

Notions sur les équations de récurrence linéaire à coefficients constants

Hervé Hocquard

Université de Bordeaux, France

6 septembre 2020

université
de **BORDEAUX**

LABORATOIRE
BORDELAIS
DE RECHERCHE
EN INFORMATIQUE

LaBRI

Définition

On appelle équation de récurrence linéaire d'ordre 1 à coefficients constants toute équation du type :

$$u_{t+1} + au_t = f(t)$$

où $a \in \mathbb{R}^*$ et f est une fonction à valeurs dans \mathbb{R} . Résoudre cette équation, c'est trouver toutes les suites réelles $(u_t)_{t \in \mathbb{N}}$ dont les termes vérifient l'égalité pour tout indice t .

Définition

On appelle équation de récurrence linéaire d'ordre 1 à coefficients constants toute équation du type :

$$u_{t+1} + au_t = f(t)$$

où $a \in \mathbb{R}^*$ et f est une fonction à valeurs dans \mathbb{R} . Résoudre cette équation, c'est trouver toutes les suites réelles $(u_t)_{t \in \mathbb{N}}$ dont les termes vérifient l'égalité pour tout indice t .

Exemple

$u_{t+1} = au_t$ avec $a \in \mathbb{R}^*$: on sait que les suites qui vérifient cette équation sont par définition les suites géométriques de raison a , et elles s'écrivent : $u_t = u_0 a^t$ pour tout t entier.

Définition

On appelle équation de récurrence linéaire d'ordre 2 toute équation du type :

$$u_{t+2} + au_{t+1} + bu_t = f(t)$$

où $b \in \mathbb{R}^*$ et f est une fonction à valeurs dans \mathbb{R} .

Définition

On appelle équation de récurrence linéaire d'ordre 2 toute équation du type :

$$u_{t+2} + au_{t+1} + bu_t = f(t)$$

où $b \in \mathbb{R}^*$ et f est une fonction à valeurs dans \mathbb{R} .

Remarque

On définirait de la même façon des équations de récurrence linéaire d'ordre n quelconque.

Définition

Si on a une équation de récurrence linéaire d'ordre quelconque, l'équation obtenue en supprimant le terme $f(t)$ s'appelle l'équation homogène associée.

Définition

Si on a une équation de récurrence linéaire d'ordre quelconque, l'équation obtenue en supprimant le terme $f(t)$ s'appelle l'équation homogène associée.

Proposition : Dépendance des conditions initiales

Soit $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ n réels. Il existe une unique solution u telle que $u_i = \alpha_i$ pour $i = 0, 1, \dots, n-1$.

Définition

Si on a une équation de récurrence linéaire d'ordre quelconque, l'équation obtenue en supprimant le terme $f(t)$ s'appelle l'équation homogène associée.

Proposition : Dépendance des conditions initiales

Soit $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ n réels. Il existe une unique solution u telle que $u_i = \alpha_i$ pour $i = 0, 1, \dots, n-1$.

Remarque

Une solution (c'est à dire une suite (u_t)) s'appelle parfois une trajectoire.

Proposition : Dépendance des conditions initiales

Les solutions d'une équation linéaire homogène d'ordre n forment un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension n .

Proposition : Dépendance des conditions initiales

Les solutions d'une équation linéaire homogène d'ordre n forment un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension n .

Proposition : Propriété fondamentale

On obtient toutes les solutions d'une équation de récurrence linéaire en ajoutant la solution générale de l'équation homogène associée à une solution particulière de l'équation complète.

Proposition

Soit

$$u_{t+1} = au_t + f(t)$$

une équation d'ordre 1. La solution de l'équation homogène associée est donnée par :

$$u_t = \lambda a^t \quad \text{où } \lambda \in \mathbb{R}$$

Proposition

Soit

$$u_{t+1} = au_t + f(t)$$

une équation d'ordre 1. La solution de l'équation homogène associée est donnée par :

$$u_t = \lambda a^t \quad \text{où } \lambda \in \mathbb{R}$$

Exemple

Résoudre $u_{t+1} - 7u_t = t$.

