

# Calcul intégral

Hervé Hocquard

Université de Bordeaux, France

10 septembre 2020

université  
de **BORDEAUX**

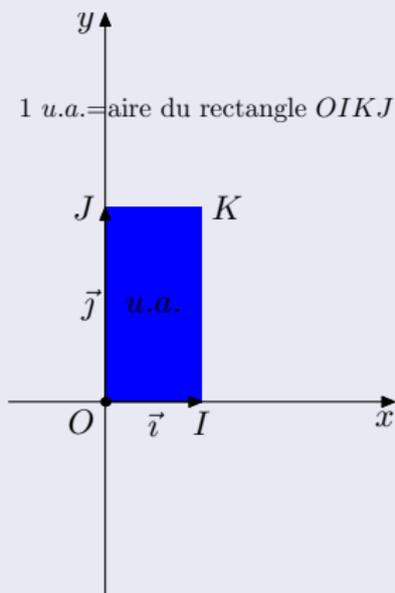
LABORATOIRE  
BORDELAIS  
DE RECHERCHE  
EN INFORMATIQUE

**LaBRI**

# Intégrale d'une fonction continue positive

## Définition

Un repère orthogonal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  ayant été fixé, une unité d'aire est définie de la manière suivante :



## Définition

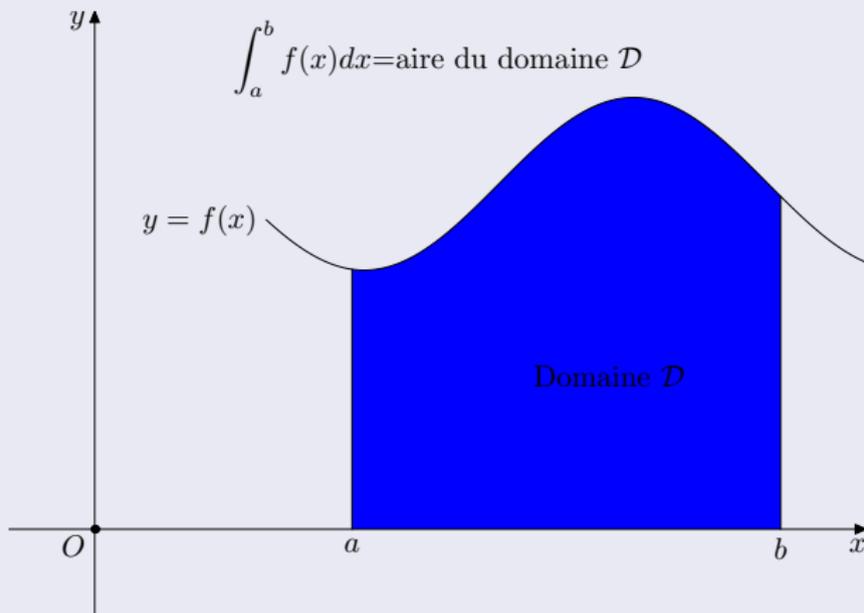
Soit  $f$  une fonction continue et positive sur un intervalle  $[a; b]$  et  $C_f$  sa courbe représentative dans un repère orthogonal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

Le réel, noté  $\int_a^b f(x)dx$ , est l'aire, en unités d'aire, du domaine  $\mathcal{D}$  délimité par  $C_f$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x = a$  et  $x = b$ .

# Intégrale d'une fonction continue positive

## Définition

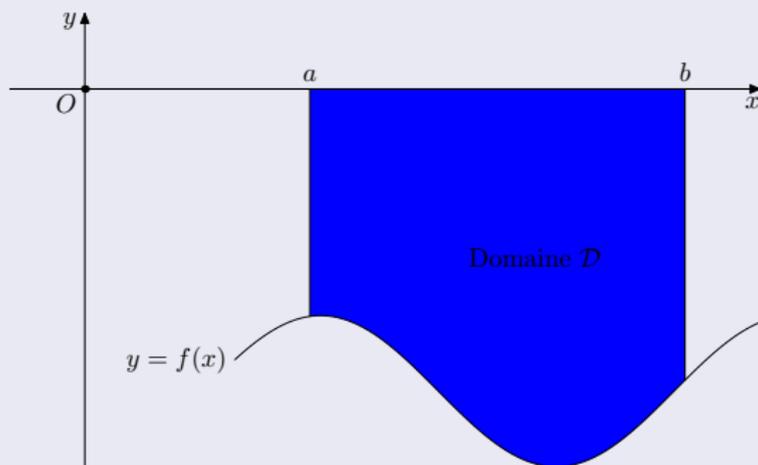
$\int_a^b f(x)dx$  se lit somme de  $a$  à  $b$  de  $f(x)dx$  ou intégrale de  $a$  à  $b$  de  $f$ .



# Intégrale d'une fonction continue négative

## Définition

Si  $f$  est une fonction continue et négative sur  $[a; b]$ , on a la définition suivante :

