

Lois discrètes

H. Hocquard

HSE 2016-2017

université
de **BORDEAUX**



Définition

Une variable aléatoire est une application de l'univers Ω dans \mathbb{R}

$$\begin{aligned} X &: \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\longmapsto X(\omega) \end{aligned}$$

Définition

Une variable aléatoire est une application de l'univers Ω dans \mathbb{R}

$$\begin{aligned} X &: \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\longmapsto X(\omega) \end{aligned}$$

Remarque

Une variable aléatoire est généralement désignée par une lettre majuscule X , Y , etc. La variable aléatoire est dite discrète si l'ensemble $X(\Omega)$ est discret, c'est-à-dire qu'il ne prend que des valeurs ponctuelles, isolées, typiquement \mathbb{N} ou \mathbb{Z} .

Exemples

- Le résultat d'un lancé de dé. On a alors,

Exemples

- Le résultat d'un lancé de dé. On a alors,

$$X(\Omega) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Exemples

- Le résultat d'un lancé de dé. On a alors,

$$X(\Omega) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

- Soit le jeu consistant à lancer une pièce et gagner 1 euro si pile, rien sinon. Soit X = le gain à l'issue d'un lancé.

Exemples

- Le résultat d'un lancé de dé. On a alors,

$$X(\Omega) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

- Soit le jeu consistant à lancer une pièce et gagner 1 euro si pile, rien sinon. Soit X = le gain à l'issue d'un lancé.

$$X : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$$

Exemples

- Le résultat d'un lancé de dé. On a alors,

$$X(\Omega) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

- Soit le jeu consistant à lancer une pièce et gagner 1 euro si pile, rien sinon. Soit X = le gain à l'issue d'un lancé.

$$X : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$$

- Le nombre de piles obtenus sur 4 lancers d'une pièce.

Exemples

- Le résultat d'un lancé de dé. On a alors,

$$X(\Omega) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

- Soit le jeu consistant à lancer une pièce et gagner 1 euro si pile, rien sinon. Soit X = le gain à l'issue d'un lancé.

$$X : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$$

- Le nombre de piles obtenus sur 4 lancers d'une pièce.

$$X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, 4\}.$$

Définition

On appelle loi d'une v.a discrète la donnée de tous les $\mathbb{P}(X = x_i)$ lorsque x_i prend toutes les valeurs possibles dans $X(\Omega)$.

Définition

On appelle loi d'une v.a discrète la donnée de tous les $\mathbb{P}(X = x_i)$ lorsque x_i prend toutes les valeurs possibles dans $X(\Omega)$.

Remarque

On note invariablement $\mathbb{P}[\{X = x\}]$, $\mathbb{P}[X = x]$, $\mathbb{P}(X = x)$, ou parfois $\mathbb{P}_X(x)$ pour la probabilité que X prenne la valeur x .

Remarque

Donner la loi d'une variable aléatoire revient alors à donner les probabilités des évènements élémentaires qu'elle induit, et on présente souvent ces données sous forme d'un tableau. En notant d'une manière générale $X(\Omega) = (x_i)_{i=1,\dots,N} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ pour une variable aléatoire à N valeurs possibles (qui ne sont pas forcément $1, 2, \dots, N$), on a :

x_i	x_1	x_2	\dots	x_N
$\mathbb{P}(X = x_i)$	p_1	p_2	\dots	p_N

où l'on note respectivement $p_1 = \mathbb{P}(X = x_1)$, $p_2 = \mathbb{P}(X = x_2)$, \dots , $p_N = \mathbb{P}(X = x_N)$.

Définition

- On appelle **fonction de répartition** de X la fonction F définie par $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$.

Définition

- On appelle **fonction de répartition** de X la fonction F définie par $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$.
- F est une fonction croissante vérifiant :

Définition

- On appelle **fonction de répartition** de X la fonction F définie par $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$.
- F est une fonction croissante vérifiant :
 - ① Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(X > a) = 1 - P(X \leq a) = 1 - F(a)$.

Définition

- On appelle **fonction de répartition** de X la fonction F définie par $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$.
- F est une fonction croissante vérifiant :
 - 1 Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(X > a) = 1 - \mathbb{P}(X \leq a) = 1 - F(a)$.
 - 2 $\mathbb{P}(a < X \leq b) = \mathbb{P}(X \leq b) - \mathbb{P}(X \leq a) = F(b) - F(a)$.