Proposition

Soit

$$u_{t+1} = au_t + f(t)$$

une équation d'ordre 1. La solution de l'équation homogène associée est donnée par :

$$u_t = \lambda a^t \quad \text{où } \lambda \in \mathbb{R}$$

Exemple

Résoudre $u_{t+1} - 7u_t = t$.

La solution de l'équation homogène $u_{t+1} - 7u_t = 0$ associée est donnée par :

$$u_t = \lambda \cdot 7^t \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}$$

Proposition

Soit

$$u_{t+1} = au_t + f(t)$$

une équation d'ordre 1. La solution de l'équation homogène associée est donnée par :

$$u_t = \lambda a^t \quad \text{où } \lambda \in \mathbb{R}$$

Remarque

Il reste à trouver une solution particulière de l'équation complète.

Proposition

Quand le second membre $f(t)$ est de la forme $r^t P(t)$ où $r \in \mathbb{R}$ et P est un polynôme :

Proposition

Quand le second membre $f(t)$ est de la forme $r^t P(t)$ où $r \in \mathbb{R}$ et P est un polynôme :

- si $r \neq a$, il existe une solution particulière qui est $r^t Q(t)$, où Q est un polynôme de même degré que P .

Les suites solutions sont donc données par :

$$u_t = \lambda a^t + r^t Q(t)$$

Proposition

Quand le second membre $f(t)$ est de la forme $r^t P(t)$ où $r \in \mathbb{R}$ et P est un polynôme :

- si $r \neq a$, il existe une solution particulière qui est $r^t Q(t)$, où Q est un polynôme de même degré que P .

Les suites solutions sont donc données par :

$$u_t = \lambda a^t + r^t Q(t)$$

- Si $r = a$, il existe une solution particulière qui est $tr^t Q(t)$, où Q est un polynôme de même degré que P .

Les suites solutions sont donc données par :

$$u_t = \lambda a^t + tr^t Q(t)$$

Exemple

Résoudre (E) : $u_{t+1} - 7u_t = t$.

Exemple

Résoudre (E) : $u_{t+1} - 7u_t = t$.

La solution de l'équation homogène $u_{t+1} - 7u_t = 0$ associée est donnée par :

$$u_t = \lambda \cdot 7^t \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}$$

Exemple

Résoudre (E) : $u_{t+1} - 7u_t = t$.

La solution de l'équation homogène $u_{t+1} - 7u_t = 0$ associée est donnée par :

$$u_t = \lambda \cdot 7^t \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}$$

Recherchons les solutions particulières de (E) de la forme $v_t = at + b$.

Exemple

Résoudre (E) : $u_{t+1} - 7u_t = t$.

La solution de l'équation homogène $u_{t+1} - 7u_t = 0$ associée est donnée par :

$$u_t = \lambda \cdot 7^t \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}$$

Recherchons les solutions particulières de (E) de la forme $v_t = at + b$.

$$\begin{aligned} v_t = at + b \text{ est solution de (E)} &\iff v_{t+1} - 7v_t = t \\ &\iff a(t+1) + b - 7(at+b) = t \\ &\iff -6at + (a-6b) = t \\ &\iff a = -\frac{1}{6} \text{ et } b = -\frac{1}{36} \\ &\iff v_t = -\frac{1}{6}t - \frac{1}{36} \end{aligned}$$

Exemple

Les solutions particulières de (E) sont les suites de la forme

$$v_t = -\frac{1}{6}t - \frac{1}{36}$$

Exemple

Les solutions particulières de (E) sont les suites de la forme

$$v_t = -\frac{1}{6}t - \frac{1}{36}$$

Les solutions de (E) sont les suites de la forme

$$u_t = \lambda \cdot 7^t - \frac{1}{6}t - \frac{1}{36} \text{ avec } \lambda \text{ réel}$$

Définition

Soit (E) : $u_{t+2} = au_{t+1} + bu_t + f(t)$ avec $b \neq 0$ et f que l'on appelle le second membre. L'équation homogène associée est l'équation :

$$(EH) : u_{t+2} = au_{t+1} + bu_t$$

Définition

Soit (E) : $u_{t+2} = au_{t+1} + bu_t + f(t)$ avec $b \neq 0$ et f que l'on appelle le second membre. L'équation homogène associée est l'équation :

$$(EH) : u_{t+2} = au_{t+1} + bu_t$$

Définition

On appelle équation caractéristique associée à (EH) ou à (E) l'équation d'inconnue $r \in \mathbb{R}$ définie par :

$$r^2 = ar + b \iff r^2 - ar - b = 0$$

Proposition

Soit $r^2 - ar - b = 0$ l'équation caractéristique associée à (EH).
Alors :

Proposition

Soit $r^2 - ar - b = 0$ l'équation caractéristique associée à (EH).

