

# Notions sur les équations différentielles

Hervé Hocquard

Université de Bordeaux, France

4 septembre 2019

université  
de **BORDEAUX**

LABORATOIRE  
BORDELAIS  
DE RECHERCHE  
EN INFORMATIQUE

**LaBRI**

# Équations différentielles linéaires d'ordre 1 à coefficients constants

On cherche à résoudre une équation différentielle de la forme :

$$(E) : x'(t) = ax(t) + b(t)$$

où  $t \mapsto x(t)$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur un intervalle  $I$ ,  $a$  une constante réelle et  $b$  une fonction continue sur  $I$ .

On écrira parfois une telle équation sous la forme :

$$y' = ay + b(t).$$

On lui associe l'équation homogène :

$$(EH) : x'(t) = ax(t)$$

## Proposition

Les solutions de  $(EH)$  sont les fonctions de la forme

$$t \mapsto x(t) = \lambda e^{at}$$

où  $\lambda$  est une constante réelle arbitraire.

## Proposition

On obtient toutes les solutions de  $(E)$  en ajoutant une solution particulière de  $(E)$  à la solution générale de  $(EH)$ .

## Proposition

On obtient toutes les solutions de  $(E)$  en ajoutant une solution particulière de  $(E)$  à la solution générale de  $(EH)$ .

## Méthode : recherche d'une solution particulière

- Si  $b(t) = b$  une constante, il existe une solution particulière de  $(E)$  de la forme :
  - constante si  $a \neq 0$
  - $bt$  si  $a = 0$

## Méthode : recherche d'une solution particulière

- Si  $b(t) = P(t)$  un polynôme, il existe une solution particulière de la forme :
  - $Q(t)$  où  $Q$  est un polynôme de même degré que  $P$  si  $a \neq 0$ .
  - $tQ(t)$  où  $Q$  est un polynôme de même degré que  $P$  si  $a = 0$ .
- Si  $b(t) = P(t)e^{\alpha t}$  où  $P$  est un polynôme, il existe une solution de la forme :
  - $Q(t)e^{\alpha t}$  où  $Q$  est un polynôme de même degré que  $P$  si  $\alpha \neq a$ .
  - $tQ(t)e^{\alpha t}$  où  $Q$  est un polynôme de même degré que  $P$  si  $\alpha = a$ .

# Résolution de l'équation complète

## Méthode : recherche d'une solution particulière

- Si  $b(t) = P(t)$  un polynôme, il existe une solution particulière de la forme :
  - $Q(t)$  où  $Q$  est un polynôme de même degré que  $P$  si  $a \neq 0$ .
  - $tQ(t)$  où  $Q$  est un polynôme de même degré que  $P$  si  $a = 0$ .
- Si  $b(t) = P(t)e^{\alpha t}$  où  $P$  est un polynôme, il existe une solution de la forme :
  - $Q(t)e^{\alpha t}$  où  $Q$  est un polynôme de même degré que  $P$  si  $\alpha \neq a$ .
  - $tQ(t)e^{\alpha t}$  où  $Q$  est un polynôme de même degré que  $P$  si  $\alpha = a$ .

## Remarque

Ce troisième cas englobe les deux premiers.

## Présentation

On cherche directement les solutions de  $(E)$  sous la forme  $x(t) = \lambda(t)e^{at}$  où  $\lambda(t)$  est une fonction  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$ . On montre facilement l'équivalence :

$$\begin{aligned}x(t) = \lambda(t)e^{at} \text{ solution de } (E) &\iff \lambda'(t) = b(t)e^{-at} \\ &\iff \lambda(t) = \int b(t)e^{-at} dt\end{aligned}$$

## Présentation

On cherche directement les solutions de  $(E)$  sous la forme  $x(t) = \lambda(t)e^{at}$  où  $\lambda(t)$  est une fonction  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$ . On montre facilement l'équivalence :

$$\begin{aligned}x(t) = \lambda(t)e^{at} \text{ solution de } (E) &\iff \lambda'(t) = b(t)e^{-at} \\ &\iff \lambda(t) = \int b(t)e^{-at} dt\end{aligned}$$

## Proposition

Soit  $t_0$  et  $x_0$  deux réels. Il existe alors une seule solution  $t \mapsto x(t)$  de  $(E)$  telle que  $x(t_0) = x_0$ .

# Équations différentielles d'ordre 2 à coefficients constants

Une telle équation s'écrit :

$$(E) : x''(t) + ax'(t) + bx(t) = f(t)$$

où  $a$  et  $b$  sont des constantes réelles et  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $I$ . On lui associe, comme dans le cas précédent, l'équation homogène

$$(EH) : x''(t) + ax'(t) + bx(t) = 0$$

# Résolution de l'équation homogène

On forme l'équation caractéristique du second degré :

$$(EC) : r^2 + ar + b = 0$$

# Résolution de l'équation homogène

On forme l'équation caractéristique du second degré :

$$(EC) : r^2 + ar + b = 0$$

## Proposition

◆ Si  $\Delta = a^2 - 4b > 0$ ,  $(EC)$  admet deux racines réelles distinctes  $r_1$  et  $r_2$ . Les solutions de  $(EH)$  sont alors les fonctions de la forme :

$$t \mapsto \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t} \quad \text{où } \lambda \text{ et } \mu \text{ sont des constantes réelles.}$$

