

Fonctions homogènes, concaves et convexes

Hervé Hocquard

Université de Bordeaux, France

4 septembre 2016

Fonctions homogènes

Définition

Soit $f : (\mathbb{R}_+^*)^n \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $r \in \mathbb{R}$.

On dit que f est homogène de degré r si :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, f(tX) = t^r f(X), \text{ pour tout } X \in (\mathbb{R}_+^*)^n$$

Fonctions homogènes

Définition

Soit $f : (\mathbb{R}_+^*)^n \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $r \in \mathbb{R}$.

On dit que f est homogène de degré r si :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, f(tX) = t^r f(X), \text{ pour tout } X \in (\mathbb{R}_+^*)^n$$

Exemple

$f(x, y, z) = kx^\alpha y^\beta z^\gamma$ (Cobb-Douglas à 3 variables)

$f(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz$ (quadratique)

Fonctions homogènes

Définition

Soit $f : (\mathbb{R}_+^*)^n \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $r \in \mathbb{R}$.

On dit que f est homogène de degré r si :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, f(tX) = t^r f(X), \text{ pour tout } X \in (\mathbb{R}_+^*)^n$$

Exemple

$f(x, y, z) = kx^\alpha y^\beta z^\gamma$ (Cobb-Douglas à 3 variables)

$f(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz$ (quadratique)



Attention

$$f(x, y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$$

f n'est pas homogène.

Définition

Si f est une fonction de production de n variables : $f(x_1, \dots, x_n)$
 n inputs pour 1 output

Définition

Si f est une fonction de production de n variables : $f(x_1, \dots, x_n)$
 n inputs pour 1 output

- 1 Si f est homogène de degré 1 alors

$$f(tx_1, \dots, tx_n) = tf(x_1, \dots, x_n).$$

Si on double tous les inputs alors la production double.

On dit qu'une telle fonction est à rendements d'échelle constants.

Définition

Si f est une fonction de production de n variables : $f(x_1, \dots, x_n)$
 n inputs pour 1 output

- 1 Si f est homogène de degré 1 alors

$$f(tx_1, \dots, tx_n) = tf(x_1, \dots, x_n).$$

Si on double tous les inputs alors la production double.

On dit qu'une telle fonction est à rendements d'échelle constants.

- 2 Si f est homogène de degré r avec $0 < r < 1$ alors f est dite à rendements d'échelle décroissants.

Définition

Si f est une fonction de production de n variables : $f(x_1, \dots, x_n)$
 n inputs pour 1 output

- 1 Si f est homogène de degré 1 alors
 $f(tx_1, \dots, tx_n) = tf(x_1, \dots, x_n)$.
Si on double tous les inputs alors la production double.
On dit qu'une telle fonction est à rendements d'échelle constants.
- 2 Si f est homogène de degré r avec $0 < r < 1$ alors f est dite à rendements d'échelle décroissants.
- 3 Si f est homogène de degré r avec $r > 1$ alors f est dite à rendements d'échelle croissants.

Propriété

Une fonction de Cobb-Douglas $f(x_1, \dots, x_n) = kx_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$ est homogène de degré $\alpha_1 + \dots + \alpha_n$.

Propriété

Une fonction de Cobb-Douglas $f(x_1, \dots, x_n) = kx_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$ est homogène de degré $\alpha_1 + \dots + \alpha_n$.

Théorème

Si f est de classe C^1 et si f est homogène de degré r , alors ses dérivées partielles sont homogènes de degré $r - 1$.

Propriété

Une fonction de Cobb-Douglas $f(x_1, \dots, x_n) = kx_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$ est homogène de degré $\alpha_1 + \dots + \alpha_n$.

Théorème

Si f est de classe C^1 et si f est homogène de degré r , alors ses dérivées partielles sont homogènes de degré $r - 1$.

Exercice

Preuves de la propriété et du théorème...

Théorème d'Euler

Soit f une fonction de classe C^1 sur $(\mathbb{R}_+^*)^n$ et homogène de degré r .

Alors, pour tout $X \in (\mathbb{R}_+^*)^n$:

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(X) + \cdots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(X) = r \times f(X) = X \cdot \nabla f(X)$$

Ce qui s'écrit :

$$\sum_{i=1}^n \varepsilon_{f/x_i}(X) = r.$$

Théorème d'Euler

Soit f une fonction de classe C^1 sur $(\mathbb{R}_+^*)^n$ et homogène de degré r .