Alors :

- Si l'équation caractéristique a deux racines distinctes r_1 et r_2 dans \mathbb{R} , les solutions de (EH) sont les suites données par : $u_t = \lambda_1 r_1^t + \lambda_2 r_2^t$ où λ_1 et λ_2 sont deux éléments de \mathbb{R} quelconques.

Proposition

Soit $r^2 - ar - b = 0$ l'équation caractéristique associée à (EH).

Alors :

- Si l'équation caractéristique a deux racines distinctes r_1 et r_2 dans \mathbb{R} , les solutions de (EH) sont les suites données par : $u_t = \lambda_1 r_1^t + \lambda_2 r_2^t$ où λ_1 et λ_2 sont deux éléments de \mathbb{R} quelconques.
- Si l'équation caractéristique a une solution double r_1 dans \mathbb{R} , les solutions de (EH) sont les suites données par : $u_t = (\lambda_1 t + \lambda_2) r_1^t$ où λ_1 et λ_2 sont deux éléments de \mathbb{R} quelconques.

Remarque

Cette proposition règle le problème dans le cas où l'équation caractéristique admet des racines réelles. Mais si son discriminant est strictement négatif, elle n'admet aucune racine réelle mais deux racines complexes conjuguées z_1 et \bar{z}_1 . On montre qu'alors, les suites réelles solutions de (EH) sont les suites données par :

Remarque

Cette proposition règle le problème dans le cas où l'équation caractéristique admet des racines réelles. Mais si son discriminant est strictement négatif, elle n'admet aucune racine réelle mais deux racines complexes conjuguées z_1 et \bar{z}_1 . On montre qu'alors, les suites réelles solutions de (EH) sont les suites données par :

Proposition

$$u_t = |z_1|^t (\lambda_1 \cos t\theta + \lambda_2 \sin t\theta)$$

où $\theta = \arg(z_1) (2\pi)$ et λ_1 et λ_2 sont deux réels quelconques.

Proposition

Soit (1) : $u_{t+2} = au_{t+1} + bu_t + f(t)$ une équation de récurrence linéaire d'ordre 2. On suppose que le second membre $f(t)$ est de la forme $f(t) = r^t P(t)$ où $r \in \mathbb{R}$ et P est un polynôme. L'équation (1) admet alors une solution (v_t) qui est de la forme :

- $v_t = r^t Q(t)$ si r n'est pas solution de l'équation caractéristique

Proposition

Soit (1) : $u_{t+2} = au_{t+1} + bu_t + f(t)$ une équation de récurrence linéaire d'ordre 2. On suppose que le second membre $f(t)$ est de la forme $f(t) = r^t P(t)$ où $r \in \mathbb{R}$ et P est un polynôme. L'équation (1) admet alors une solution (v_t) qui est de la forme :

- $v_t = r^t Q(t)$ si r n'est pas solution de l'équation caractéristique
- $v_t = tr^t Q(t)$ si r est racine simple de l'équation caractéristique

Proposition

Soit (1) : $u_{t+2} = au_{t+1} + bu_t + f(t)$ une équation de récurrence linéaire d'ordre 2. On suppose que le second membre $f(t)$ est de la forme $f(t) = r^t P(t)$ où $r \in \mathbb{R}$ et P est un polynôme. L'équation (1) admet alors une solution (v_t) qui est de la forme :

- $v_t = r^t Q(t)$ si r n'est pas solution de l'équation caractéristique
- $v_t = tr^t Q(t)$ si r est racine simple de l'équation caractéristique
- $v_t = t^2 r^t Q(t)$ si r est racine double de l'équation caractéristique

avec, dans tous les cas, Q qui est un polynôme de même degré que P .

