

**Aucun document autorisé - Téléphones portables, calculatrices et tout accessoire électronique interdits.**

 **EXERCICE 1**

On considère l'équation de récurrence  $u_{t+2} - 3u_{t+1} - 10u_t = 0$  avec  $u_0$  et  $u_1$  donnés.

1. Résoudre cette équation en déterminant  $u_t$  en fonction de  $u_0$  et  $u_1$  à partir de l'équation caractéristique.
2. On s'intéresse à présent à un autre type de résolution. On définit le vecteur  $X_t = \begin{pmatrix} u_{t+1} \\ u_t \end{pmatrix}$ .
  - (a) Déterminer une matrice  $A$  telle que  $X_{t+1} = A \times X_t$ .
  - (b) Comparer le polynôme caractéristique de  $A$  et l'équation caractéristique résolue en 1..
  - (c) Montrer que  $A$  est diagonalisable et en déduire  $A^t$  pour  $t$  entier naturel.
  - (d) En déduire  $X_t$  en fonction de  $X_0$  puis donner l'expression de  $u_t$  en fonction de  $u_0$  et  $u_1$ .

 **EXERCICE 2**

Soit l'équation différentielle dépendant du paramètre réel  $m$

$$(E) \quad y'' + 4y' + my = 2$$

1. Soit  $(H)$  l'équation homogène associée et  $w(t)$  la solution générale de  $(H)$  :
  - (a) donner la forme de  $w(t)$  suivant les valeurs de  $m$  ;
  - (b) en déduire une condition nécessaire et suffisante sur  $m$  pour que toutes les fonctions vérifiant  $(H)$  tendent vers 0 lorsque  $t \rightarrow +\infty$ .
2. On suppose que  $m \neq 0$  :
  - (a) déterminer la valeur d'équilibre de  $(E)$  ;
  - (b) préciser la nature de l'équilibre obtenu.

 **EXERCICE 3**

On considère le modèle de marché, avec prévisions sur l'évolution des prix, défini par le système suivant :

$$\begin{cases} Q_d(t) = \alpha - \beta P(t) + mP'(t) + nP''(t) \\ Q_s(t) = -\gamma + \delta P(t) \quad \text{avec } \alpha, \beta, \delta, \gamma > 0, n \neq 0 \\ Q_d(t) = Q_s(t) \end{cases}$$

1. Montrer que la fonction des prix  $P$  est solution de l'équation différentielle :

$$P'' + \frac{m}{n}P' - \frac{\beta + \delta}{n}P = -\frac{\alpha + \gamma}{n}$$

2. Montrer que cette équation admet une solution constante  $P_e$ .
3. Écrire la solution générale de cette équation en fonction du discriminant de l'équation caractéristique.
4. Déterminer le comportement asymptotique de  $P$ .