

Épisode III : Variables aléatoires discrètes

EXERCICE 1

1. X suit la loi $\mathcal{B}(20; 0.2)$. Calculer $\mathbb{P}(X \leq 5)$, $\mathbb{P}(X < 12)$, $\mathbb{P}(X \geq 4)$.
2. X suit $\mathcal{B}(n; p)$. Quelle est la loi suivie par $n - X$? En déduire $\mathbb{P}(X \leq 5)$ où $X \sim \mathcal{B}(20; 0.8)$.
3. X suit $\mathcal{P}(5)$. Calculer $\mathbb{P}(X = 5)$, $\mathbb{P}(X < 5)$, $\mathbb{P}(X \geq 5)$, $\mathbb{P}(2 \leq X \leq 10)$.

EXERCICE 2

Une personne possède 4 clefs, parmi lesquelles une seule ouvre sa porte. Elle les essaie au hasard en éliminant celles qui ne marchent pas. On définit la variable aléatoire X comme le nombre d'essais nécessaires pour ouvrir la porte.

1. Donner la loi de probabilité de X et sa fonction de répartition.
2. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $V(X)$.

EXERCICE 3

Une variable aléatoire X a pour fonction de répartition la fonction F définie par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ 1/4 & \text{si } -1 \leq x < 2 \\ 1/3 & \text{si } 2 \leq x < 4 \\ 1 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

Quelle est la loi de probabilité de X ? Calculer son espérance et sa variance.

EXERCICE 4

Des paquets de 5 pommes ont été préparés avec des pommes dont 25 % sont avariées. Chaque client qui trouve dans le paquet qu'il achète au moins deux fruits abîmés revient au magasin se plaindre.

1. On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de pommes avariées dans un paquet pris au hasard. Quelle est la loi de X ?
2. Quelle est la probabilité pour qu'un client donné se plaigne?
3. Si 100 clients achètent un paquet de pommes, quel est le nombre moyen de plaintes?

EXERCICE 5

Un journaliste se voit remettre une liste de personnes à interviewer. Il doit interroger au moins 5 personnes, et les interviewés potentiels n'acceptent de parler que 2 fois sur 3, indépendamment les uns des autres. Quelle est la probabilité que le journaliste mène à bien sa tâche si la liste comporte 5 noms? 8 noms?

EXERCICE 6

Une population comporte en moyenne une personne mesurant plus de 1m90 sur 80 personnes.

1. Sur 100 personnes, calculer la probabilité qu'il y ait au moins une personne mesurant plus de 1m90 (utiliser une loi de Poisson).
2. Sur 300 personnes, calculer la probabilité qu'il y ait au moins une personne mesurant plus de 1m90.