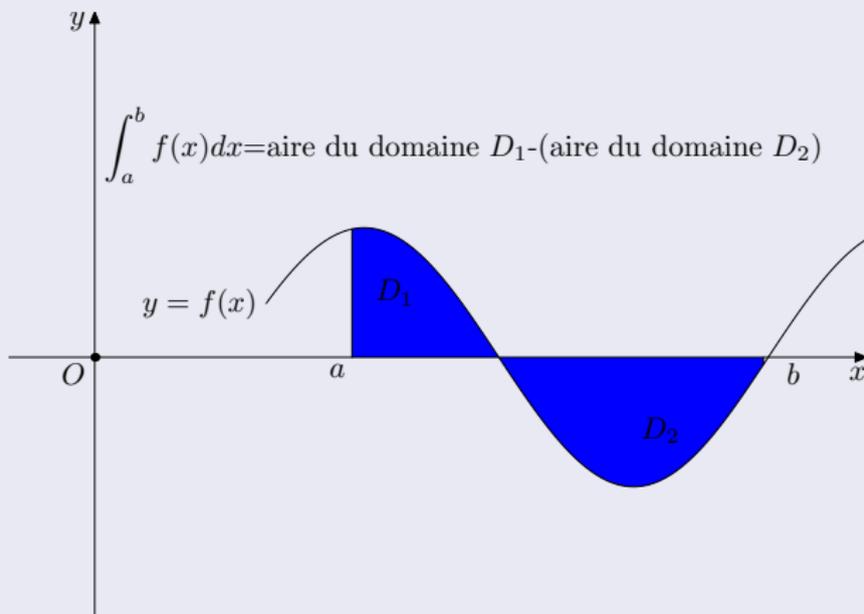


$$\int_a^b f(x)dx = -(\text{aire du domaine } \mathcal{D})$$

# Intégrale d'une fonction continue de signe quelconque

## Définition

Si  $f$  est continue sur l'intervalle  $[a; b]$ , alors on définit  $\int_a^b f(x)dx$  de la manière suivante :



## Remarque

On admet pour l'instant l'égalité suivante :  
si  $f$  est une fonction continue sur  $[a; b]$ , alors, pour tout  $c \in [a; b]$ ,

$$\int_c^c f(x)dx = 0$$

## Définition

Il est un cas où, si la fonction  $f$  n'est pas continue sur  $[a; b]$ , on peut néanmoins définir  $\int_a^b f(x)dx$ , c'est le cas des fonctions en escalier.

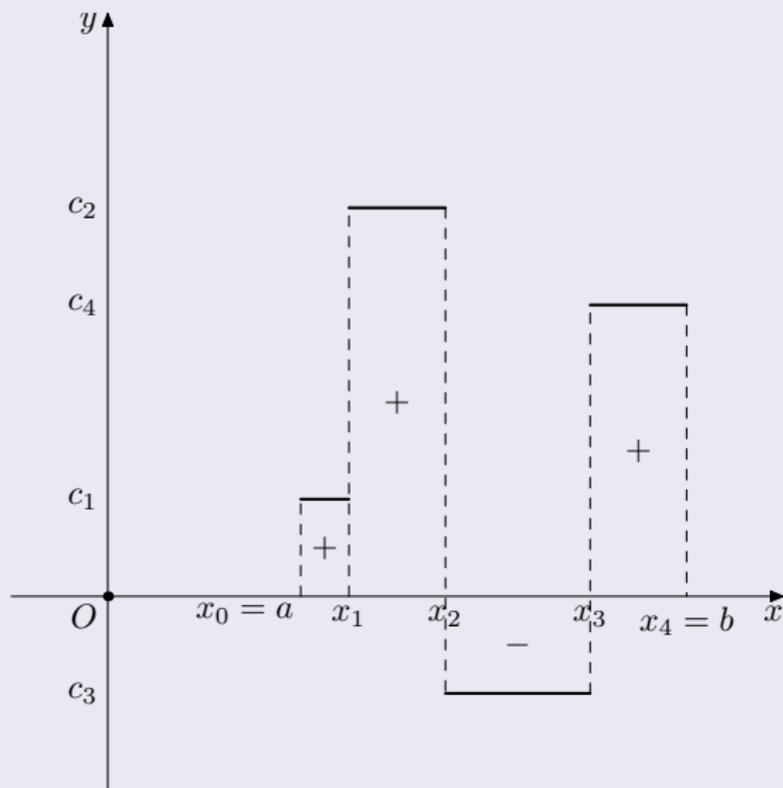
Si  $f$  est définie ainsi :

- 1 si  $x \in [x_0; x_1[$ ,  $f(x) = c_1$
- 2 si  $x \in [x_1; x_2[$ ,  $f(x) = c_2$
- 3 si  $x \in [x_2; x_3[$ ,  $f(x) = c_3$
- 4 si  $x \in [x_3; x_4]$ ,  $f(x) = c_4$

alors  $\int_a^b f(x)dx$  = somme des aires des rectangles situés au-dessus de l'axe des abscisses - (somme des aires des rectangles en dessous de l'axe des abscisses).

# Cas d'une fonction en escalier

## Définition



## Théorème

On admet pour l'instant, la définition de l'intégrale ayant été donnée précédemment, que

$$\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx$$

La notion de primitive nous permettra de valider cette propriété dans quelques instants.

## Théorème-Linéarité

Si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions continues sur  $[a; b]$  et  $\alpha$  un réel, alors on a :

$$\int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx = \int_a^b (f(x) + g(x))dx$$