Exercice

Résoudre l'équation de récurrence suivante en exprimant les solutions en fonction des deux premiers termes u_0 et u_1 :

$$u_{t+2} - 2u_{t+1} + 4u_t = 2t - 1 \quad u_0 = 0 \quad u_1 = 3 \quad \text{avec } v_t = at + b$$

Exercice

Résoudre l'équation de récurrence suivante en exprimant les solutions en fonction des deux premiers termes u_0 et u_1 :

$$u_{t+2} - 2u_{t+1} + 4u_t = 2t - 1 \quad u_0 = 0 \quad u_1 = 3 \quad \text{avec } v_t = at + b$$

$$(E) : u_{t+2} - 2u_{t+1} + 4u_t = 2t - 1$$

$$(EH) : u_{t+2} - 2u_{t+1} + 4u_t = 0$$

$$(EC) : r^2 - 2r + 4 = 0 \iff r = 1 - \sqrt{3}i \text{ ou } r = 1 + \sqrt{3}i \\ \iff r = 2e^{-i\frac{\pi}{3}} \text{ ou } r = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$$

Les solutions de (EH) sont les suites de la forme

$$u_t = 2^t \left(\lambda_1 \cos\left(\frac{\pi}{3}t\right) + \lambda_2 \sin\left(\frac{\pi}{3}t\right) \right) \text{ avec } \lambda_1 \text{ et } \lambda_2 \text{ réels}$$

Exercice

Recherchons les solutions particulières de (E) de la forme $v_t = at + b$.

Exercice

Recherchons les solutions particulières de (E) de la forme $v_t = at + b$.

$$\begin{aligned}v_t = at + b \text{ est solution de (E)} &\iff v_{t+2} - 2v_{t+1} + 4v_t = 2t - 1 \\ &\iff 3at + 3b = 2t - 1 \\ &\iff a = \frac{2}{3} \text{ et } b = -\frac{1}{3} \\ &\iff v_t = \frac{2}{3}t - \frac{1}{3}\end{aligned}$$

Les solutions de (E) sont les suites de la forme

$$u_t = 2^t \left(\lambda_1 \cos\left(\frac{\pi}{3}t\right) + \lambda_2 \sin\left(\frac{\pi}{3}t\right) \right) + \frac{2}{3}t - \frac{1}{3} \text{ avec } \lambda_1 \text{ et } \lambda_2 \text{ réels}$$

Exercice

En considérant u_0 et u_1 on obtient :

$$u_t = 2^t \left(\frac{1}{3} \cos\left(\frac{\pi}{3}t\right) + \frac{7\sqrt{3}}{9} \sin\left(\frac{\pi}{3}t\right) \right) + \frac{2}{3}t - \frac{1}{3}$$

Définition

Soit (1) : $u_{t+n} = a_{n-1}u_{t+n-1} + a_{n-2}u_{t+n-2} + \dots + a_0u_t + f(t)$ une équation de récurrence linéaire à coefficients constants d'ordre n . On appelle équilibre toute suite stationnaire solution de (1).

Définition

Soit (1) : $u_{t+n} = a_{n-1}u_{t+n-1} + a_{n-2}u_{t+n-2} + \dots + a_0u_t + f(t)$ une équation de récurrence linéaire à coefficients constants d'ordre n . On appelle équilibre toute suite stationnaire solution de (1).

Remarque

Il est clair qu'il ne peut y avoir d'équilibre que si f est une fonction constante. Supposons que $f(t) = c$ une constante. Un équilibre x_e est alors solution de :

$$x_e = a_{n-1}x_e + \dots + a_0x_e + c \Leftrightarrow x_e(1 - a_{n-1} - \dots - a_0) = c$$

Remarque

$$x_e = a_{n-1}x_e + \dots + a_0x_e + c \Leftrightarrow x_e(1 - a_{n-1} - \dots - a_0) = c$$

Plusieurs cas se présentent :

- Si $(1 - a_{n-1} - \dots - a_0) \neq 0$, il existe un seul équilibre
 $x_e = c / (1 - a_{n-1} - \dots - a_0)$
- Si $(1 - a_{n-1} - \dots - a_0) = 0$, deux cas possibles :
 - Si $c = 0$, tout réel est un équilibre
 - Si $c \neq 0$, il n'y a pas d'équilibre.

