

Rang et déterminant des matrices

Hervé Hocquard

Université de Bordeaux, France

4 septembre 2019

université
de **BORDEAUX**

LABORATOIRE
BORDELAIS
DE RECHERCHE
EN INFORMATIQUE

LaBRI

Introduction

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . On peut

décomposer A en lignes : $A = \begin{pmatrix} a_{1*} \\ \vdots \\ a_{n*} \end{pmatrix}$

ou en colonnes : $A = (a_{*1} \quad \cdots \quad a_{*p})$.

Introduction

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . On peut

décomposer A en lignes : $A = \begin{pmatrix} a_{1*} \\ \vdots \\ a_{n*} \end{pmatrix}$

ou en colonnes : $A = \begin{pmatrix} a_{*1} & \cdots & a_{*p} \end{pmatrix}$. On associe à A deux sev de \mathbb{K}^p :

$\mathcal{L}(A) = \text{Vect} \{a_{1*}, \dots, a_{n*}\}$ le sev engendré par les lignes de A .

Introduction

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . On peut

décomposer A en lignes : $A = \begin{pmatrix} a_{1*} \\ \vdots \\ a_{n*} \end{pmatrix}$

ou en colonnes : $A = (a_{*1} \quad \cdots \quad a_{*p})$. On associe à A deux sev de \mathbb{K}^p :

$\mathcal{L}(A) = \text{Vect} \{ a_{1*}, \dots, a_{n*} \}$ le sev engendré par les lignes de A .

$\mathcal{C}(A) = \text{Vect} \{ a_{*1}, \dots, a_{*p} \}$ le sev engendré par les colonnes de A .

Théorème

Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\dim \mathcal{L}(A) = \dim \mathcal{C}(A)$.

Théorème

Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\dim \mathcal{L}(A) = \dim \mathcal{C}(A)$.

Définition

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle rang de A la dimension de $\mathcal{C}(A)$ (ou de $\mathcal{L}(A)$). On a clairement :

$$\text{rang}A \leq \min(n,p) \text{ et } \text{rang}A = \text{rang}({}^tA)$$

Rang d'une matrice...pour faire simple

Définition

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ une matrice, on appelle rang de la matrice A , le rang dans \mathbb{R}^n du système constitué par ses p vecteurs colonnes, notation : $rg(A) = rg(c_1(A), \dots, c_p(A))$.

Rang d'une matrice...pour faire simple

Définition

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ une matrice, on appelle rang de la matrice A , le rang dans \mathbb{R}^n du système constitué par ses p vecteurs colonnes, notation : $rg(A) = rg(c_1(A), \dots, c_p(A))$.

Remarque

$$Im A = Vect\{c_1(A), \dots, c_p(A)\}$$

Rang d'une matrice...pour faire simple

Définition

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ une matrice, on appelle rang de la matrice A , le rang dans \mathbb{R}^n du système constitué par ses p vecteurs colonnes, notation : $rg(A) = rg(c_1(A), \dots, c_p(A))$.

Remarque

$$Im A = Vect\{c_1(A), \dots, c_p(A)\}$$

Théorème

Soit u une application linéaire de E dans F , soit \mathcal{B} une base de E , soit \mathcal{B}' une base de F , et soit $A = \underset{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}{mat}(u)$, alors

$$rg(u) = rg(A)$$

Théorème (Conséquence)

Soit E un espace vectoriel de dimension n , soit $\mathcal{S} = (x_1, \dots, x_p)$ une famille de p vecteurs de E et soit \mathcal{B} une base de E , alors le rang de la famille \mathcal{S} est égal au rang de la matrice de ce système dans la base \mathcal{B} .

Théorème (Conséquence)

Soit E un espace vectoriel de dimension n , soit $\mathcal{S} = (x_1, \dots, x_p)$ une famille de p vecteurs de E et soit \mathcal{B} une base de E , alors le rang de la famille \mathcal{S} est égal au rang de la matrice de ce système dans la base \mathcal{B} .

Théorème : Invariance du rang

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $P \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ inversible et soit $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible. Alors :

- 1 $rg(AP) = rg(A)$ et $rg(QA) = rg(A)$.
- 2 Deux matrices semblables ont le même rang.
- 3 $rg(A) = rg({}^t A)$.

Définition

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, on appelle opérations élémentaires sur A les opérations suivantes :

- 1 Permuter deux lignes de A (ou deux colonnes), notation : $L_i \leftrightarrow L_j$ (resp. $C_i \leftrightarrow C_j$).
- 2 Multiplier une ligne (ou une colonne) par un scalaire non nul, notation : $L_i \leftarrow \alpha L_i$ (resp. $C_i \leftarrow \alpha C_i$).
- 3 Ajouter à une ligne (ou une colonne) un multiple d'une autre ligne (resp. une autre colonne), notation : $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$, avec $i \neq j$ (resp. $C_i \leftarrow C_i + \alpha C_j$).