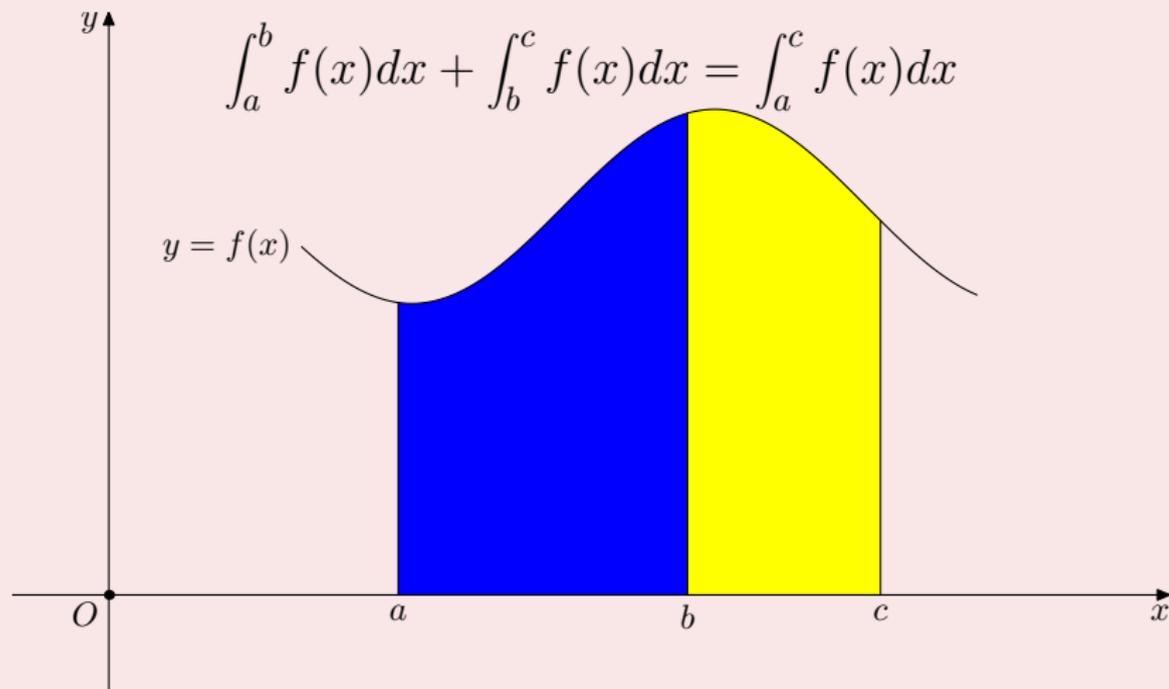
et

$$\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx$$

## Théorème-Relation de Chasles

Soit  $f$  une fonction continue sur  $[a; c]$ , alors :

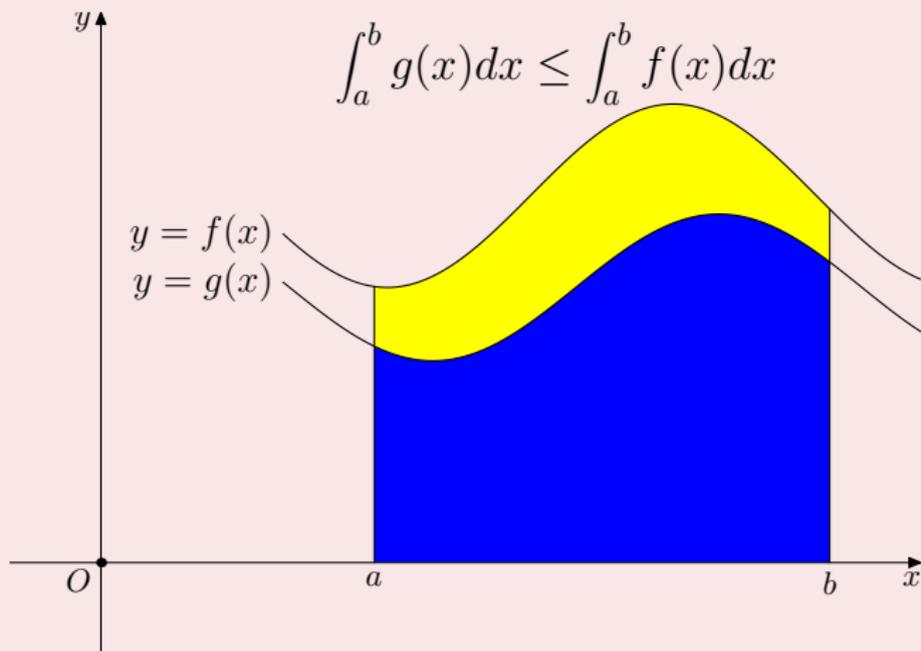
$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$



## Théorème

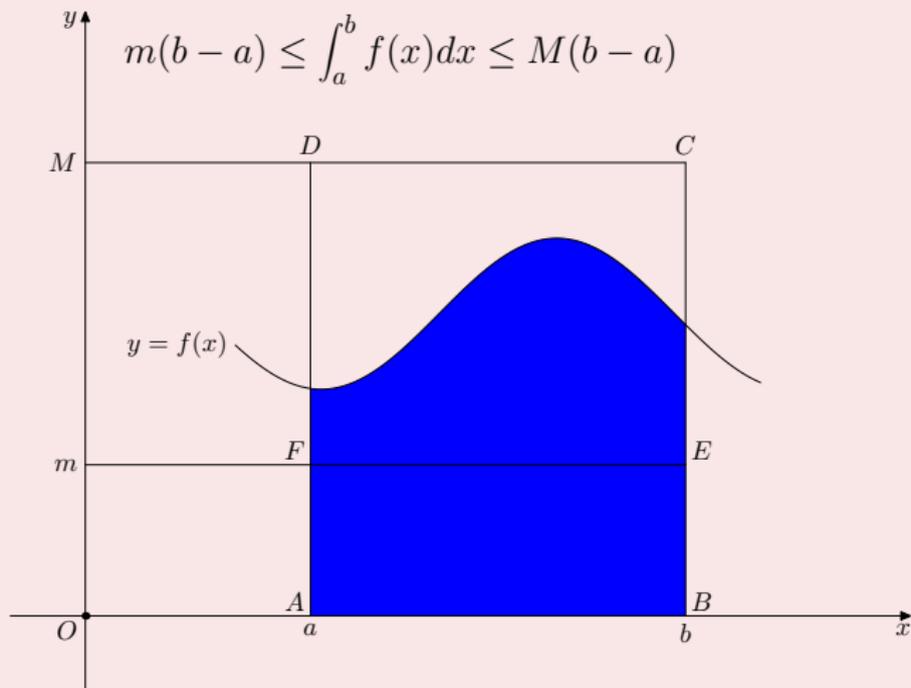
Si  $f$  et  $g$  sont continues sur  $[a; b]$  et si, pour tout  $x \in [a; b]$ ,  $g(x) \leq f(x)$  alors on a :

$$\int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b f(x) dx$$



## Théorème-Inégalité de la moyenne

S'il existe  $m$  et  $M$  tels que, pour tout  $x \in [a; b]$ ,  $m \leq f(x) \leq M$  alors on a :



## Théorème

Si  $f$  est une fonction continue sur un intervalle  $I$ ;  $a$  et  $b$  sont deux réels distincts de l'intervalle  $I$ .

