeq 12$ et $f\left(\frac{2+\sqrt{22}}{3}, -3\right) \simeq -3, 2$.

Exercice 104

On considère la fonction f définie et de classe C^∞ sur \mathbb{R}^2 par :

$$f(x, y) = x^2 + \alpha y^2 + xy + x \quad \text{où } \alpha \text{ est un réel.}$$

1. Calculer la hessienne de f en un point (x, y) et en déduire que f est convexe sur \mathbb{R}^2 si et seulement si $\alpha \geq \frac{1}{4}$.
2. Dans toute la suite du problème, on suppose que $\alpha = 1$.
Montrer que f admet un minimum global sur \mathbb{R}^2 en un point que l'on déterminera.
3. On veut maintenant trouver les extremums de f sur le domaine :

$$\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que : } x \leq 0 ; y \geq 0 ; y - x \leq 2\}$$

- (a) Représenter soigneusement Δ .
- (b) Montrer que le problème a des solutions.
- (c) Que peut-on dire des minimums de f sur le domaine ?
- (d) Etudier successivement l'intérieur de Δ et ses arêtes pour résoudre :

$$\begin{cases} \max f(x, y) \\ (x, y) \in \Delta \end{cases}$$

Exercice 105

Une firme fabrique un produit qu'elle vend sur deux marchés différents. Soit q_1 (resp. q_2) le nombre de produits vendus sur le premier (resp. second) marché. On suppose que les prix du produit sont donnés par les fonctions $p_1 = 60 - 2q_1$ (pour le premier marché) et $p_2 = 80 - 4q_2$ (pour le second marché). Le coût de production est donné par la fonction $C = 50 + 40q$, où q est le nombre total de produits vendus. Calculer q_1 et q_2 pour que le bénéfice soit maximum.

Indication

 On montrera que le bénéfice est donné par la fonction $B(q_1, q_2) = -2q_1^2 - 4q_2^2 + 20q_1 + 40q_2 - 50$.

Exercice 106

Soit un monopole discriminant produisant un unique bien pour deux types de consommateurs. Les fonctions de demande inverse étant données respectivement pour les types 1 et 2 par $50 - 5Q_1$ et $100 - 10Q_2$ et la fonction de coût par $90 + 20Q$ (avec $Q = Q_1 + Q_2$).

Quelles quantités Q_1 et Q_2 le monopole devra-t-il mettre sur chaque marché afin de maximiser son profit ?

Exercice 107

On considère la fonction f définie et de classe C^∞ sur \mathbb{R}^2 par :

$$f(x, y) = x^2 + 2y^2 + xy + x$$

Montrer que f admet un minimum global sur \mathbb{R}^2 en un point que l'on déterminera.

Exercice 108

Deux amis mathématiciens décident d'escalader le Mont Keynésien. Une fois leur objectif atteint, l'un des deux amis remarque que ce mont a la forme de la surface

$$z(x, y) = -2x^2 - y^2 + 2xy - 8x + 6y + 4$$

Si le niveau de la mer correspond à $z = 0$, quelle est la hauteur maximale de ce mont ?

Remarque

On pourra multiplier le résultat obtenu par 100 pour avoir une idée de la hauteur maximale "réelle" en mètres de ce mont.

Exercice 109

On considère la fonction f définie et de classe C^∞ sur \mathbb{R}^3 par :

$$f(x, y, z) = z(e^x - 1) - y^2$$

1. Trouver les extrema locaux éventuels de f .
2. Déterminer la matrice hessienne de f .
3. Vérifier que le point de coordonnées $(0, 0, 0)$ est un point critique de f .
Déterminer la matrice hessienne de f au point $(0, 0, 0)$.
4. En utilisant la méthode des mineurs principaux, en déduire la nature du point critique $(0, 0, 0)$.
5. Retrouver la nature du point critique $(0, 0, 0)$ en étudiant le signe des valeurs propres de $H_f(0, 0, 0)$.

Exercice 110

On considère la fonction f définie et de classe C^∞ sur \mathbb{R}^3 par :

$$f(x, y, z) = y(e^z - 1) - x^2$$

1. Trouver les extrema locaux éventuels de f .
2. Déterminer la matrice hessienne de f .
3. Déterminer la matrice hessienne de f au point $(0, 0, 0)$.
4. En utilisant la méthode des mineurs diagonaux principaux, en déduire la nature du point critique $(0, 0, 0)$.
5. Retrouver la nature du point critique $(0, 0, 0)$ en déterminant les valeurs propres de la matrice hessienne de f au point $(0, 0, 0)$.

Exercice 111

On considère la fonction f définie et de classe C^∞ sur \mathbb{R}^3 par :

$$f(x, y, z) = -x^3 + \frac{2}{3}y^3 - \frac{3}{2}z^2 + 3xz - 2y - 3$$

1. Trouver les extrema locaux éventuels de f .
2. Déterminer la matrice hessienne de f .
3. En utilisant la méthode des mineurs principaux, en déduire la nature des points critiques de coordonnées $(0, -1, 0)$ et $(0, 1, 0)$.
4. En étudiant le signe des valeurs propres de la matrice hessienne de f aux points $(1, -1, 1)$ et $(1, 1, 1)$, déterminer la nature de ces points critiques.