Alors, pour tout $X \in (\mathbb{R}_+^*)^n$:

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(X) + \cdots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(X) = r \times f(X) = X \cdot \nabla f(X)$$

Ce qui s'écrit :

$$\sum_{i=1}^n \varepsilon_{f/x_i}(X) = r.$$

Exercice

Preuve du théorème...

Exercice

Soit f la fonction de production définie sur $D' = (\mathbb{R}_+^*)^2$ par

$$f(x, y) = x^{1/3} \sqrt{y}$$

- 1 Montrer que f est homogène et déterminer son degré d'homogénéité.
- 2 Si on double les quantités x et y , comment varie la production de f ?
- 3 Montrer que f vérifie l'égalité d'Euler.

Réciproque du Théorème d'Euler

Si f est une fonction de classe C^1 sur $(\mathbb{R}_+^*)^n$ et si

$$\sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(X) = r \times f(X)$$

pour tout $X \in (\mathbb{R}_+^*)^n$. Alors, f est homogène de degré r .

Définition

La fonction f est dite convexe si

$$\forall (x, y) \in I^2, \forall \lambda \in [0, 1], f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

Elle est dite concave si $-f$ est convexe.

Fonctions d'une variable : Rappels

Définition

La fonction f est dite convexe si

$$\forall (x, y) \in I^2, \forall \lambda \in [0, 1], f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

Elle est dite concave si $-f$ est convexe.

Définition bis

On dit que f est convexe (resp. concave) sur un intervalle I si pour tous points A et B de la courbe représentant f , l'arc de courbe est situé au-dessous (au-dessus) du segment $[AB]$.

Fonctions d'une variable : Rappels

Définition

La fonction f est dite convexe si

$$\forall (x, y) \in I^2, \forall \lambda \in [0, 1], f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

Elle est dite concave si $-f$ est convexe.

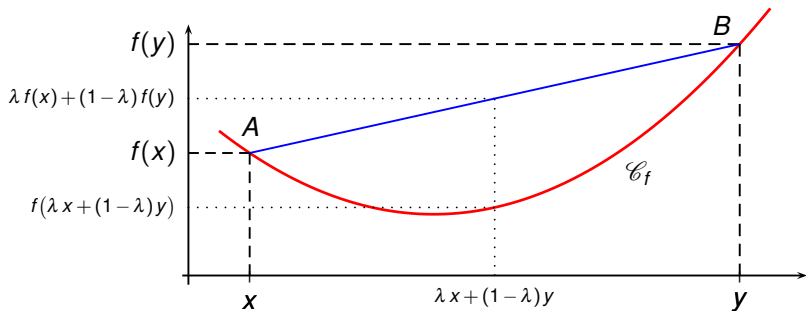
Définition bis

On dit que f est convexe (resp. concave) sur un intervalle I si pour tous points A et B de la courbe représentant f , l'arc de courbe est situé au-dessous (au-dessus) du segment $[AB]$.

Exemples

Les fonctions $x \mapsto x^2$, $x \mapsto |x|$ sont convexes.

Fonctions d'une variable : Rappels



Théorème

Soit f une fonction de classe C^1 sur un intervalle I .

Alors f est convexe (resp. concave) sur I si et seulement si :

$$f(y) - f(x) \geq f'(x)(y - x), \quad \forall (x, y) \in I^2$$

$$\left(\text{resp. } f(y) - f(x) \leq f'(x)(y - x), \quad \forall (x, y) \in I^2 \right)$$

Théorème

Soit f une fonction de classe C^2 sur un intervalle I . Alors :

- f est convexe sur $I \iff f''(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$
- f est concave sur $I \iff f''(x) \leq 0$ pour tout $x \in I$

Théorème

Soit f une fonction de classe C^2 sur un intervalle I . Alors :

- f est convexe sur $I \iff f''(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$
- f est concave sur $I \iff f''(x) \leq 0$ pour tout $x \in I$

Inégalités de convexité

Si f est dérivable et convexe sur I alors sa courbe représentative est au-dessus de chacune de ses tangentes :

$$\forall a, x \in I, f(x) \geq f'(a)(x - a) + f(a)$$

Pour les fonctions concaves l'inégalité est inversée.