Définition

On dit que le processus décrit par l'équation est globalement stable si toutes les trajectoires sont convergentes.

Définition

On dit que le processus décrit par l'équation est globalement stable si toutes les trajectoires sont convergentes.

Si toutes les trajectoires convergent vers le même équilibre (ce qui implique qu'il est le seul équilibre), on dit que l'équilibre est globalement stable.

Définition

On dit que le processus décrit par l'équation est globalement stable si toutes les trajectoires sont convergentes.

Si toutes les trajectoires convergent vers le même équilibre (ce qui implique qu'il est le seul équilibre), on dit que l'équilibre est globalement stable.

Si x_e est un équilibre, on définit l'ensemble de stabilité de x_e comme étant le sous ensemble S_{x_e} de \mathbb{R}^n formé des conditions initiales pour lesquelles les trajectoires convergent vers x_e .

Définition

On dit que le processus décrit par l'équation est globalement stable si toutes les trajectoires sont convergentes.

Si toutes les trajectoires convergent vers le même équilibre (ce qui implique qu'il est le seul équilibre), on dit que l'équilibre est globalement stable.

Si x_e est un équilibre, on définit l'ensemble de stabilité de x_e comme étant le sous ensemble S_{x_e} de \mathbb{R}^n formé des conditions initiales pour lesquelles les trajectoires convergent vers x_e .

Exemple : ensemble de stabilité

Déterminer l'ensemble de stabilité de l'équilibre de l'équation suivante :

$$(E) : u_{t+2} + \frac{3}{2}u_{t+1} - u_t = 0$$

Proposition

Soit z un complexe, $t \in \mathbb{N}$ et θ un réel. Alors les z^t , $t^k z^t$ et $|z|^t \cos \theta t$ convergent vers 0 ssi $|z| < 1$.

Proposition

Soit z un complexe, $t \in \mathbb{N}$ et θ un réel. Alors les z^t , $t^k z^t$ et $|z|^t \cos \theta t$ convergent vers 0 ssi $|z| < 1$.

Proposition

Soit $x_{t+2} = ax_{t+1} + bx_t$ une équation de récurrence linéaire d'ordre 1 ou 2 (1 si $b = 0$). Alors l'équilibre est globalement stable ssi toutes les racines de l'équation caractéristique sont de module strictement inférieur à 1.

Proposition

Soit z un complexe, $t \in \mathbb{N}$ et θ un réel. Alors les z^t , $t^k z^t$ et $|z|^t \cos \theta t$ convergent vers 0 ssi $|z| < 1$.

Proposition

Soit $x_{t+2} = ax_{t+1} + bx_t$ une équation de récurrence linéaire d'ordre 1 ou 2 (1 si $b = 0$). Alors l'équilibre est globalement stable ssi toutes les racines de l'équation caractéristique sont de module strictement inférieur à 1.

Proposition

Soit $P(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b$ un polynôme du second degré à coefficients réels. Alors les modules de ses racines (réelles ou complexes) sont strictement inférieurs à 1 ssi $P(1) > 0$, $P(-1) > 0$ et $|b| < 1$.

Exercice

C_t désigne la consommation durant la période t , Y_t le revenu durant cette période et I_t l'investissement pendant cette période. On suppose que :

$$\begin{cases} C_t = -2Y_{t-1} \\ I_t = -2(C_t - C_{t-1}) + I \end{cases}$$

où I est une constante (investissement autonome).

- 1 En utilisant la relation $Y_t = C_t + I_t$, montrer que la suite (Y_t) est solution de l'équation de récurrence :

$$Y_t - 2Y_{t-1} + 4Y_{t-2} = I$$

- 2 Montrer que cette équation admet une solution constante.
- 3 Ecrire la solution générale de cette équation.
- 4 Déterminer le comportement asymptotique de (Y_t) .