◆ Si  $\Delta = a^2 - 4b = 0$ ,  $(EC)$  admet une racine réelle  $r_1$ . Les solutions de  $(EH)$  sont alors les fonctions de la forme :

$$t \mapsto (\lambda t + \mu) e^{r_1 t} \quad \text{où } \lambda \text{ et } \mu \text{ sont des constantes réelles.}$$

# Résolution de l'équation homogène

On forme l'équation caractéristique du second degré :

$$(EC) : r^2 + ar + b = 0$$

## Proposition

◆ Si  $\Delta = a^2 - 4b < 0$ , (EC) admet deux racines complexes conjuguées  $r_1$  et  $\bar{r}_1$ , avec par exemple  $r_1 = \alpha + i\omega$ ,  $\alpha$  et  $\omega$  réels. Les solutions de (EH) sont alors les fonctions de la forme :

$$t \mapsto e^{\alpha t}(\lambda \cos \omega t + \mu \sin \omega t)$$

où  $\lambda$  et  $\mu$  sont des constantes réelles.

(que l'on peut aussi écrire  $Ae^{\alpha t} \cos(\omega t + B)$ ,  $A$  et  $B$  réels.)

## Proposition

On obtient toutes les solutions de  $(E)$  en ajoutant une solution particulière de  $(E)$  à la solution générale de  $(EH)$ .

# Résolution de l'équation complète

## Proposition

On obtient toutes les solutions de  $(E)$  en ajoutant une solution particulière de  $(E)$  à la solution générale de  $(EH)$ .

## Méthode : recherche d'une solution particulière

Si  $f(t) = e^{rt}P(t)$  où  $P$  est un polynôme, il existe une solution particulière de  $(E)$  qui est de la forme :

- $e^{rt}Q(t)$  si  $r$  n'est pas solution de l'équation caractéristique.
- $e^{rt}tQ(t)$  si  $r$  est racine simple de  $(EC)$ .
- $e^{rt}t^2Q(t)$  si  $r$  est racine double de  $(EC)$ .

où, à chaque fois,  $Q$  est un polynôme de même degré que  $P$ .

## Remarque

- ◆ Ce résultat s'applique au cas où  $f(t) = k$  une constante ( $k = e^{0t}k$ ), au cas où  $f(t) = P(t)$  et aussi au cas où  $f(t) = e^{rt}$ .
- ◆ On peut aussi utiliser la méthode de variation des constantes.

## Remarque

- ◆ Ce résultat s'applique au cas où  $f(t) = k$  une constante ( $k = e^{0t}k$ ), au cas où  $f(t) = P(t)$  et aussi au cas où  $f(t) = e^{rt}$ .
- ◆ On peut aussi utiliser la méthode de variation des constantes.

## Proposition

Soit  $t_0$  un élément de  $I$ ,  $\alpha$  et  $\beta$  deux réels. Il existe alors une unique solution  $x(t)$  de  $(E)$  telle que  $x(t_0) = \alpha$  et  $x'(t_0) = \beta$ .

# Notion de stabilité

## Remarque

On s'intéresse au comportement asymptotique des solutions, c'est à dire à leur limite en  $+\infty$ .

## Remarque

On s'intéresse au comportement asymptotique des solutions, c'est à dire à leur limite en  $+\infty$ .

## Définition

On dit qu'une solution constante d'une équation différentielle  $(E)$  est un équilibre de l'évolution régie par  $(E)$ , et on dit que cet équilibre est globalement stable si toute solution de  $(E)$  tend vers cette constante quand  $t \rightarrow +\infty$ .

## Remarque

Si  $(E) : x''(t) + ax'(t) + bx(t) = f(t)$  est une équation d'ordre 1 ou 2 (1 si  $b = 0$ ), elle ne peut admettre de solution constante que si  $f(t)$  est constante. Dans toute la suite de ce paragraphe, on supposera donc que  $f(t) = c$  une constante.

## Remarque

Si  $(E) : x''(t) + ax'(t) + bx(t) = f(t)$  est une équation d'ordre 1 ou 2 (1 si  $b = 0$ ), elle ne peut admettre de solution constante que si  $f(t)$  est constante. Dans toute la suite de ce paragraphe, on supposera donc que  $f(t) = c$  une constante. Si un équilibre n'est pas globalement stable, on appelle ensemble de stabilité de cet équilibre l'ensemble des conditions initiales telles que les solutions associées convergent vers cet équilibre. C'est un sous ensemble de  $\mathbb{R}^n$  où  $n$  est l'ordre de l'équation différentielle.

# Equation différentielle d'ordre 1

Considérons une équation différentielle ( $E$ ) :  $x'(t) = ax(t) + b$  ( $a \neq 0$ ) où  $b$  est une constante réelle. On peut alors voir facilement que la solution de ( $E$ ) qui prend la valeur  $x_0$  en 0 est donnée par :

$$x(t) = \left( x_0 + \frac{b}{a} \right) e^{at} - \frac{b}{a}$$

et  $t \mapsto -\frac{b}{a}$  est une solution constante, donc un équilibre.