Alors il existe un réel  $c$  entre  $a$  et  $b$  tel que

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c)$$

Le nombre  $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$  est appelé **valeur moyenne de  $f$  entre  $a$  et  $b$** .

## Preuve-Premier cas : $a < b$

Puisque  $f$  est croissante, pour tout réel  $x$  dans  $[a; b]$ ,  
 $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ . On a alors

## Preuve-Premier cas : $a < b$

Puisque  $f$  est croissante, pour tout réel  $x$  dans  $[a; b]$ ,  
 $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ . On a alors

$f(a)(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq f(b)(b-a)$  et, puisque  $b-a > 0$ ,

$$f(a) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq f(b).$$

## Preuve-Premier cas : $a < b$

Puisque  $f$  est croissante, pour tout réel  $x$  dans  $[a; b]$ ,  
 $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ . On a alors

$f(a)(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq f(b)(b-a)$  et, puisque  $b-a > 0$ ,

$$f(a) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq f(b).$$

Le réel  $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$  est dans l'intervalle  $[f(a); f(b)]$ , donc il

existe  $c$  dans  $[a; b]$  tel que :  $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx = f(c)$ .

Preuve-Second cas :  $a > b$

À vous de jouer...

## Introduction

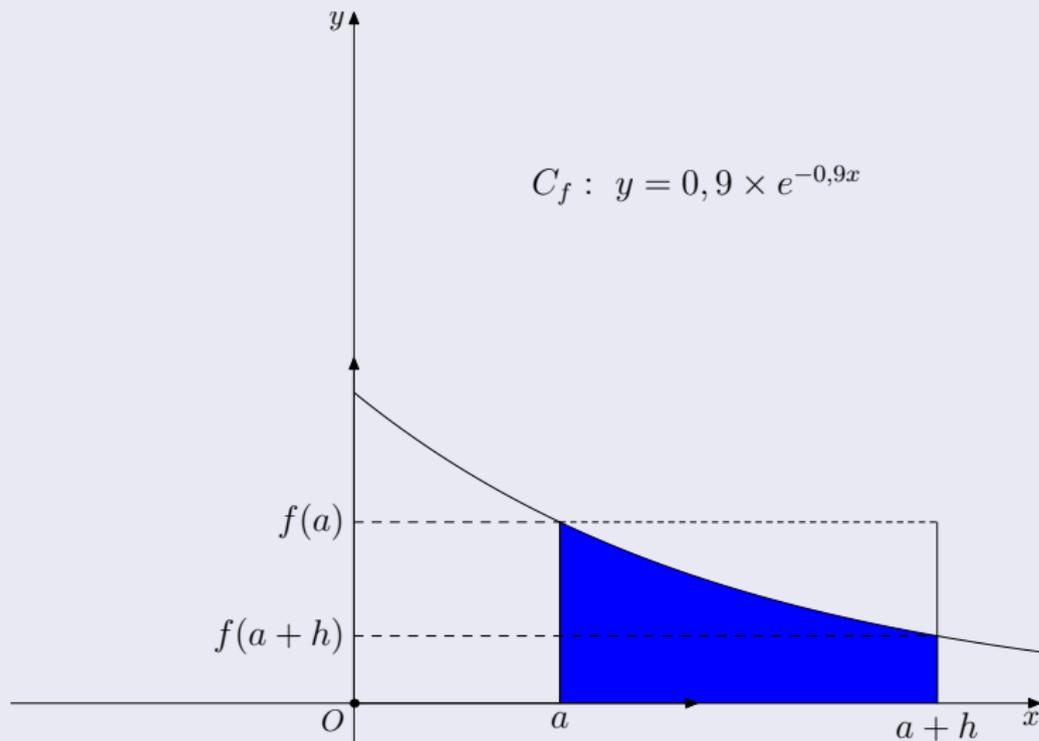
On s'intéresse à la fonction  $f : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto 0,9 \times e^{-0,9x}$ .

Soit  $\mathcal{A}$  la fonction qui, à tout réel  $x$  positif, associe

$$\mathcal{A}(x) = \int_0^x 0,9 e^{-0,9t} dt.$$

Alors, pour tout réel  $a$  positif, le réel  $\mathcal{A}(a+h) - \mathcal{A}(a)$  représente l'aire du domaine colorié en bleue ci-après (on se place dans le cas où  $h$  est strictement positif).

## Introduction



## Introduction

En utilisant les inégalités de la moyenne décrites plus haut, on peut écrire :

$$h \times f(a+h) \leq \mathcal{A}(a+h) - \mathcal{A}(a) \leq h \times f(a)$$

d'où

## Introduction

En utilisant les inégalités de la moyenne décrites plus haut, on peut écrire :

$$h \times f(a+h) \leq \mathcal{A}(a+h) - \mathcal{A}(a) \leq h \times f(a)$$

d'où

$$f(a+h) \leq \frac{\mathcal{A}(a+h) - \mathcal{A}(a)}{h} \leq f(a)$$

## Introduction

De la même manière, en considérant  $h$  strictement négatif, on obtient :

$$f(a) \leq \frac{\mathcal{A}(a+h) - \mathcal{A}(a)}{h} \leq f(a+h)$$

## Introduction

De la même manière, en considérant  $h$  strictement négatif, on obtient :

$$f(a) \leq \frac{\mathcal{A}(a+h) - \mathcal{A}(a)}{h} \leq f(a+h)$$

Si on fait tendre  $h$  vers 0 et en tenant compte du fait que la fonction  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , donc sur  $\mathbb{R}^+$  en particulier, on obtient, après passage à la limite :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathcal{A}(a+h) - \mathcal{A}(a)}{h} = f(a)$$

## Introduction

Ce qui nous permet de dire que la fonction

$$\mathcal{A} : x \mapsto \int_0^x f(t) dt$$

est dérivable sur  $\mathbb{R}^+$  et vérifie

$$\mathcal{A}'(x) = f(x)$$

La fonction  $\mathcal{A}$  est appelée **primitive** de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}^+$ .