Définition

- On appelle **fonction de répartition** de X la fonction F définie par $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$.
- F est une fonction croissante vérifiant :
 - 1 Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(X > a) = 1 - \mathbb{P}(X \leq a) = 1 - F(a)$.
 - 2 $\mathbb{P}(a < X \leq b) = \mathbb{P}(X \leq b) - \mathbb{P}(X \leq a) = F(b) - F(a)$.
- $F(x) = \sum_{x_i \leq x} \mathbb{P}(X = x_i)$.

Définition

L'**espérance mathématique** $\mathbb{E}[X]$ d'une variable aléatoire X joue le rôle dévolu à la moyenne en statistiques : elle correspond à la valeur moyenne espérée par un observateur lors d'une réalisation de la variable aléatoire X . On a :

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^N p_i \cdot x_i = \sum_{i=1}^N x_i \cdot \mathbb{P}[X = x_i]$$

lorsque X peut prendre N valeurs différentes x_1, \dots, x_N avec comme probabilités élémentaires $p_i = \mathbb{P}[X = x_i]$.

Introduction

L'espérance $\mathbb{E}[X]$ n'est qu'un indicateur moyen et ne peut caractériser la loi une variable aléatoire à lui tout seul.

Introduction

L'espérance $\mathbb{E}[X]$ n'est qu'un indicateur moyen et ne peut caractériser la loi d'une variable aléatoire à lui tout seul.

Pour décrire plus précisément le comportement de X , sans pour autant caractériser complètement la loi de X , on peut s'intéresser aux écarts de X par rapport à cette moyenne. Cependant, si on considère simplement la différence $X - \mathbb{E}[X]$, on obtient un écart moyen $\mathbb{E}[X - \mathbb{E}[X]] = 0$ (par linéarité de l'espérance).

Introduction

L'espérance $\mathbb{E}[X]$ n'est qu'un indicateur moyen et ne peut caractériser la loi d'une variable aléatoire à lui tout seul.

Pour décrire plus précisément le comportement de X , sans pour autant caractériser complètement la loi de X , on peut s'intéresser aux écarts de X par rapport à cette moyenne. Cependant, si on considère simplement la différence $X - \mathbb{E}[X]$, on obtient un écart moyen $\mathbb{E}[X - \mathbb{E}[X]] = 0$ (par linéarité de l'espérance).

On pourrait considérer la valeur moyenne de $|X - \mathbb{E}[X]|$ mais on préfère considérer la moyenne de $(X - \mathbb{E}[X])^2$, plus pertinente mathématiquement.

Définition

La **variance** mesure ainsi la déviation moyenne autour de la moyenne espérée $\mathbb{E}[X]$, et est définie par

$$V[X] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \sum_{i=1}^N p_i \cdot (x_i - \mathbb{E}[X])^2.$$

Définition

La **variance** mesure ainsi la déviation moyenne autour de la moyenne espérée $\mathbb{E}[X]$, et est définie par

$$V[X] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \sum_{i=1}^N p_i \cdot (x_i - \mathbb{E}[X])^2.$$

Remarque

Elle est toujours positive puisqu'il s'agit de l'espérance d'un carré.

Définition

La **variance** mesure ainsi la déviation moyenne autour de la moyenne espérée $\mathbb{E}[X]$, et est définie par

$$V[X] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \sum_{i=1}^N p_i \cdot (x_i - \mathbb{E}[X])^2.$$

Remarque

Elle est toujours positive puisqu'il s'agit de l'espérance d'un carré.

Définition

Autre expression de la variance :

$$V(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = \sum_{i=1}^N x_i^2 p_i - (\mathbb{E}[X])^2.$$

Définition

*Pour mesurer la dispersion d'une variable aléatoire X , on considère souvent en statistiques **l'écart-type**, lié à la variance par :*

$$\sigma_X = \sigma = \sqrt{V(X)}.$$

Linéarité de l'espérance

Si X et Y sont deux variables aléatoires définies sur le même univers Ω et a, b deux réels,

$$\mathbb{E}[aX + bY] = a\mathbb{E}[X] + b\mathbb{E}[Y].$$

En particulier, $\mathbb{E}[aX] = a\mathbb{E}[X]$.

Linéarité de l'espérance

Si X et Y sont deux variables aléatoires définies sur le même univers Ω et a, b deux réels,

$$\mathbb{E}[aX + bY] = a\mathbb{E}[X] + b\mathbb{E}[Y].$$

En particulier, $\mathbb{E}[aX] = a\mathbb{E}[X]$.

Non-linéarité de la variance

Pour toute variable aléatoire X et $a, b \in \mathbb{R}$

$$V(aX + b) = a^2 V(X).$$

Linéarité de l'espérance

Si X et Y sont deux variables aléatoires définies sur le même univers Ω et a, b deux réels,

$$\mathbb{E}[aX + bY] = a\mathbb{E}[X] + b\mathbb{E}[Y].$$

En particulier, $\mathbb{E}[aX] = a\mathbb{E}[X]$.