# Equation différentielle d'ordre 1

Considérons une équation différentielle ( $E$ ) :  $x'(t) = ax(t) + b$  ( $a \neq 0$ ) où  $b$  est une constante réelle. On peut alors voir facilement que la solution de ( $E$ ) qui prend la valeur  $x_0$  en 0 est donnée par :

$$x(t) = \left(x_0 + \frac{b}{a}\right) e^{at} - \frac{b}{a}$$

et  $t \mapsto -\frac{b}{a}$  est une solution constante, donc un équilibre.

## Proposition

L'équilibre  $-\frac{b}{a}$  est globalement stable ssi  $a < 0$ .

# Equation différentielle d'ordre 2

On considère une équation différentielle

(E) :  $x''(t) + ax'(t) + bx(t) = c$ , où  $a, b, c$  sont des constantes réelles, d'équation caractéristique :  $r^2 + ar + b = 0$ .

# Equation différentielle d'ordre 2

On considère une équation différentielle  
(E) :  $x''(t) + ax'(t) + bx(t) = c$ , où  $a, b, c$  sont des constantes réelles, d'équation caractéristique :  $r^2 + ar + b = 0$ .

## Proposition

Les deux racines (réelles ou complexes, distinctes ou confondues) de l'équation  $r^2 + ar + b = 0$  ont des parties réelles strictement négatives ssi  $a > 0$  et  $b > 0$ .

# Equation différentielle d'ordre 2

On considère une équation différentielle  
(E) :  $x''(t) + ax'(t) + bx(t) = c$ , où  $a, b, c$  sont des constantes réelles, d'équation caractéristique :  $r^2 + ar + b = 0$ .

## Proposition

Les deux racines (réelles ou complexes, distinctes ou confondues) de l'équation  $r^2 + ar + b = 0$  ont des parties réelles strictement négatives ssi  $a > 0$  et  $b > 0$ .

## Proposition

Soit (E) :  $x''(t) + ax'(t) + bx(t) = c$ , qui admet une solution constante  $\frac{c}{b}$  ( $b \neq 0$ ). L'équilibre est globalement stable ssi  $a > 0$  et  $b > 0$ .

# Équations différentielles d'ordre un à coefficients non constants

On veut résoudre :  $(E) : x'(t) = a(t)x(t) + b(t)$  où  $a(t)$  et  $b(t)$  sont des fonctions continues sur un intervalle  $I$ . On lui associe l'équation homogène :  $(EH) : x'(t) = a(t)x(t)$ .

On veut résoudre :  $(E) : x'(t) = a(t)x(t) + b(t)$  où  $a(t)$  et  $b(t)$  sont des fonctions continues sur un intervalle  $I$ . On lui associe l'équation homogène :  $(EH) : x'(t) = a(t)x(t)$ .

## Proposition (résolution de l'équation homogène)

Soit  $A(t)$  une primitive sur  $I$  de  $a(t)$ . La solution générale de  $(EH)$  est de la forme :

$$x(t) = \lambda e^{A(t)} = \lambda e^{\int a(t) dt} \quad \text{où } \lambda \text{ est une constante réelle}$$

## Résolution de l'équation complète

Deux méthodes encore :

- 1 on ajoute à la solution générale de  $(EH)$  une solution particulière de  $(E)$ .
- 2 on utilise la méthode de variation des constantes : on cherche la solution générale de  $(E)$  sous la forme  $x(t) = \lambda(t)e^{A(t)}$  et on montre facilement que :

$$x(t) = \lambda(t)e^{A(t)} \text{ solution de } (E) \iff \lambda(t) = \int b(t)e^{-A(t)} dt$$

D'où les solutions de  $(E)$  :

$$x(t) = e^{A(t)} \int b(t)e^{-A(t)} dt$$

# Équation de Bernouilli

On appelle ainsi une équation de la forme :

$$(EB) : x'(t) = a(t)x(t) + b(t)[x(t)]^\alpha$$

où  $\alpha$  est un réel. Si  $\alpha = 0$  ou  $1$ , l'équation est linéaire. Si  $\alpha$  n'est pas entier, on suppose  $x(t) > 0$  sur  $I$ .

# Équation de Bernouilli

On appelle ainsi une équation de la forme :

$$(EB) : x'(t) = a(t)x(t) + b(t)[x(t)]^\alpha$$

où  $\alpha$  est un réel. Si  $\alpha = 0$  ou  $1$ , l'équation est linéaire. Si  $\alpha$  n'est pas entier, on suppose  $x(t) > 0$  sur  $I$ .

Pour résoudre (EB), on pose  $y(t) = [x(t)]^{1-\alpha}$  (on suppose  $\alpha \neq 0$  et de  $1$ ). Il est facile de voir que :

$$x(t) \text{ solution de (EB)} \iff y(t) \text{ solution de } \frac{1}{1-\alpha}y'(t)$$
$$\text{et } \frac{1}{1-\alpha}y'(t) = a(t)y(t) + b(t)$$

Cette dernière équation est linéaire.