Fonctions d'une variable : Rappels

L'intérêt des fonctions convexes ou concaves dans les problèmes d'optimisation s'explique par le résultat suivant :

L'intérêt des fonctions convexes ou concaves dans les problèmes d'optimisation s'explique par le résultat suivant :

Théorème

Soit f une fonction concave (resp. convexe) sur intervalle ouvert I . Si x_0 est un point critique pour f , alors f présente en x_0 un maximum (resp. minimum) global sur I .

Définition

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ définie sur un ensemble convexe U .

On dit que f est concave (resp. convexe) sur U si :

$$\forall \lambda \in [0, 1], \forall X, Y \in U$$

$$f(\lambda X + (1 - \lambda)Y) \geq \lambda f(X) + (1 - \lambda)f(Y)$$

$$\text{(resp. } f(\lambda X + (1 - \lambda)Y) \leq \lambda f(X) + (1 - \lambda)f(Y)\text{)}$$

Théorème

Soit f de classe C^1 définie sur un convexe U .

Alors f est concave (resp. convexe) sur U si et seulement :

$$\forall X, Y \in U$$

$$f(Y) - f(X) \leq \nabla f(X) \cdot (Y - X)$$

ou encore $f(y_1, \dots, y_n) - f(x_1, \dots, x_n) \leq \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(y_i - x_i)$

$\left(\text{resp. } f(y_1, \dots, y_n) - f(x_1, \dots, x_n) \geq \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(y_i - x_i) \right)$

Définition : Rappels

Une forme quadratique définie sur \mathbb{R}^n est une fonction à valeurs réelles qui peut s'écrire sous la forme :

$$q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n a_{ii}x_i^2 + 2 \sum_{i < j} a_{ij}x_i x_j$$

où $A = (a_{ij})$ est l'unique matrice symétrique correspondant à l'expression de q .

Réciproquement, à toute matrice symétrique A , peut être associée une fonction à valeurs réelles $q(x_1, \dots, x_n) = X A^t X$ avec $X = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)$, identique à celle définie précédemment. Cette fonction est une forme quadratique.

Exercice

Déterminer les formes quadratiques associées aux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

Définition

Soit A une matrice symétrique d'ordre n .
Alors A est dite :

Définition

Soit A une matrice symétrique d'ordre n .

Alors A est dite :

- 1 définie positive (resp. semi-définie positive) si
 $q(x_1, \dots, x_n) = X A^t X > 0$ pour tout $X \in \mathbb{R}^n$ et $X \neq O_{\mathbb{R}^n}$
(resp. $q(x_1, \dots, x_n) = X A^t X \geq 0$)

Définition

Soit A une matrice symétrique d'ordre n .

Alors A est dite :

- 1 définie positive (resp. semi-définie positive) si
 $q(x_1, \dots, x_n) = X A^t X > 0$ pour tout $X \in \mathbb{R}^n$ et $X \neq O_{\mathbb{R}^n}$
(resp. $q(x_1, \dots, x_n) = X A^t X \geq 0$)
- 2 définie négative (resp. semi-définie négative) si
 $q(x_1, \dots, x_n) = X A^t X < 0$ pour tout $X \in \mathbb{R}^n$ et $X \neq O_{\mathbb{R}^n}$
(resp. $q(x_1, \dots, x_n) = X A^t X \leq 0$)

Définition

Soit A une matrice symétrique d'ordre n .

Alors A est dite :

- 1 définie positive (resp. semi-définie positive) si
 $q(x_1, \dots, x_n) = X A^t X > 0$ pour tout $X \in \mathbb{R}^n$ et $X \neq O_{\mathbb{R}^n}$
(resp. $q(x_1, \dots, x_n) = X A^t X \geq 0$)
- 2 définie négative (resp. semi-définie négative) si
 $q(x_1, \dots, x_n) = X A^t X < 0$ pour tout $X \in \mathbb{R}^n$ et $X \neq O_{\mathbb{R}^n}$
(resp. $q(x_1, \dots, x_n) = X A^t X \leq 0$)
- 3 indéfinie s'il existe des vecteurs X de \mathbb{R}^n tel que $X A^t X > 0$
et d'autres tel que $X A^t X < 0$.

Théorème

Toute matrice symétrique à coefficients réels est diagonalisable.

Toute matrice hessienne à coefficients réels est diagonalisable.