Non-linéarité de la variance

Pour toute variable aléatoire X et $a, b \in \mathbb{R}$

$$V(aX + b) = a^2 V(X).$$

Variance de variables aléatoires indépendantes

Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes définies sur le même univers Ω alors $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$.

Proposition : Inégalité de Markov

Soit X une variable aléatoire positive d'espérance finie, alors pour tout $a > 0$

$$\mathbb{P}[X \geq a] \leq \frac{1}{a} \mathbb{E}[X].$$

Proposition : Inégalité de Markov

Soit X une variable aléatoire positive d'espérance finie, alors pour tout $a > 0$

$$\mathbb{P}[X \geq a] \leq \frac{1}{a} \mathbb{E}[X].$$

Proposition : Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Soit X une variable aléatoire réelle de variance finie, alors pour tout $a > 0$

$$\mathbb{P}[|X - \mathbb{E}[X]| \geq a] \leq \frac{1}{a^2} V(X).$$

Elle modélise des situations d'équiprobabilités.

Définition

*On dit qu'une variable aléatoire X suit une **loi uniforme discrète** lorsqu'elle prend ses valeurs dans $\{1, \dots, n\}$ avec des probabilités élémentaires identiques. Puisque la somme de ces dernières doit valoir 1, on en déduit qu'elles doivent toutes être égales à $1/n$:*

$$\forall k = 1 \dots n, \mathbb{P}[X = k] = \frac{1}{n}.$$

Espérance et variance

On calcule aisément

$$\mathbb{E}[X] = \frac{n+1}{2},$$
$$V(X) = \frac{n^2-1}{12}.$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= 1 \cdot \frac{1}{n} + 2 \cdot \frac{1}{n} + 3 \cdot \frac{1}{n} + \cdots + n \cdot \frac{1}{n}, \\ &= \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n k, \\ &= \frac{1}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2}, \\ &= \frac{n+1}{2}.\end{aligned}$$

$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ est la somme des premiers termes d'une suite arithmétique de raison 1 de premier terme 1.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X^2] &= 1^2 \cdot \frac{1}{n} + 2^2 \cdot \frac{1}{n} + 3^2 \cdot \frac{1}{n} + \cdots + n^2 \cdot \frac{1}{n}, \\ &= \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n k^2, \\ &= \frac{1}{n} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \\ &= \frac{(n+1)(2n+1)}{6}.\end{aligned}$$

$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ est un résultat classique qui se démontre par récurrence.

Ainsi,

$$\begin{aligned}V[X] &= \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2, \\&= \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{4}, \\&= (n+1) \left[\frac{2n+1}{6} - \frac{n+1}{4} \right], \\&= (n+1) \left[\frac{4n+2-3n-3}{12} \right], \\&= (n+1) \frac{n-1}{12}, \\&= \frac{n^2-1}{12}.\end{aligned}$$

Exemple

X = résultat d'un jet de dé à six faces non-pipé.

Les $n = 6$ modalités possibles, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 4$, $x_5 = 5$, $x_6 = 6$, ont toutes pour probabilité élémentaire $1/6$:

$$\forall k = 1 \dots 6, \mathbb{P}[X = k] = \frac{1}{6}$$

et on peut calculer $\mathbb{E}[X] = \frac{7}{2}$; $V[X] = \frac{35}{12}$.

Définition

Cette loi est celle de toute variable aléatoire X modélisant une expérience dont l'issue ne possède que deux alternatives de type "succès ou échec", "vrai ou faux", "marche ou arrêt", "pile ou face", etc. Un succès est représenté par l'évènement $\{X = 1\}$ tandis que $\{X = 0\}$ correspond à un échec $X(\Omega) = \{0; 1\}$. Puisqu'on a $\mathbb{P}[X = 0] = 1 - \mathbb{P}[X = 1]$, la loi de X ne dépend que d'un paramètre (la probabilité de type succès) ; on parle alors de la *loi de Bernoulli de paramètre p* caractérisée par

$$\mathbb{P}[X = 1] = p,$$

$$\mathbb{P}[X = 0] = 1 - p.$$

Exemple

On joue au Pile ou Face

Exemple

On joue au Pile ou Face avec proba p de tomber sur Pile (et donc $1 - p$ de tomber sur Face).

Exemple

On joue au Pile ou Face avec proba p de tomber sur Pile (et donc $1 - p$ de tomber sur Face).