## Introduction

Ce qui nous permet de dire que la fonction

$$\mathcal{A} : x \mapsto \int_0^x f(t) dt$$

est dérivable sur  $\mathbb{R}^+$  et vérifie

$$\mathcal{A}'(x) = f(x)$$

La fonction  $\mathcal{A}$  est appelée **primitive** de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}^+$ .  
En effet, si l'on considère la fonction  $F$ , définie sur  $\mathbb{R}$ , par

$$F(x) = \mathcal{A}(x) + e^{-0.9x}$$

on voit que, la fonction  $F$  étant manifestement dérivable sur  $\mathbb{R}^+$ ,  
 $F'(x) = 0$ , pour tout  $x \geq 0$ , donc  $F(x) = K$  constante.  
D'où :  $F(x) = F(0) = 1$ .

## Introduction

Autrement dit,

$$\mathcal{A}(x) = 1 - e^{-0.9x} \text{ pour tout } x \geq 0$$

or

$$\int_0^1 f(t)dt = \mathcal{A}(1)$$

donc

$$\int_0^1 f(t)dt = 1 - e^{-0.9}$$

## Définition

$f$  est une fonction définie sur un intervalle  $I$ . La fonction  $F$  est une **primitive** de  $f$  sur  $I$  si, pour tout  $x$  dans  $I$ ,  $F'(x) = f(x)$  (implicitement, cela suppose que  $F$  soit dérivable sur  $I$ ).

## Définition

$f$  est une fonction définie sur un intervalle  $I$ . La fonction  $F$  est une **primitive** de  $f$  sur  $I$  si, pour tout  $x$  dans  $I$ ,  $F'(x) = f(x)$  (implicitement, cela suppose que  $F$  soit dérivable sur  $I$ ).

## Théorème

Si  $f$  est une fonction définie sur un intervalle  $I$ . Si  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $I$ , alors  $f$  admet une infinité de primitives. Les autres primitives de  $f$  sur  $I$  sont définies par  $G(x) = F(x) + K$  où  $K$  est une constante réelle.

## Preuve

$F$  est dérivable sur  $I$  et  $F' = f$ . La fonction  $G$  est aussi dérivable sur  $I$  avec  $G' = F' = f$ . Donc  $G$  est une primitive de  $f$  sur  $I$ .

## Preuve

$F$  est dérivable sur  $I$  et  $F' = f$ . La fonction  $G$  est aussi dérivable sur  $I$  avec  $G' = F' = f$ . Donc  $G$  est une primitive de  $f$  sur  $I$ .

Inversement, si  $G$  est une primitive de  $f$  sur  $I$  alors  $G' = f = F'$  d'où  $G' - F' = 0$ .

## Preuve

$F$  est dérivable sur  $I$  et  $F' = f$ . La fonction  $G$  est aussi dérivable sur  $I$  avec  $G' = F' = f$ . Donc  $G$  est une primitive de  $f$  sur  $I$ .

Inversement, si  $G$  est une primitive de  $f$  sur  $I$  alors  $G' = f = F'$  d'où  $G' - F' = 0$ .

La dérivée de  $G - F$  est nulle sur l'intervalle  $I$  donc  $G - F$  est constante sur  $I$ , il existe donc un réel  $K$  tel que pour tout  $x$  de  $I$ ,  $G(x) - F(x) = K$ , d'où le résultat.

## Théorème

Soit  $f$  une fonction admettant des primitives sur  $I$ .

Soient  $x_0$  est un réel donné appartenant à  $I$  et  $y_0$  un réel quelconque.

Alors il existe **une unique primitive**  $F$  de  $f$  sur  $I$  telle que  $F(x_0) = y_0$ .

## Théorème

Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $I$ ;  $a$  est un réel de  $I$ .

Alors la fonction  $F$  définie sur  $I$  par  $F(x) = \int_a^x f(t)dt$  est l'unique primitive de  $f$  sur  $I$  telle que  $F(a) = 0$ .

Les opérations sur les fonctions dérivables et la définition d'une primitive conduisent aux résultats suivants :

- si  $F$  et  $G$  sont des primitives des fonctions  $f$  et  $g$  sur un intervalle  $I$ , alors  $F + G$  est une primitive de  $f + g$  sur  $I$ .
- Si  $F$  est une primitive de la fonction  $f$  sur un intervalle  $I$  et  $\lambda$  un réel, alors  $\lambda F$  est une primitive de  $\lambda f$  sur  $I$ .

De même, les résultats connus sur les dérivées des fonctions usuelles donnent par lecture inverse le tableau des primitives suivant :

# Calculs de primitives

Fonction $f$	Primitive $F$	Intervalle $I$
$a$ (constante)	$ax$	$\mathbb{R}$
$x^n$ ( $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$ )	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$ si $n \geq 0$ et $]0; +\infty[$ ou $]-\infty; 0[$ si $n < 0$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$]0; +\infty[$
$\frac{1}{x}$	$\ln x$	$]0; +\infty[$
$e^x$	$e^x$	$\mathbb{R}$

# Calculs de primitives

Si  $u$  est une fonction dérivable sur un intervalle  $I$ , on a alors :

Fonction $f$	Primitive $F$	Remarques
$u' u^n$ ( $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$ )	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$	si $n < 0$ , pour tout $x$ tel que $u(x) \neq 0$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	$u > 0$ sur $I$
$\frac{u'}{u}$	$\ln( u )$	$u \neq 0$ sur $I$
$u' e^u$	$e^u$	
$x \mapsto u(ax + b)$ ( $a \neq 0$ )	$x \mapsto \frac{1}{a} U(ax + b)$	$U$ primitive de $u$ sur $I$

## Remarque

On peut ajouter à chaque primitive déterminée une constante  $K$  pour obtenir toutes les primitives.

