

Diagonalisation

Hervé Hocquard

Université de Bordeaux, France

10 septembre 2019

université
de **BORDEAUX**

LABORATOIRE
BORDELAIS
DE RECHERCHE
EN INFORMATIQUE

LaBRI

Notations

Dans tout le chapitre, E désigne un espace vectoriel sur \mathbb{K} ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}) de dimension finie n . $\mathcal{L}(E)$ est l'espace vectoriel des endomorphismes de E et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans \mathbb{K} .

Définition

◆ Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et A sa matrice dans une base de E . Un scalaire λ est appelé **une valeur propre de f** (ou de A) s'il existe un vecteur **V de E^*** tel que $f(V) = \lambda V$.

Définition

◆ Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et A sa matrice dans une base de E . Un scalaire λ est appelé **une valeur propre de f** (ou de A) s'il existe un vecteur V de E^* tel que $f(V) = \lambda V$.

◆ Si λ est une valeur propre de f , tout vecteur V de E tel que $f(V) = \lambda V$ s'appelle **un vecteur propre relatif à la valeur propre λ** .

Définition

- ◆ Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et A sa matrice dans une base de E . Un scalaire λ est appelé **une valeur propre de f** (ou de A) s'il existe un vecteur V de E^* tel que $f(V) = \lambda V$.
- ◆ Si λ est une valeur propre de f , tout vecteur V de E tel que $f(V) = \lambda V$ s'appelle **un vecteur propre relatif à la valeur propre λ** . L'ensemble de tous les vecteurs propres relatifs à la valeur propre λ est un sev, que l'on appelle **le sous espace propre relatif à la valeur propre λ** et que l'on note $E(\lambda)$.

Définition

◆ Un endomorphisme f de E est dit **diagonalisable** s'il existe une base de E dans laquelle **la matrice de f est diagonale**.

Définition

◆ Un endomorphisme f de E est dit **diagonalisable** s'il existe une base de E dans laquelle **la matrice de f est diagonale**. C'est équivalent à dire qu'il existe une base de E formée de **vecteurs propres**.

Définition

◆ Un endomorphisme f de E est dit **diagonalisable** s'il existe une base de E dans laquelle **la matrice de f est diagonale**. C'est équivalent à dire qu'il existe une base de E formée de **vecteurs propres**. Les éléments **diagonaux de la matrice** de f dans cette base sont alors **des valeurs propres de f** .

Définition

- ◆ Un endomorphisme f de E est dit **diagonalisable** s'il existe une base de E dans laquelle **la matrice de f est diagonale**. C'est équivalent à dire qu'il existe une base de E formée de **vecteurs propres**. Les éléments **diagonaux de la matrice** de f dans cette base sont alors **des valeurs propres de f** .
- ◆ Une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite diagonalisable si elle est **semblable à une matrice diagonale**. C'est équivalent à dire que A est la matrice dans une base d'un endomorphisme diagonalisable.

Proposition

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Un scalaire λ est valeur propre de f ssi $(f - \lambda Id_E)$ est non injective et alors $E(\lambda) = \ker(f - \lambda Id_E)$.

Définition

Soit f un endomorphisme de E , de matrice A dans une base \mathcal{B} . Alors le polynôme

$$P_f(X) = P_A(X) = \det(A - XI)$$

ne dépend pas de la base choisie. On l'appelle le polynôme caractéristique de f (ou de A). Il s'écrit :

$$P_f(X) = (-1)^n X^n + (-1)^{n-1} \operatorname{Tr}(A) X^{n-1} + \dots + \det(A)$$

Polynôme caractéristique

Preuve

Si \mathcal{B}' est une autre base et P la matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}' , on sait que f a pour matrice $A' = P^{-1}AP$ dans la base \mathcal{B}' .
Mais alors :

$$\begin{aligned}\det(A' - XI) &= \det(P^{-1}AP - XP^{-1}P) = \det\left[P^{-1}(A - XI)P\right] \\ &= (\det P^{-1}) \det(A - XI) (\det P) \\ &= \det(A - XI) = P_A(X)\end{aligned}$$

Le polynôme est donc indépendant de la base choisie.