Soit

$$X = \begin{cases} 1 & \text{si on obtient Pile} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exemple

On joue au Pile ou Face avec proba p de tomber sur Pile (et donc $1 - p$ de tomber sur Face).

Soit

$$X = \begin{cases} 1 & \text{si on obtient Pile} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

alors X suit une Bernoulli(p).

Espérance et variance

$$\mathbb{E}[X] = p,$$

$$V[X] = p(1 - p).$$

Définition

La **loi binomiale** est la loi de probabilité d'une variable aléatoire représentant une série d'épreuves de Bernoulli possédant les propriétés suivantes :

- 1 Chaque épreuve donne lieu à deux éventualités exclusives de probabilités constantes p et $q = 1 - p$.
- 2 Les épreuves répétées sont *indépendantes* les unes des autres.
- 3 La variable aléatoire X correspondante prend pour valeur le nombre de succès dans une suite de n épreuves.

Définition-Vocabulaire

Cette loi est donc caractérisée par deux paramètres : n et p .

Définition-Vocabulaire

Cette loi est donc caractérisée par deux paramètres : n et p . Lors d'une telle expérience, on dit que X suit une *binomiale* $\mathcal{B}(n, p)$, à valeurs dans $X(\Omega) = \{0, 1, 2, \dots, n\}$.

Exemple

On joue n fois au Pile ou Face.

Exemple

On joue n fois au Pile ou Face. Pour $1 \leq i \leq n$, on pose

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si on obtient Pile} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{au } i^{\text{ème}} \text{ lancé.}$$

Exemple

On joue n fois au Pile ou Face. Pour $1 \leq i \leq n$, on pose

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si on obtient Pile} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{au } i^{\text{ème}} \text{ lancé.}$$

Soit Y le nombre de "Pile" obtenus au cours des n lancers indépendants de la pièce.

Exemple

On joue n fois au Pile ou Face. Pour $1 \leq i \leq n$, on pose

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si on obtient Pile} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{au } i^{\text{ème}} \text{ lancé.}$$

Soit Y le nombre de "Pile" obtenus au cours des n lancers indépendants de la pièce.

Alors,

$$Y = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

et Y suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

Théorème

Si Y peut s'écrire :

$$Y = X_1 + \cdots + X_k + \cdots + X_n$$

où les X_k sont des variables aléatoires de Bernoulli indépendantes de paramètre p , correspondant au succès d'une seule épreuve de Pile ou Face. Alors Y suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

Méthode

Pour déterminer les probabilités des événements élémentaires d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale, il nous faut tout d'abord déterminer le nombre de possibilités d'obtenir k succès au cours de n épreuves.

Méthode

Pour déterminer les probabilités des événements élémentaires d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale, il nous faut tout d'abord déterminer le nombre de possibilités d'obtenir k succès au cours de n épreuves.

Il s'agit de déterminer le nombre de *combinaisons* (non ordonnées) de k objets pris parmi n , avec bien sûr $k \leq n$. Les combinaisons sont non ordonnées car seul importe d'avoir k objets (succès pour nous) et non pas à quel(s) tirage(s) ces succès ont eu lieu. On connaît le nombre de possibilités de k succès et n échecs (C_n^k), il suffit de les multiplier par les probabilités de succès et d'échec pour obtenir la loi binomiale. On a donc...

Propriétés

Les probabilités élémentaires d'une variable aléatoire X suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ sont données pour tout nombre de succès $k = 1 \dots n$ par :

$$\mathbb{P}[X = k] = C_n^k \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}.$$

Remarque

On a bien, en utilisant la formule du binôme,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \mathbb{P}[X = k] &= \sum_{k=0}^n C_n^k \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Espérance et variance

$$\mathbb{E}[X] = np,$$

$$V[X] = np(1 - p).$$

Loi binomiale : paramètres (preuve)

On a l'écriture $X = X_1 + X_2 + \dots + X_k + \dots + X_n$, où les X_k sont n variables aléatoires de Bernoulli *indépendantes*. On a en effet par linéarité de l'espérance

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X_1] + \mathbb{E}[X_2] + \dots + \mathbb{E}[X_k] + \dots + \mathbb{E}[X_n] = n \cdot \mathbb{E}[X_1] = n \cdot p$$

et par **indépendance** des variables aléatoires $(X_k)_{k=1\dots n}$

$$V[X] = V[X_1] + V[X_2] + \dots + V[X_k] + \dots + V[X_n] = n \cdot V[X_1] = n \cdot p \cdot (1-p)$$