## Remarque

On peut ajouter à chaque primitive déterminée une constante  $K$  pour obtenir toutes les primitives.

## Théorème fondamental de l'analyse

Si  $f$  est une fonction continue sur un intervalle  $I$ ,  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $I$ ,  $a$  et  $b$  sont deux réels de  $I$ . Alors :

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

## Preuve

On sait que la fonction  $G : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$  est la primitive de  $f$  sur  $I$  telle que  $G(a) = 0$ .

## Preuve

On sait que la fonction  $G : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$  est la primitive de  $f$  sur  $I$  telle que  $G(a) = 0$ .

Si  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $I$ , alors il existe  $k \in \mathbb{R}$  tel que pour tout  $x$  de  $I$ ,  $G(x) = F(x) + k$ . Or  $G(a) = 0$ , d'où  $k = -F(a)$  et on obtient :  $\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$ .

## Preuve

On sait que la fonction  $G : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$  est la primitive de  $f$  sur  $I$  telle que  $G(a) = 0$ .

Si  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $I$ , alors il existe  $k \in \mathbb{R}$  tel que pour tout  $x$  de  $I$ ,  $G(x) = F(x) + k$ . Or  $G(a) = 0$ , d'où  $k = -F(a)$  et on obtient :  $\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$ .

En posant  $x = b$ , on obtient bien  $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$ .

## Notation

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

## Notation

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

## Remarque

Cela permet de valider la formule :

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= [F(x)]_a^b = F(b) - F(a) \\ &= -(F(a) - F(b)) \\ &= -\int_b^a f(x)dx\end{aligned}$$

## Exercice

Calculer  $I = \int_1^2 (x-3)(x-9)dx$ .

## Exercice

Calculer  $I = \int_1^2 (x-3)(x-9)dx$ .

$$I = \frac{34}{3}$$

## Théorème

Si  $u$  et  $v$  sont deux fonctions dérivables sur un intervalle  $I$ , telles que leurs dérivées  $u'$  et  $v'$  soient continues sur  $I$ .

Alors pour tous réels  $a$  et  $b$  de  $I$  :

$$\int_a^b u(t)v'(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)dt$$

## Preuve

La fonction  $uv$  est dérivable sur  $I$  avec  $(uv)' = u'v + uv'$ .

Ainsi  $uv' = (uv)' - u'v$ .

Puisque  $uv'$ ,  $(uv)'$  et  $u'v$  sont continues sur  $I$ , on en déduit que :

## Preuve

La fonction  $uv$  est dérivable sur  $I$  avec  $(uv)' = u'v + uv'$ .

Ainsi  $uv' = (uv)' - u'v$ .

Puisque  $uv'$ ,  $(uv)'$  et  $u'v$  sont continues sur  $I$ , on en déduit que :

$$\int_a^b (uv')(t)dt = \int_a^b [(uv)'(t) - (u'v)(t)]dt$$

## Preuve

La fonction  $uv$  est dérivable sur  $I$  avec  $(uv)' = u'v + uv'$ .

Ainsi  $uv' = (uv)' - u'v$ .

Puisque  $uv'$ ,  $(uv)'$  et  $u'v$  sont continues sur  $I$ , on en déduit que :

$$\int_a^b (uv')(t)dt = \int_a^b [(uv)'(t) - (u'v)(t)]dt$$

et par linéarité de l'intégration :

$$\int_a^b (uv')(t)dt = \int_a^b (uv)'(t)dt - \int_a^b (u'v)(t)dt$$

## Preuve

Or  $uv$  est une primitive de  $(uv)'$  sur  $I$ , donc

$$\int_a^b (uv)'(t) dt = [u(t)v(t)]_a^b$$

## Preuve

Or  $uv$  est une primitive de  $(uv)'$  sur  $I$ , donc

$$\int_a^b (uv)'(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b$$

Ainsi, on obtient :

$$\int_a^b u(t)v'(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)dt$$

## Exercice

Calculer  $J = \int_1^2 x \ln(x) dx$ .

## Exercice

Calculer  $J = \int_1^2 x \ln(x) dx$ .

$$J = 2 \ln(2) - \frac{3}{4}$$

## Théorème

Soient  $\varphi$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  et  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur un intervalle  $J$  de  $\mathbb{R}$  (fonctions à valeurs dans  $\mathbb{R}$ ). On suppose que  $\varphi(I) \subset J$ .

Alors :

$$\int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx$$

## Exercice

Calculer  $K = \int_1^2 \frac{dx}{x(1 + \ln(x))}$  (on posera  $u = 1 + \ln(x)$ ).

