

## TD4 : Logique des prédicats du premier ordre (syntaxe)

### Exercice 1.

Les définitions suivantes portent sur les entiers naturels (positifs ou nuls) :

- l'ensemble des fonctions :  $G = \{\text{zéro}, \text{succ}, \text{plus}\}$   
avec  $\text{rang}(\text{zéro}) = 0$ ,  $\text{rang}(\text{succ}) = 1$  et  $\text{rang}(\text{plus}) = 2$ .
- l'ensemble des prédicats :  $P = \{\text{pair}, \text{premier}, \text{inf\_strict}\}$   
avec  $\text{rang}(\text{pair}) = \text{rang}(\text{premier}) = 1$  et  $\text{rang}(\text{inf\_strict}) = 2$ .
- l'ensemble des variables :  $X = \{x, y, z\}$ .
  1. Les expressions ci-dessous sont ou non des formules syntaxiquement correctes, des termes syntaxiquement corrects, ou non ? Justifiez en détail.
  2. Pour chaque formule syntaxiquement correcte, déterminez si elle est close et la liste de ses variables libres.

<b>1</b>	$\text{plus}(x, \text{plus}(\text{zéro}, \text{succ}(\text{zéro})))$
<b>2</b>	$\text{succ}(\text{zéro})$
<b>3</b>	$((\text{premier}(x) \vee \text{inf\_strict}(\text{zéro}, y)) \wedge \neg \text{pair}(\text{plus}(y, z)))$
<b>4</b>	$\forall x \forall z (\text{premier}(\text{zéro}) \Rightarrow (\text{inf\_strict}(x, z) \vee \text{pair}(\text{plus}(x, z))))$
<b>5</b>	$\text{plus}(\text{plus}(\text{plus}(\text{plus}(\text{zéro}, x), y), \text{plus}(x, \text{plus}(y, z))))$
<b>6</b>	$\text{pair}(x, 0)$
<b>7</b>	$x$
<b>8</b>	$(\forall x \text{premier}(y) \Rightarrow \exists y \text{premier}(x))$
<b>9</b>	$\exists x \forall y \exists x \forall z \text{inf\_strict}(\text{zéro}, \text{plus}(x, \text{plus}(y, z)))$

### Exercice 2.

Soit  $G = \{\text{vide}, \text{Ajouter}, \text{Retirer}\} \cup \{a, \dots, z\}$

avec  $\text{rang}(\text{vide}) = 0$  ;  $\text{rang}(\text{Ajouter}) = 2$  ;  $\text{rang}(\text{Retirer}) = 2$  ;  
 $\text{rang}(a) = 0 = \dots = \text{rang}(z)$ .

Soit  $P = \{\text{Estvide}, \text{EstLettre}, \text{Contient}\}$  avec

$\text{rang}(\text{Estvide}) = 1 = \text{rang}(\text{EstLettre})$ ,  $\text{rang}(\text{Contient}) = 2$

Soit  $X = \{x_1, x_2, y_1, y_2, z_1\}$ .

Les expressions suivantes sont-elles des termes syntaxiquement corrects ou non ? Les expressions suivantes sont-elles des formules syntaxiquement correctes ou non ? Justifiez en détail. Pour chaque formule syntaxiquement correcte, déterminez si elle est close et la liste de ses variables libres.

1.  $\text{Ajouter}(x_1)$
2.  $\text{EstLettre}(\text{Ajouter}(x_1, y_1))$
3.  $\forall x_1 \text{Ajouter}(x_2, d)$
4.  $\forall x_1 \text{Estvide}(\text{Ajouter}(x_2, d))$
5.  $\forall x_2 \text{Estvide}(\text{Ajouter}(x_2, d))$
6.  $\text{Contient}(z_1)$
7.  $\text{EstLettre}(\text{Ajouter}(\text{Retirer}(x_1, a), y_1))$
8.  $\exists x_1 \text{Contient}(\text{Retirer}(x_1, d), d)$
9.  $\exists x_1 \text{Ajouter}(x_1, d)$
10.  $\text{Ajouter}(\text{Ajouter}(\text{Ajouter}(a, b), c), d)$
11.  $\text{Ajouter}(\text{Retirer}(\text{Ajouter}(a, b), c), d) \wedge \text{Retirer}(\text{Ajouter}(v, e), l)$