Polynôme caractéristique

Preuve

$$\text{Calculons } \det(A - XI) = \begin{vmatrix} a_{11} - X & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} - X \end{vmatrix}.$$

Si on développe par rapport à une colonne, on voit apparaître le terme $(a_{11} - X) \dots (a_{nn} - X)$, tous les autres termes ne comportant qu'au plus $(n - 2)$ facteurs $(a_{ij} - X)$.

Polynôme caractéristique

Preuve

Les seuls termes en X^n et X^{n-1} viennent donc du développement de $(a_{11} - X)\dots(a_{nn} - X)$, ce qui donne $(-1)^n X^n + (-1)^{n-1} (\sum_{i=1}^n a_{ii}) X^{n-1}$ (Au passage, comme ce polynôme ne dépend pas de la base, ce résultat montre que la trace de deux matrices semblables est la même, donc que la trace ne dépend que de l'endomorphisme).

Comme il est clair que $P(0) = \det A$, le terme constant du polynôme caractéristique est bien $\det(A)$.

Proposition

On dit que λ est une valeur propre de f (ou de A) ssi λ est racine du polynôme caractéristique.

Polynôme caractéristique

Proposition

On dit que λ est une valeur propre de f (ou de A) ssi λ est racine du polynôme caractéristique.

Remarque

Un endomorphisme d'un \mathbb{R} -ev peut ne pas admettre de valeur propre. Par exemple f de matrice : $\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$, avec $\alpha \neq k\pi$, n'admet pas de valeur propre, son polynôme caractéristique vaut en effet : $X^2 - 2X \cos \alpha + 1$.

Définition

Soit f un endomorphisme de E , A sa matrice dans une base quelconque de E , λ une valeur propre de f (ou de A) et $P(X)$ le polynôme caractéristique de f (ou de A). On appelle ordre de multiplicité de λ son ordre de multiplicité comme racine de $P(X)$, c'est à dire que son ordre de multiplicité est l'unique entier naturel non nul m tel que : $P(X) = (X - \lambda)^m Q(X)$ avec $Q(\lambda) \neq 0$.

Lemme

Soit λ une valeur propre de f d'ordre de multiplicité m et $E(\lambda)$ le sous espace propre associé. Alors :

$$1 \leq \dim E(\lambda) \leq m$$

Lemme

Soit λ une valeur propre de f d'ordre de multiplicité m et $E(\lambda)$ le sous espace propre associé. Alors :

$$1 \leq \dim E(\lambda) \leq m$$

Lemme

Soit $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ des valeurs propres de f , deux à deux distinctes et $E(\lambda_i)$ les sous espaces propres correspondants. Alors la somme $E(\lambda_1) + E(\lambda_2) + \dots + E(\lambda_s)$ est directe.

Théorème

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) f est diagonalisable.

(ii) $P_f(X)$ admet toutes ses racines dans \mathbb{K} et pour chaque valeur propre λ_i , d'ordre de multiplicité m_i , on a : $m_i = \dim E(\lambda_i)$.

(iii) Si $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ sont les différentes valeurs propres de f , alors $E = E(\lambda_1) \oplus \dots \oplus E(\lambda_r)$.

Théorème

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) f est diagonalisable.

(ii) $P_f(X)$ admet toutes ses racines dans \mathbb{K} et pour chaque valeur propre λ_i , d'ordre de multiplicité m_i , on a : $m_i = \dim E(\lambda_i)$.

(iii) Si $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ sont les différentes valeurs propres de f , alors $E = E(\lambda_1) \oplus \dots \oplus E(\lambda_r)$.

Corollaire

Si le polynôme caractéristique de f a toutes ses racines simples, alors f est diagonalisable.

Exercice

Pour chacune des matrices suivantes, dire si elle est diagonalisable dans \mathbb{R} , et dans l'affirmative, diagonalisez-la.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice

Pour chacune des matrices suivantes, dire si elle est diagonalisable dans \mathbb{R} , et dans l'affirmative, diagonalisez-la.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice

Montrer que la matrice suivante n'est pas diagonalisable.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Exercice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Exercice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$P_A(X) = \det \begin{pmatrix} 2-X & -2 \\ 2 & -3-X \end{pmatrix} = (2-X)(-3-X) + 4$$

Exercice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$P_A(X) = \det \begin{pmatrix} 2-X & -2 \\ 2 & -3-X \end{pmatrix} = (2-X)(-3-X) + 4$$

$$P_A(X) = (X-1)(X+2)$$

Exercice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$P_A(X) = \det \begin{pmatrix} 2-X & -2 \\ 2 & -3-X \end{pmatrix} = (2-X)(-3-X) + 4$$

$$P_A(X) = (X-1)(X+2)$$

A admet deux valeurs propres réelles distinctes -2 et 1 donc A est diagonalisable dans \mathbb{R} .