## Exercice

Calculer  $K = \int_1^2 \frac{dx}{x(1 + \ln(x))}$  (on posera  $u = 1 + \ln(x)$ ).

$$K = \ln(1 + \ln(2))$$

## Théorème

- Soit  $f \in \mathcal{C}([-a, a], \mathbb{R})$ . Alors :

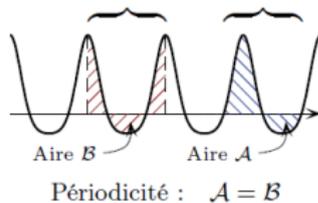
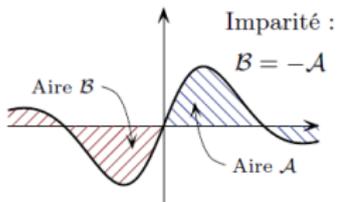
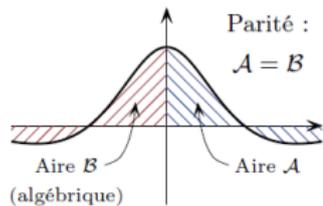
$$\int_{-a}^a f = 2 \int_0^a f \text{ si } f \text{ est paire}$$

$$\int_{-a}^a f = 0 \text{ si } f \text{ est impaire}$$

- Soit  $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  périodique de période  $T$ . Alors :

$$\int_a^{a+T} f = \int_0^T f$$

# Parité-Imparité-Périodicité



# Les fractions rationnelles

# Le corps des fractions rationnelles $\mathbb{R}(X)$

## Introduction

Le corps des fractions de l'anneau intègre  $\mathbb{R}[X]$  se note  $\mathbb{R}(X)$  dont les éléments sont de la forme  $\frac{P}{Q}$ ; où  $P$  et  $Q$  deux polynômes tels que  $Q \neq 0$  et s'appellent des fractions rationnelles.

Cette écriture est dite irréductible lorsque  $P \wedge Q = 1$ .  
Toute fraction rationnelle peut s'écrire sous une forme irréductible...

## Définition

Le degré d'une fraction rationnelle  $\frac{P}{Q}$  est défini à l'aide des relations :

$$\deg\left(\frac{P}{Q}\right) = -\infty \text{ si } \frac{P}{Q} = 0$$

$$\deg\left(\frac{P}{Q}\right) = \deg(P) - \deg(Q) \text{ sinon}$$

Le degré d'une fraction rationnelle est donc un élément de  $\mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$ .

## Définition

Soit  $F = \frac{P}{Q}$  écrite sous sa forme irréductible, les pôles de  $F$  sont exactement les racines de  $Q$ , les multiplicités de ses racines de  $Q$  sont appelés aussi multiplicités des pôles associés pour la fraction rationnelle  $F$ .

# Pôle d'une fraction rationnelle

## Définition

Soit  $F = \frac{P}{Q}$  écrite sous sa forme irréductible, les pôles de  $F$  sont exactement les racines de  $Q$ , les multiplicités de ses racines de  $Q$  sont appelés aussi multiplicités des pôles associés pour la fraction rationnelle  $F$ .

## Remarque

Pour déterminer les pôles d'une fraction rationnelle il faut avant toute autre chose la simplifier et l'écrire sous sa forme irréductible.

# Décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle

## Définition

La partie entière d'une fraction rationnelle  $F$  est par définition l'unique polynôme noté  $E(F)$  vérifiant la propriété :  
 $\deg(F - E(F)) < 0$ .

# Décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle

## Définition

La partie entière d'une fraction rationnelle  $F$  est par définition l'unique polynôme noté  $E(F)$  vérifiant la propriété :  
 $\deg(F - E(F)) < 0$ .

## Remarque

Si  $F = \frac{P}{Q}$  la partie entière de  $F$  est exactement le quotient de la division euclidienne de  $P$  par  $Q$ .

# Décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle

## Définition

La partie entière d'une fraction rationnelle  $F$  est par définition l'unique polynôme noté  $E(F)$  vérifiant la propriété :  
 $\deg(F - E(F)) < 0$ .

## Remarque

Si  $F = \frac{P}{Q}$  la partie entière de  $F$  est exactement le quotient de la division euclidienne de  $P$  par  $Q$ .

## Exercice

Déterminer la partie entière de  $F(x) = \frac{X^3 + 2X^2 - 3X + 2}{X^2 - 1}$ .

# Décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle

## Définition

La partie polaire relative à un pôle  $a$  d'une fraction rationnelle  $F$  est par définition l'unique fraction rationnelle notée  $F_a$  vérifiant la propriété suivante :  $a$  n'est pas un pôle de  $F - F_a$ .

# Décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle

## Définition

La partie polaire relative à un pôle  $a$  d'une fraction rationnelle  $F$  est par définition l'unique fraction rationnelle notée  $F_a$  vérifiant la propriété suivante :  $a$  n'est pas un pôle de  $F - F_a$ .

## Remarque

Si  $a$  est un pôle de multiplicité  $r$  dans  $F$ , alors la partie polaire relative à  $a$  dans  $F$  est de la forme :

$$F_a(X) = \frac{\lambda_1}{X-a} + \frac{\lambda_2}{(X-a)^2} + \dots + \frac{\lambda_r}{(X-a)^r}$$

# Décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle

## Définition

La partie polaire relative à un pôle  $a$  d'une fraction rationnelle  $F$  est par définition l'unique fraction rationnelle notée  $F_a$  vérifiant la propriété suivante :  $a$  n'est pas un pôle de  $F - F_a$ .

## Remarque

Si  $a$  est un pôle de multiplicité  $r$  dans  $F$ , alors la partie polaire relative à  $a$  dans  $F$  est de la forme :

$$F_a(X) = \frac{\lambda_1}{X-a} + \frac{\lambda_2}{(X-a)^2} + \dots + \frac{\lambda_r}{(X-a)^r}$$

Toute fraction rationnelle se décompose en éléments simples de façon unique comme somme de sa partie entière et toutes les parties polaires relatives à ses pôles.