Théorème

Effectuer une opération élémentaire sur une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ revient à multiplier A à gauche par une matrice inversible pour les opérations sur les lignes (à droite pour une opération sur les colonnes).

Remarque

Il est à peu près évident que les opérations élémentaires ne modifient pas le rang d'une matrice. Pour calculer le rang d'une matrice, il suffit donc de l'échelonner par rapport à ses lignes (resp. ses colonnes) et le rang est alors égal au nombre de lignes (resp. de colonnes) non nulles de la matrice échelonnée. C'est donc aussi le nombre de pivots non nuls d'une réduite de Gauss-Jordan de la matrice.

Remarque

Il est à peu près évident que les opérations élémentaires ne modifient pas le rang d'une matrice. Pour calculer le rang d'une matrice, il suffit donc de l'échelonner par rapport à ses lignes (resp. ses colonnes) et le rang est alors égal au nombre de lignes (resp. de colonnes) non nulles de la matrice échelonnée. C'est donc aussi le nombre de pivots non nuls d'une réduite de Gauss-Jordan de la matrice.

Théorème : propriétés d'invariance

- Les opérations élémentaires conservent le rang de la matrice.
- La suppression d'une colonne nulle ou d'une ligne nulle préserve le rang.

Calcul pratique du rang d'une matrice : pivot de Gauss

0) Si $A = 0$, alors $\text{rg}(A) = 0$ — sortie de l'algorithme.

1) Sinon au moins un coefficient de A est non nul. En permutant les lignes et les colonnes de A , on se ramène au calcul du rang d'une matrice de même rang que A dont le coefficient a de position $(1,1)$ est non nul. Ce coefficient a est alors qualifié de *pivot*.

2) A l'aide du pivot a , on annule par des opérations élémentaires sur les lignes tous les termes de la première colonne de la matrice obtenue à l'issue de l'étape 1) (à l'exception du pivot).

3) Toujours à l'aide du pivot a , on annule ensuite par des opérations élémentaires sur les colonnes tous les termes de la première ligne de la matrice obtenue à l'issue de l'étape 2) (à l'exception du pivot).

4) La première colonne de la matrice obtenue à l'issue de l'étape 3) est clairement non combinaison linéaire des autres colonnes de cette matrice. Ceci explique le résultat de l'étape 4) figuré ci-dessous.

$$\text{rg}(A) = \text{rg} \begin{matrix} \text{Etape 1)} \\ \begin{pmatrix} a & \times & \cdots & \times \\ \times & \times & \cdots & \times \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \times & \times & \cdots & \times \end{pmatrix} \end{matrix} = \text{rg} \begin{matrix} \text{Etape 2)} \\ \begin{pmatrix} a & \times & \cdots & \times \\ 0 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & & \\ 0 & \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ A' \\ \\ \end{matrix} \end{matrix} = \text{rg} \begin{matrix} \text{Etape 3)} & \text{Etape 4)} \\ \underbrace{\begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & & \\ 0 & \vdots & & \vdots \end{pmatrix}}_{\text{Cette étape n'a pas à figurer sur vos copies, vous pouvez directement passer à l'étape 4).} & \begin{matrix} \\ \\ A' \\ \\ \end{matrix} \end{matrix} = \text{rg}(A') + 1.$$

Finalement, on reprend les étapes 0) à 4) avec la matrice A' . L'algorithme se termine avec certitude car A' est strictement plus petite que A de par sa taille.

Exercice

Déterminer le rang de la matrice A ci-dessous :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & -4 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcul pratique du rang d'une matrice : exercice

$$\begin{aligned} \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & -4 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} &= \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} & C_1 \leftrightarrow C_2 &= \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} & L_1 \leftrightarrow L_4 \\ &= 1 + \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} &= 1 + \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} & L_4 \leftarrow \frac{1}{2} L_1 + \frac{1}{2} L_4 \end{aligned}$$

Calcul pratique du rang d'une matrice : exercice

$$\begin{aligned} \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & -4 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} &= \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} & C_1 \leftrightarrow C_2 &= \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} & L_1 \leftrightarrow L_4 \\ &= 1 + \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} &= 1 + \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} & L_4 \leftarrow \frac{1}{2} L_1 + \frac{1}{2} L_4 \\ &= 2 + \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2 + 2 = 4 \end{aligned}$$

Calcul pratique du rang d'une matrice : exercice

$$\begin{aligned} \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & -4 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} &= \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} & C_1 \leftrightarrow C_2 &= \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} & L_1 \leftrightarrow L_4 \\ &= 1 + \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} &= 1 + \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} & L_4 \leftarrow \frac{1}{2} L_1 + \frac{1}{2} L_4 \\ &= 2 + \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2 + 2 = 4 \end{aligned}$$

$$\operatorname{rg}(A) = 4$$

Proposition

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. A est inversible à gauche (resp. à droite) ssi $\text{rang}A = p$ (resp. $\text{rang}A = n$).