Exercice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Exercice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$(x, y) \in E(-2) \iff \begin{cases} 4x - 2y = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases} \iff y = 2x$$

Exercice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$(x, y) \in E(-2) \iff \begin{cases} 4x - 2y = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases} \iff y = 2x$$

$$E(-2) = \text{Vect}\{(1, 2)\}$$

Exercice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$(x, y) \in E(-2) \iff \begin{cases} 4x - 2y = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases} \iff y = 2x$$

$$E(-2) = \text{Vect}\{(1, 2)\}$$

$$(x, y) \in E(1) \iff \begin{cases} x - 2y = 0 \\ 2x - 4y = 0 \end{cases} \iff x = 2y$$

Exercice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$(x, y) \in E(-2) \iff \begin{cases} 4x - 2y = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases} \iff y = 2x$$

$$E(-2) = \text{Vect}\{(1, 2)\}$$

$$(x, y) \in E(1) \iff \begin{cases} x - 2y = 0 \\ 2x - 4y = 0 \end{cases} \iff x = 2y$$

$$E(1) = \text{Vect}\{(2, 1)\}$$

Exercice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Exercice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$E(-2) = \text{Vect}\{(1, 2)\}$$

$$E(1) = \text{Vect}\{(2, 1)\}$$

Exercice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$E(-2) = \text{Vect}\{(1, 2)\}$$

$$E(1) = \text{Vect}\{(2, 1)\}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$E(-2) = \text{Vect}\{(1, 2)\}$$

$$E(1) = \text{Vect}\{(2, 1)\}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$E(-2) = \text{Vect}\{(1, 2)\}$$

$$E(1) = \text{Vect}\{(2, 1)\}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} \times A \times P = \dots = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_B(X) = \det \begin{pmatrix} 5-X & 2 \\ -4 & 1-X \end{pmatrix} = (5-X)(1-X) + 8$$

Exercice

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_B(X) = \det \begin{pmatrix} 5-X & 2 \\ -4 & 1-X \end{pmatrix} = (5-X)(1-X) + 8$$

$$P_B(X) = X^2 - 6X + 13$$

Exercice

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_B(X) = \det \begin{pmatrix} 5-X & 2 \\ -4 & 1-X \end{pmatrix} = (5-X)(1-X) + 8$$

$$P_B(X) = X^2 - 6X + 13$$

B n'admet pas de valeurs propres réelles donc B n'est pas diagonalisable dans \mathbb{R} .

Exercice

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$P_C(X) = \det \begin{pmatrix} 3-X & 2 & 1 \\ 0 & 6-X & 0 \\ 1 & 2 & 3-X \end{pmatrix} = (6-X)[(3-X)^2 - 1]$$

Exercice

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$P_C(X) = \det \begin{pmatrix} 3-X & 2 & 1 \\ 0 & 6-X & 0 \\ 1 & 2 & 3-X \end{pmatrix} = (6-X)[(3-X)^2 - 1]$$

$$P_C(X) = (2-X)(4-X)(6-X)$$

Exercice

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$P_C(X) = \det \begin{pmatrix} 3-X & 2 & 1 \\ 0 & 6-X & 0 \\ 1 & 2 & 3-X \end{pmatrix} = (6-X)[(3-X)^2 - 1]$$

$$P_C(X) = (2-X)(4-X)(6-X)$$

C admet trois valeurs propres réelles distinctes 2, 4 et 6 donc C est diagonalisable dans \mathbb{R} .