# Cas d'un unique pôle

Si  $F(X) = \frac{P(X)}{(X-a)^r}$  avec  $\deg(P) < r$  admet un unique pôle  $a$ , alors sa décomposition en éléments simples est obtenu à l'aide de *la formule de Taylor* à l'ordre  $r - 1$  appliquée au polynôme  $P$  au point  $a$ , plus précisément :

$$P(X) = P(a) + P'(a)(X - a) + \dots + \frac{P^{(r-1)}(a)}{(r-1)!}(X - a)^{r-1}$$

d'où

$$F(X) = \frac{P^{(r-1)}(a)}{(r-1)!} \frac{1}{X - a} + \dots + \frac{P(a)}{(X - a)^r}$$

# Cas d'un unique pôle

Si  $F(X) = \frac{P(X)}{(X-a)^r}$  avec  $\deg(P) < r$  admet un unique pôle  $a$ , alors sa décomposition en éléments simples est obtenue à l'aide de la formule de Taylor à l'ordre  $r - 1$  appliquée au polynôme  $P$  au point  $a$ , plus précisément :

$$P(X) = P(a) + P'(a)(X - a) + \dots + \frac{P^{(r-1)}(a)}{(r-1)!}(X - a)^{r-1}$$

d'où

$$F(X) = \frac{P^{(r-1)}(a)}{(r-1)!} \frac{1}{X - a} + \dots + \frac{P(a)}{(X - a)^r}$$

## Exercice

Décomposer la fraction rationnelle suivante en éléments simples :

$$F(X) = \frac{2X + 1}{(X - 1)^2}$$

## À retenir

Si  $a$  est un pôle de  $F$  de multiplicité  $r$  dans  $F$ , alors le coefficient  $\lambda_r$  de  $\frac{1}{(X-a)^r}$  dans la partie polaire de  $F$  relative à  $a$  est obtenu à l'aide de la formule  $\lambda_r = \lim_{X \rightarrow a} (X-a)^r F(X)$ .

# Coefficient du plus haut degré dans la partie polaire

## À retenir

Si  $a$  est un pôle de  $F$  de multiplicité  $r$  dans  $F$ , alors le coefficient  $\lambda_r$  de  $\frac{1}{(X-a)^r}$  dans la partie polaire de  $F$  relative à  $a$  est obtenu à l'aide de la formule  $\lambda_r = \lim_{X \rightarrow a} (X-a)^r F(X)$ .

## Exercice

Décomposer la fraction rationnelle suivante en éléments simples :

$$F(X) = \frac{1}{X^2 - 5X + 4}$$

## À retenir ou pas

Si  $a$  est un pôle simple de  $F = \frac{P}{Q}$  (de multiplicité 1), alors la partie polaire de  $F$  relative au pôle  $a$  est de la forme

$$F_a(X) = \frac{\lambda}{X-a} \text{ où } \lambda = \frac{P(a)}{Q'(a)}.$$

## À retenir ou pas

Si  $a$  est un pôle simple de  $F = \frac{P}{Q}$  (de multiplicité 1), alors la partie polaire de  $F$  relative au pôle  $a$  est de la forme

$$F_a(X) = \frac{\lambda}{X-a} \text{ où } \lambda = \frac{P(a)}{Q'(a)}.$$

## Exercice

Décomposer la fraction rationnelle suivante en éléments simples :

$$F(X) = \frac{1}{X^2 - 5X + 4}$$

# Cas d'un pôle double

## A ne pas retenir

Si  $a$  est un pôle double de  $F = \frac{P}{Q}$  (de multiplicité 2), alors la partie polaire de  $F$  relative au pôle  $a$  est de la forme :

$$F_a(X) = \frac{\lambda}{X-a} + \frac{\mu}{(X-a)^2}$$

$$\text{où } \mu = \frac{2P(a)}{Q''(a)} ; \lambda = \frac{2}{3} \frac{3P'(a)Q''(a) - P(a)Q'''(a)}{(Q''(a))^2}.$$

# Cas d'un pôle double

## A ne pas retenir

Si  $a$  est un pôle double de  $F = \frac{P}{Q}$  (de multiplicité 2), alors la partie polaire de  $F$  relative au pôle  $a$  est de la forme :

$$F_a(X) = \frac{\lambda}{X-a} + \frac{\mu}{(X-a)^2}$$

où  $\mu = \frac{2P(a)}{Q''(a)}$  ;  $\lambda = \frac{2}{3} \frac{3P'(a)Q''(a) - P(a)Q'''(a)}{(Q''(a))^2}$ .

## Exercice

Décomposer la fraction rationnelle suivante en éléments simples :

$$F(X) = \frac{2X+1}{(X-1)^2}$$

# Cas d'une fraction rationnelle paire ou impaire

Soit  $F$  une fraction rationnelle paire ou impaire et  $a$  un pôle de  $F$  de partie polaire dans  $F$  égale à

$F_a(X) = \frac{\lambda_1}{X-a} + \frac{\lambda_2}{(X-a)^2} + \dots + \frac{\lambda_r}{(X-a)^r}$ , alors  $-a$  est aussi un pôle de  $F$  de même multiplicité que  $a$  et dont la partie polaire dans  $F$  est :

- Si  $F$  paire,  $F_{-a}(X) = \frac{-\lambda_1}{X+a} + \frac{\lambda_2}{(X+a)^2} + \dots + \frac{(-1)^r \lambda_r}{(X+a)^r}$ .
- Si  $F$  impaire,  $F_{-a}(X) = \frac{\lambda_1}{X+a} + \frac{-\lambda_2}{(X+a)^2} + \dots + \frac{(-1)^{r+1} \lambda_r}{(X+a)^r}$ .

# Cas d'une fraction rationnelle de la forme $F = P'/P$

Dans ce cas si  $(a_i)_{1 \leq i \leq r}$  sont les racine de  $P$  de multiplicité  $\alpha_i$ , alors ce sont des pôles simple de  $F$ , et la décomposition en élément simple de  $F$  est donnée à l'aide de la formule :

$$\frac{P'(X)}{P(X)} = \sum_{i=1}^r \frac{\lambda_i}{X - a_i}$$

Vous pouvez aussi décomposer une fraction en éléments simples en utilisant la méthode d'identification...mais bon courage... 😊