Théorème

Soit f de classe C^2 sur un sous-ensemble ouvert U de \mathbb{R}^n .
Alors, f est une fonction concave sur U si et seulement si la matrice hessienne de f est semi-définie négative pour tout X de U .

La fonction f est convexe sur U si et seulement si la matrice hessienne de f est semi-définie positive pour tout X de U .

Théorème

Soit f de classe C^2 sur un sous-ensemble ouvert U de \mathbb{R}^n .
Alors, f est une fonction concave sur U si et seulement si la matrice hessienne de f a toutes ses valeurs propres négatives ou nulles.
La fonction f est convexe sur U si et seulement si la matrice hessienne de f a toutes ses valeurs propres positives ou nulles.



Remarque

Dans \mathbb{R}^2 , on utilisera une propriété pratique...car décomposer des formes quadratiques en somme de carrés...ce n'est pas gagné 😊.

Théorème

Soit f de classe C^2 sur un sous-ensemble ouvert U de \mathbb{R}^2 .
Alors :

Théorème

Soit f de classe C^2 sur un sous-ensemble ouvert U de \mathbb{R}^2 .

Alors :

- 1 f est concave sur U si et seulement si $\forall (x, y) \in U$,
 $tr(H_f(x, y)) < 0$ et $det(H_f(x, y)) \geq 0$.

Théorème

Soit f de classe C^2 sur un sous-ensemble ouvert U de \mathbb{R}^2 .

Alors :

- 1 f est concave sur U si et seulement si $\forall (x, y) \in U$,
 $tr(H_f(x, y)) < 0$ et $det(H_f(x, y)) \geq 0$.
- 2 f est convexe sur U si et seulement si $\forall (x, y) \in U$,
 $tr(H_f(x, y)) > 0$ et $det(H_f(x, y)) \geq 0$.

Théorème

Soit f de classe C^2 sur un sous-ensemble ouvert U de \mathbb{R}^2 .

Alors :

- 1 f est concave sur U si et seulement si $\forall (x, y) \in U$,
 $tr(H_f(x, y)) < 0$ et $det(H_f(x, y)) \geq 0$.
- 2 f est convexe sur U si et seulement si $\forall (x, y) \in U$,
 $tr(H_f(x, y)) > 0$ et $det(H_f(x, y)) \geq 0$.
- 3 sinon, on ne peut rien dire...

Exercice

Les fonctions f et g suivantes sont-elles convexes ou concaves sur \mathbb{R}^2 ?

$$f(x, y) = x^4 + x^2y^2 + y^4 - 3x - 8y \quad , \quad g(x, y) = xy$$

Exercice

On considère une fonction de Cobb-Douglas de deux variables définie par

$$f(x, y) = x^\alpha y^\beta \quad \text{pour } x > 0 \text{ et } y > 0$$

Montrer que f est strictement concave sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ si et

seulement si :
$$\begin{cases} \alpha > 0 \\ \beta > 0 \\ \alpha + \beta < 1 \end{cases} .$$

Remarque

Une fonction de production de Cobb-Douglas définie sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ est concave si et seulement si ses rendements d'échelle sont constants ou décroissants.

Exercice

Soit f la fonction de production définie sur $D' = (\mathbb{R}_+^*)^2$ par

$$f(x, y) = x^{1/3} \sqrt{y}$$

- 1 Calculer la hessienne de f au point $(a, b) \in D'$.
- 2 Montrer que la fonction f est concave sur D' .

Complément

Etude du signe d'une forme quadratique

Proposition

On peut décomposer une forme quadratique sur \mathbb{R}^n comme combinaison linéaire de carrés de formes linéaires indépendantes. Cette décomposition n'est pas unique, mais les nombres de coefficients strictement positifs et strictement négatifs de ces CL est fixe. Le couple (m, p) de ces deux nombres s'appelle la signature de la forme quadratique.

Etude du signe d'une forme quadratique

Proposition

On peut décomposer une forme quadratique sur \mathbb{R}^n comme combinaison linéaire de carrés de formes linéaires indépendantes. Cette décomposition n'est pas unique, mais les nombres de coefficients strictement positifs et strictement négatifs de ces CL est fixe. Le couple (m, p) de ces deux nombres s'appelle la signature de la forme quadratique.