Exercice

$$(x, y, z) \in E(2) \iff \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 4y = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 0 \\ x = -z \end{cases}$$

Exercice

$$(x, y, z) \in E(2) \iff \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 4y = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 0 \\ x = -z \end{cases}$$

$$E(2) = \text{Vect}\{(1, 0, -1)\}$$

Exercice

$$(x, y, z) \in E(2) \iff \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 4y = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 0 \\ x = -z \end{cases}$$

$$E(2) = \text{Vect}\{(1, 0, -1)\}$$

$$(x, y, z) \in E(4) \iff \begin{cases} -x + 2y + z = 0 \\ 2y = 0 \\ x + 2y - z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 0 \\ x = z \end{cases}$$

Exercice

$$(x, y, z) \in E(2) \iff \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 4y = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 0 \\ x = -z \end{cases}$$

$$E(2) = \text{Vect}\{(1, 0, -1)\}$$

$$(x, y, z) \in E(4) \iff \begin{cases} -x + 2y + z = 0 \\ 2y = 0 \\ x + 2y - z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 0 \\ x = z \end{cases}$$

$$E(4) = \text{Vect}\{(1, 0, 1)\}$$

Exercice

$$E(2) = \text{Vect}\{(1, 0, -1)\}$$

$$E(4) = \text{Vect}\{(1, 0, 1)\}$$

$$(x, y, z) \in E(6) \iff \begin{cases} -3x + 2y + z = 0 \\ 0y = 0 \\ x + 2y - 3z = 0 \end{cases} \iff x = y = z$$

Exercice

$$E(2) = \text{Vect}\{(1, 0, -1)\}$$

$$E(4) = \text{Vect}\{(1, 0, 1)\}$$

$$(x, y, z) \in E(6) \iff \begin{cases} -3x + 2y + z = 0 \\ 0y = 0 \\ x + 2y - 3z = 0 \end{cases} \iff x = y = z$$

$$E(6) = \text{Vect}\{(1, 1, 1)\}$$

Exercice

$$E(2) = \text{Vect}\{(1, 0, -1)\} \quad , \quad E(4) = \text{Vect}\{(1, 0, 1)\}$$

$$E(6) = \text{Vect}\{(1, 1, 1)\}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice

$$E(2) = \text{Vect}\{(1, 0, -1)\} \quad , \quad E(4) = \text{Vect}\{(1, 0, 1)\}$$

$$E(6) = \text{Vect}\{(1, 1, 1)\}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1/2 & -1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice

$$E(2) = \text{Vect}\{(1, 0, -1)\} \quad , \quad E(4) = \text{Vect}\{(1, 0, 1)\}$$

$$E(6) = \text{Vect}\{(1, 1, 1)\}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1/2 & -1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} \times C \times P = \dots = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Exercice

Montrer que la matrice suivante n'est pas diagonalisable.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Exercice

Montrer que la matrice suivante n'est pas diagonalisable.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$P_A(X) = \det(A - XI_3) = (4 - X)^3$$

Supposons que A est diagonalisable.

Exercice

Montrer que la matrice suivante n'est pas diagonalisable.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$P_A(X) = \det(A - XI_3) = (4 - X)^3$$

Supposons que A est diagonalisable.

Il existe donc une matrice P telle que $P^{-1}AP = 4I_3$.

Exercice

Montrer que la matrice suivante n'est pas diagonalisable.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$P_A(X) = \det(A - X I_3) = (4 - X)^3$$

Supposons que A est diagonalisable.

Il existe donc une matrice P telle que $P^{-1}AP = 4I_3$.

D'où, $A = P \times 4I_3 \times P^{-1} = P \times P^{-1} \times 4I_3 = 4I_3$.

Exercice

Montrer que la matrice suivante n'est pas diagonalisable.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$P_A(X) = \det(A - XI_3) = (4 - X)^3$$

Supposons que A est diagonalisable.

Il existe donc une matrice P telle que $P^{-1}AP = 4I_3$.

D'où, $A = P \times 4I_3 \times P^{-1} = P \times P^{-1} \times 4I_3 = 4I_3$.

ABSURDE !!!