Proposition

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. A est inversible à gauche (resp. à droite) ssi $\text{rang}A = p$ (resp. $\text{rang}A = n$).

Corollaire

Toute matrice inversible est carrée, et pour une matrice carrée A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a :

$$A \text{ inversible} \iff \text{rang}A = n$$

On dit aussi régulière pour inversible.

Proposition

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. A est inversible à gauche (resp. à droite) ssi $\text{rang}A = p$ (resp. $\text{rang}A = n$).

Corollaire

Toute matrice inversible est carrée, et pour une matrice carrée A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a :

$$A \text{ inversible} \iff \text{rang}A = n$$

On dit aussi régulière pour inversible.

Corollaire

Le rang d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est égal à l'ordre de la plus grande sous matrice carrée régulière que l'on peut extraire de A .

Propriétés

Soit f une application linéaire de E dans F , soit \mathcal{B} une base de E avec $\dim(E) = p$, soit \mathcal{B}' une base de F avec $\dim(F) = n$, et soit $A = \underset{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}{\text{mat}}(f) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, on a :

Propriétés

Soit f une application linéaire de E dans F , soit \mathcal{B} une base de E avec $\dim(E) = p$, soit \mathcal{B}' une base de F avec $\dim(F) = n$, et soit $A = \underset{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}{\text{mat}}(f) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, on a :

- 1 $\text{rg}(A) \leq \min(n, p)$.
- 2 $\text{rg}(A) = n \iff f$ est surjective.
- 3 $\text{rg}(A) = p \iff f$ est injective.

Propriétés

- 1 Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ alors
 $rg(A \times B) \leq \min(rg(A), rg(B))$.
- 2 Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et A inversible, $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ alors
 $rg(A \times B) = rg(B)$.
- 3 Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et B inversible alors
 $rg(A \times B) = rg(A)$.

Introduction

Soit

$$(S) : \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Introduction

Soit

$$(S) : \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

On l'écrit $AX = B$ avec $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m1}(\mathbb{K})$. On note aussi A' la matrice complète du système.

Proposition

Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) (S) admet au moins une solution.
- (ii) $\text{rang}A' = \text{rang}A$.
- (iii) $B \in \mathcal{C}(A)$.

Notations

Soit A une matrice carrée (a_{ij}) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ($n \geq 1$). On écrit :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1*} \\ \vdots \\ a_{n*} \end{pmatrix} \text{ où } a_{i*} \text{ est la } i^{\text{ème}} \text{ ligne de la matrice.}$$

Théorème

Il existe une unique application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans \mathbb{K} , appelée déterminant et notée \det , possédant les trois propriétés suivantes :

Définition et propriétés

Théorème

Il existe une unique application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans \mathbb{K} , appelée déterminant et notée \det , possédant les trois propriétés suivantes :

(1) $\forall i = 1, \dots, n \quad \forall a_{1*}, \dots, a_{i-1*}, a_{i+1*}, \dots, a_{n*} \quad \forall \alpha$ et β de \mathbb{K} et $\forall x$ et y de \mathbb{K}^n

$$\det \begin{pmatrix} a_{1*} \\ \vdots \\ a_{i-1*} \\ \alpha x + \beta y \\ a_{i+1*} \\ \vdots \\ a_{n*} \end{pmatrix} = \alpha \det \begin{pmatrix} a_{1*} \\ \vdots \\ a_{i-1*} \\ x \\ a_{i+1*} \\ \vdots \\ a_{n*} \end{pmatrix} + \beta \det \begin{pmatrix} a_{1*} \\ \vdots \\ a_{i-1*} \\ y \\ a_{i+1*} \\ \vdots \\ a_{n*} \end{pmatrix}$$

(\det est une forme n – linéaire par rapport aux lignes)

Théorème

Il existe une unique application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans \mathbb{K} , appelée déterminant et notée \det , possédant les trois propriétés suivantes :

Théorème

Il existe une unique application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans \mathbb{K} , appelée déterminant et notée \det , possédant les trois propriétés suivantes :

(2) \det est alternée par rapport aux lignes, c'est à dire que :

$$a_{i*} = a_{j*} \text{ pour } i \neq j \implies \det \begin{pmatrix} a_{1*} \\ \vdots \\ a_{i*} \\ \vdots \\ a_{j*} \\ \vdots \\ a_{n*} \end{pmatrix} = 0.$$

(3) $\det(I_n) = 1$.