Introduction

Cette loi peut modéliser les évènements rares. Par exemple, elle peut modéliser le nombre d'appels reçus par un standard téléphonique, le nombre de voyageurs se présentant à un guichet dans la journée, etc. Elle s'exprime à l'aide de la fonction exponentielle et dépend d'un paramètre $\lambda > 0$, qui correspond au nombre moyen d'occurrence du phénomène observé pendant la durée donnée. Plus formellement :

Introduction

Cette loi peut modéliser les évènements rares. Par exemple, elle peut modéliser le nombre d'appels reçus par un standard téléphonique, le nombre de voyageurs se présentant à un guichet dans la journée, etc. Elle s'exprime à l'aide de la fonction exponentielle et dépend d'un paramètre $\lambda > 0$, qui correspond au nombre moyen d'occurrence du phénomène observé pendant la durée donnée. Plus formellement :

Définition

Une variable aléatoire X suit une **loi de Poisson de paramètre** $\lambda > 0$, notée $\mathcal{P}(\lambda)$ lorsque $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{P}[X = k] = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

Espérance et variance

$$\mathbb{E}[X] = \lambda,$$

$$V[X] = \lambda.$$

Espérance et variance

$$\mathbb{E}[X] = \lambda,$$

$$V[X] = \lambda.$$

Exercice

Démontrer ce résultat.

Exemple

Si on sait qu'en général un standard téléphonique reçoit 20 appels dans la journée et que l'on peut modéliser le nombre aléatoire d'appels par une loi de Poisson, on pourra calculer la probabilité d'avoir k appels, pour tout k , à l'aide des formules données par une loi de Poisson $\mathcal{P}(20)$.

Exemple

Si on sait qu'en général un standard téléphonique reçoit 20 appels dans la journée et que l'on peut modéliser le nombre aléatoire d'appels par une loi de Poisson, on pourra calculer la probabilité d'avoir k appels, pour tout k , à l'aide des formules données par une loi de Poisson $\mathcal{P}(20)$.

Remarque

Dans la pratique, des tables donnant les probabilités élémentaires pour différentes valeurs du paramètre sont disponibles et peuvent être utilisées.

Théorème

Soit X_n des v.a telle que $X_n \sim \mathcal{B}(n, p_n)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\lambda)$ alors pour tout $0 \leq k \leq n$,

$$\text{si } \lim_{n \rightarrow +\infty} np_n = \lambda,$$

Théorème

Soit X_n des v.a telle que $X_n \sim \mathcal{B}(n, p_n)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\lambda)$ alors pour tout $0 \leq k \leq n$,

$$\text{si } \lim_{n \rightarrow +\infty} np_n = \lambda, \text{ alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X_n = k) = \mathbb{P}(Y = k)$$

Théorème

Soit X_n des v.a telle que $X_n \sim \mathcal{B}(n, p_n)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\lambda)$ alors pour tout $0 \leq k \leq n$,

$$\text{si } \lim_{n \rightarrow +\infty} np_n = \lambda, \text{ alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X_n = k) = \mathbb{P}(Y = k)$$

On dit que X_n converge en loi vers la loi de Poisson et on écrit :

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} Y$$

On a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_n = k) &= C_n^k p_n^k (1 - p_n)^{n-k} \\ &= \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \frac{p_n^k}{(1-p_n)^k} (1-p_n)^n \\ &\approx \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} \frac{\lambda^k}{k!} \frac{1}{(1-\frac{\lambda}{n})^k} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \\ &\approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}\end{aligned}$$

Utilisation pratique de cette approximation

Si X suit une *Binomiale*(n, p), avec n grand ($n \geq 30$) et p petit ($p \leq 0,1$).

Utilisation pratique de cette approximation

Si X suit une *Binomiale*(n, p), avec n grand ($n \geq 30$) et p petit ($p \leq 0,1$).

Alors,

$$\text{pour tout } k \geq 0, \quad \mathbb{P}(X = k) \simeq \mathbb{P}(Y = k),$$

où Y suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = n \times p$.

Approximation d'une Binomiale par une Poisson

Utilisation pratique de cette approximation

Si X suit une *Binomiale*(n, p), avec n grand ($n \geq 30$) et p petit ($p \leq 0,1$).

Alors,

$$\text{pour tout } k \geq 0, \quad \mathbb{P}(X = k) \simeq \mathbb{P}(Y = k),$$

où Y suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = n \times p$.

Concrètement, on s'autorise donc l'approximation suivante :

$$\mathbb{P}(X = k) \simeq \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$



Walter Apple

Probabilités pour les non-probabilistes

H&K, édition, 2013



Clément Rau

<http://www.math.univ-toulouse.fr/rau/>

Communication privée, 2015