

Épisode II : Probabilités élémentaires

EXERCICE 1

A, B, C sont trois évènements d'un univers Ω . Écrire, à l'aide des symboles réunion, intersection et complémentaire les évènements suivants :

- aucun n'est réalisé.
- un seul est réalisé.
- les trois sont réalisés.
- au plus deux d'entre eux sont réalisés.

EXERCICE 2

On lance une pièce équilibrée 20 fois de suite. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement 10 fois "Pile" ?

EXERCICE 3

Les trois mousquetaires (qui, comme chacun sait, étaient 4) ont mélangé leurs bottes dans le couloir de l'auberge, après une soirée mouvementée. Athos se lève le premier et prend deux bottes au hasard.

Calculer la probabilité pour que :

- les deux bottes soient à lui.
- les deux bottes forment une paire.
- les deux bottes soient deux pieds gauches.

EXERCICE 4

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), p)$ un espace probabilisé. Deux évènements incompatibles peuvent-ils être indépendants ?

EXERCICE 5

Il y a quelques années, le slogan pour le loto de la Française des Jeux était : "100% des gagnants ont tenté leur chance". Comment traduire ce slogan en terme de probabilité conditionnelle ?

Pourquoi cette phrase n'apporte-t-elle aucune information ?

EXERCICE 6

Un problème de test (les apparences peuvent être trompeuses). On dispose d'un test destiné à dépister une maladie dans une population où 1 personne sur mille est atteinte. Ce test n'est évidemment pas fiable à 100%. Des études statistiques ont montré que si la personne était malade, le test donnait un résultat positif dans 99% des cas, et que si la personne n'était pas atteinte, le test donnait malgré tout un résultat positif dans 2% des cas. Diriez-vous que ce test est satisfaisant ? Mettons cela en forme. Précisez l'univers Ω et la probabilité qui y est définie. Appelez T^+ , T^- et M les évènements le test est positif, négatif et la personne est atteinte de la maladie. Exprimez, à l'aide de probabilités et de probabilités conditionnelles les données de l'énoncé. Calculer alors la probabilité qu'une personne soit malade alors que son test est positif. Le test vous paraît-il toujours aussi satisfaisant ? En fait, $p(T^+/\overline{M})$ est trop élevé. Refaites les calculs pour un test qui a les mêmes performances quand la personne est atteinte, mais qui ne donne un résultat positif quand la personne n'est pas atteinte que dans 0.01% des cas.

EXERCICE 7

400 étudiants sont répartis dans deux amphithéâtres pour passer un examen d'économie. On en compte 150 dans l'amphi 400 et 250 dans l'amphi 600. Les surveillants ont relevé le pourcentage de copies blanches dans les deux amphis : 4 % en 400 et 6 % en 600. Les copies sont regroupées et remises au correcteur, qui en prend une au hasard et qui constate qu'elle est blanche. Quelle est la probabilité qu'elle provienne de l'amphi 400 ?

EXERCICE 8

Une urne contient une boule blanche et une noire. On effectue des tirages avec remise dans cette urne, jusqu'à obtenir une boule blanche, en ajoutant une boule noire après chaque tirage d'une boule noire. Quelle est la probabilité d'effectuer n tirages ?