Théorème

Soit u un endomorphisme d'un \mathbb{K} -ev E de dimension n ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}), de matrice A dans une base de E . On appelle $P(X)$ son polynôme caractéristique et on suppose que P a toutes ses racines dans \mathbb{K} (toujours vrai si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). On écrit

$$P(X) = (\lambda_1 - X)^{\alpha_1} \dots (\lambda_r - X)^{\alpha_r}.$$

On pose $E(\lambda_j) = \ker(\lambda_j Id - u)$ (le sous-espace propre associé à la valeur propre λ_j) et $E_j = \ker(\lambda_j Id - u)^{\alpha_j}$ (on l'appelle le sous-espace caractéristique relatif à la valeur propre λ_j). On a alors :

Théorème

- $E(\lambda_i) \subset E_i$
- $\dim(E_i) = \alpha_i$
- $E = E_1 \oplus E_2 \oplus \dots \oplus E_r$
- $u(E_i) \subset E_i$

Théorème

Si on prend alors une base de E_1, E_2, \dots, E_r et si on les recolle, on obtient une base de E dans laquelle la matrice \hat{A} de u est de la forme :

$$\begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_r \end{pmatrix}$$

où J_i est une matrice carrée d'ordre α_i , triangulaire supérieure, avec λ_i sur la diagonale. Une telle forme s'appelle une forme réduite de A .

Théorème

Soit u un endomorphisme d'un \mathbb{K} -ev E de dimension n ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}), de matrice A dans une base de E . On appelle $P(X)$ son polynôme caractéristique et on suppose que P a toutes ses racines dans \mathbb{K} (toujours vrai si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). On écrit $P(X) = (\lambda_1 - X)^{\alpha_1} \dots (\lambda_r - X)^{\alpha_r}$. Il existe alors une base de E dans laquelle la matrice \hat{A} de u est de la forme :

Théorème

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \varepsilon_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \varepsilon_n \\ & & & \lambda_r \end{pmatrix} \text{ où } \varepsilon_j = 0 \text{ ou } 1.$$

Une telle matrice s'appelle une forme de Jordan et la base dans laquelle on l'a obtenue s'appelle une base de Jordan pour u .

Théorème de Cayley-Hamilton

Théorème

Soit u un endomorphisme d'un \mathbb{K} -ev E de dimension n ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}), de matrice A dans une base de E . On appelle $P(X)$ son polynôme caractéristique et on écrit :

$P(X) = (-1)^n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_0$. Alors on a :

$$(-1)^n u^n + a_{n-1} u^{n-1} + \dots + a_0 \text{Id} = 0 \quad \text{et}$$

$$(-1)^n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \dots + a_0 I = 0$$

Ce que l'on note : $P(u) = 0$ et $P(A) = 0$.

Utilisation du Théorème de C-H

Soit u un endomorphisme d'un \mathbb{K} -ev E de dimension n ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}), de matrice A dans une base de E et de polynôme caractéristique $P(X)$. Soit m un entier naturel. On calcule le reste de la division euclidienne de X^m par $P(X)$ i.e. :

$$X^m = P(X)Q(X) + R(X) \quad \text{où} \quad \deg R < \deg P = n$$

On peut alors écrire :

$$\begin{aligned} A^m &= P(A)Q(A) + R(A) \\ &= R(A) \text{ puisque } P(A) = 0 \end{aligned}$$

Proposition : Utilisation d'une forme réduite

Soit \hat{A} une matrice sous forme réduite. On note $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ l'ordre des blocs triangulaires qui composent \hat{A} . Alors $\hat{A} = D + N$ où :

- D est la matrice diagonale qui a les mêmes éléments diagonaux que \hat{A} .
- D et N commutent ($ND = DN$).
- N est nilpotente et plus précisément, $N^k = 0$ sitôt que $k \geq \text{Max} \{ \alpha_1, \dots, \alpha_r \} = s$.
- Pour $m \geq s - 1$, on a :

$$\hat{A}^m = D^m + \binom{m}{1} D^{m-1} N + \dots + \binom{m}{s-1} D^{m-s+1} N^{s-1}$$

Conséquence

Si u est un endomorphisme de E , de matrice A dans une base donnée, et si on peut mettre A sous forme réduite \hat{A} , on a, en notant P la matrice de passage :

$$A = P\hat{A}P^{-1} \quad \text{d'où} \quad A^m = P\hat{A}^mP^{-1}$$

ce qui donne simplement A^m .