Définition

Soit A une matrice carrée d'ordre n . On appelle mineur principal d'ordre k ($k = 1, 2, \dots, n$) le déterminant de la matrice obtenue en éliminant de A les mêmes $n - k$ colonnes et $n - k$ lignes. On appelle mineur diagonal principal d'ordre k ($k = 1, 2, \dots, n$) le déterminant de la matrice obtenue en éliminant de A les $n - k$ dernières colonnes et les $n - k$ dernières lignes.

Exercice

Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{(3,3)}(\mathbb{R})$.

Déterminer les mineurs principaux de A .

Exercice

Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{(3,3)}(\mathbb{R})$.

Déterminer les mineurs principaux de A .

Trois mineurs principaux d'ordre un :

$$M_{11} = | a_{11} | = a_{11} , \quad M_{12} = | a_{22} | = a_{22} , \quad M_{13} = | a_{33} | = a_{33}$$

Exercice

Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{(3,3)}(\mathbb{R})$.

Déterminer les mineurs principaux de A .

Trois mineurs principaux d'ordre un :

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{11} \end{vmatrix} = a_{11} \quad , \quad M_{12} = \begin{vmatrix} a_{22} \end{vmatrix} = a_{22} \quad , \quad M_{13} = \begin{vmatrix} a_{33} \end{vmatrix} = a_{33}$$

Trois mineurs principaux d'ordre deux :

$$M_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad , \quad M_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \quad , \quad M_{23} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Etude du signe d'une forme quadratique

Exercice

Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{(3,3)}(\mathbb{R})$.

Déterminer les mineurs principaux de A .

Trois mineurs principaux d'ordre un :

$$M_{11} = | a_{11} | = a_{11} , \quad M_{12} = | a_{22} | = a_{22} , \quad M_{13} = | a_{33} | = a_{33}$$

Trois mineurs principaux d'ordre deux :

$$M_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} , \quad M_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} , \quad M_{23} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Un mineur principal d'ordre trois : $M_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

Exercice

Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{(3,3)}(\mathbb{R})$.

Déterminer les mineurs diagonaux principaux de A .

Exercice

Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{(3,3)}(\mathbb{R})$.

Déterminer les mineurs diagonaux principaux de A .

$$M_1 = \begin{vmatrix} a_{11} \end{vmatrix} = a_{11}$$

Exercice

Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{(3,3)}(\mathbb{R})$.

Déterminer les mineurs diagonaux principaux de A .

$$M_1 = \begin{vmatrix} a_{11} \end{vmatrix} = a_{11}$$

$$M_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Exercice

Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{(3,3)}(\mathbb{R})$.

Déterminer les mineurs diagonaux principaux de A .

$$M_1 = \begin{vmatrix} a_{11} \end{vmatrix} = a_{11}$$

$$M_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$M_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Proposition

Soit q une forme quadratique sur \mathbb{R}^n et A la matrice symétrique associée. Alors :

- ◆ q est définie positive ssi tous ses n mineurs diagonaux principaux sont strictement positifs.
- ◆ q est définie négative ssi tous ses n mineurs diagonaux principaux d'ordre k ($k = 1, \dots, n$) M_k vérifient : $(-1)^k M_k > 0$.
- ◆ Si l'un des mineurs diagonaux principaux est non nul et ne vérifie pas l'une des deux règles de signes ci-dessus, alors q est de signe variable (q est indéfinie).

Proposition

Soit q une forme quadratique sur \mathbb{R}^n et A la matrice symétrique associée. Alors :

- ◆ q est semi-définie positive ssi tous ses $2^n - 1$ mineurs principaux sont positifs ou nuls.
- ◆ q est semi-définie négative ssi tous ses $2^n - 1$ mineurs principaux d'ordre k ($k = 1, \dots, n$) M_k vérifient : $(-1)^k M_k \geq 0$.
- ◆ Sinon q est de signe variable (q est indéfinie).

Exercice

Etudier le signe des formes quadratiques suivantes :

① $q(x_1, x_2) = 12x_1^2 + 10x_2^2 - 6x_1x_2.$

② $q(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_1x_3.$

③ $q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 - 2x_1x_3.$

④ $q(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 - 2x_2^2 - x_3^2.$

⑤ $q(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 - 2x_2^2 - x_3^2 - 2x_1x_3.$

⑥ $q(x_1, x_2, x_3) = -10x_1^2 - 4x_2^2 - 8x_3^2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3.$

⑦ $q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3 - 2x_1x_3.$