Conséquences

- La valeur de $\det A$ ne change pas si on remplace une ligne par la somme de cette ligne et d'un multiple d'une autre ligne.
- La valeur de $\det A$ est changée en son opposée si on échange deux lignes.
- La valeur de $\det A$ est multipliée par λ si on multiplie une ligne par λ , et donc $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$.

Proposition

Pour toutes matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a :

(i) $\det A \neq 0 \iff A$ régulière

(ii) $\det(AB) = \det A \cdot \det B$

(iii) $\det({}^t A) = \det A$.

Proposition

Pour toutes matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a :

(i) $\det A \neq 0 \iff A$ régulière

(ii) $\det(AB) = \det A \cdot \det B$

(iii) $\det({}^t A) = \det A$.

Conséquences

$\det({}^t A) = \det A$ montre que \det est une forme n -linéaire alternée des colonnes et $\det(AB) = \det A \cdot \det B$ montre que si A est régulière, $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$ et que $\det(ABA^{-1}) = \det B$ pour toute matrice B .

Proposition

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ($n \geq 2$). Pour tout couple (i, j) , on appelle A_{ij} la matrice de $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ obtenue en supprimant dans A la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne. On a alors :

- $\forall k = 1, 2, \dots, n \quad \det A = \sum_{l=1}^n (-1)^{l+k} a_{lk} \det A_{lk}$
(développement suivant la $k^{\text{ème}}$ colonne)
- $\forall i = 1, 2, \dots, n \quad \det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}$
(développement suivant la $i^{\text{ème}}$ ligne)

Proposition

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ($n \geq 2$). Pour tout couple (i, j) , on appelle A_{ij} la matrice de $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ obtenue en supprimant dans A la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne. On a alors :

- $\forall k = 1, 2, \dots, n \quad \det A = \sum_{l=1}^n (-1)^{l+k} a_{lk} \det A_{lk}$
(développement suivant la $k^{\text{ème}}$ colonne)
- $\forall i = 1, 2, \dots, n \quad \det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}$
(développement suivant la $i^{\text{ème}}$ ligne)

Propriété

Le déterminant d'une matrice diagonale ou triangulaire est égal au produit de ses coefficients diagonaux.

Remarque

Le scalaire $\det A_{ij}$ s'appelle le mineur de A_{ij} dans A et le scalaire $(-1)^{i+j} \det A_{ij}$ s'appelle son cofacteur. On associe à A la matrice des cofacteurs, que l'on notera $\text{cof}A$, qui vaut donc $\text{cof}A = \left((-1)^{i+j} \det A_{ij} \right)_{(i,j)}$.

Calcul du déterminant : exemples

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \times d - b \times c$$

Calcul du déterminant : exemples

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \times d - b \times c$$

Ceci ne doit pas figurer sur vos copies, c'est juste pour vous expliquer.

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = +1 \begin{vmatrix} \textcircled{1} & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ \textcircled{2} & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ \textcircled{3} & 6 & 9 \end{vmatrix}$$

Calcul du déterminant : exemples

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \times d - b \times c$$

Ceci ne doit pas figurer sur vos copies, c'est juste pour vous expliquer.

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = +1 \begin{vmatrix} \textcircled{1} & 4 & 7 \\ \text{X} & 5 & 8 \\ \text{X} & 6 & 9 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ \text{X} & 5 & 8 \\ \text{X} & 6 & 9 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ \text{X} & 6 & 9 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = 0.$$

Calcul du déterminant : exemples

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \times d - b \times c$$

Ceci ne doit pas figurer sur vos copies, c'est juste pour vous expliquer.

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = +1 \begin{vmatrix} \textcircled{1} & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ \textcircled{2} & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ \textcircled{3} & 6 & 9 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = 0.$$



La nullité du déterminant de cette matrice montre qu'elle n'est pas inversible...

Exercice

Sans calcul, montrer que $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix}$ est divisible par 17.

Proposition

Soit A une matrice carrée régulière. On a :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} {}^t(\text{cof}A)$$

Proposition

Soit A une matrice carrée régulière. On a :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} {}^t(\text{cof}A)$$

Corollaire (Formules de Cramer)

Soit $AX = B$ un système linéaire où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et X et B appartiennent à $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$. Soit B_i la matrice obtenue en remplaçant dans A la $i^{\text{ème}}$ colonne par B . Si A est régulière, les solutions x_i sont données par :

$$x_i = \frac{\det B_i}{\det A} \text{ pour } i = 1, 2, \dots, n.$$