

# Jacobienne et Modèle Géométrique Inverse

Ludovic Hofer

28 septembre 2022

# Rappels de notation

$\mathcal{Q}$  : Espace angulaire

$\mathcal{O}$  : Espace opérationnel

$\mathcal{G}$  : Modèle géométrique direct

$\mathcal{G}_i$  :  $i$ -ème élément de  $\mathcal{G}$

$\frac{\partial f}{\partial x}$  : Dérivée partielle de  $f$  par rapport à  $x$

# La jacobienne

Jacobienne : Matrice des dérivées partielles

$$J_{i,j}(q) = \frac{\partial \mathcal{G}_i}{\partial q_j}$$

$$J(q) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathcal{G}_1(q)}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial \mathcal{G}_1(q)}{\partial q_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \mathcal{G}_k(q)}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial \mathcal{G}_k(q)}{\partial q_n} \end{pmatrix}$$

$$J(q) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathcal{G}(q)}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial \mathcal{G}(q)}{\partial q_n} \end{pmatrix}$$

Utilités

- MGI : méthodes numériques
- Vitesse dans l'espace opérationnel :  $\dot{o} = J(q)\dot{q}$

# Obtention des dérivées partielles : exemple simple

Modèle géométrique direct du robot

$${}^0T_E(q) = \mathcal{R}(\vec{z}, q_1)\mathcal{T}(\vec{x}, L2)\mathcal{R}(\vec{z}, q_2)\mathcal{T}(\vec{x}, L3)$$

Dérivées partielles

$$\frac{\partial {}^0T_E(q)}{\partial q_i} = \frac{\partial \mathcal{R}(\vec{z}, q_1)\mathcal{T}(\vec{x}, L2)\mathcal{R}(\vec{z}, q_2)\mathcal{T}(\vec{x}, L3)}{\partial q_i}$$

Pour chaque  $q_i$ , une transformation élémentaire impactée :

$$\frac{\partial {}^0T_E(q)}{\partial q_1} = \frac{\partial \mathcal{R}(\vec{z}, q_1)}{\partial q_1}\mathcal{T}(\vec{x}, L2)\mathcal{R}(\vec{z}, q_2)\mathcal{T}(\vec{x}, L3)$$

$$\frac{\partial {}^0T_E(q)}{\partial q_2} = \mathcal{R}(\vec{z}, q_1)\mathcal{T}(\vec{x}, L2)\frac{\partial \mathcal{R}(\vec{z}, q_2)}{\partial q_2}\mathcal{T}(\vec{x}, L3)$$

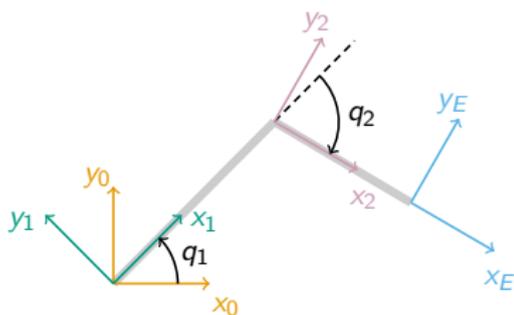
# Dérivée des transformations élémentaires

Élément par élément : exemple avec une rotation

$$\frac{\partial \mathcal{R}(\vec{x}, q)}{\partial q} = \begin{pmatrix} \frac{\partial 1}{\partial q} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial \cos(q)}{\partial q} & \frac{\partial -\sin(q)}{\partial q} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \sin(q)}{\partial q} & \frac{\partial \cos(q)}{\partial q} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial 1}{\partial q} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \mathcal{R}(\vec{x}, q)}{\partial q} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin(q) & -\cos(q) & 0 \\ 0 & \cos(q) & -\sin(q) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

## Jacobiennes d'un robot simple



## Notations raccourcies

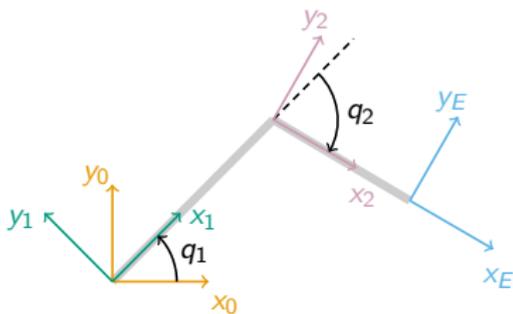
- $c_1 = \cos(q_1)$
- $s_1 = \sin(q_1)$
- $c_2 = \cos(q_2)$
- $s_2 = \sin(q_2)$

## Dérivées des matrices de transformation

$$\frac{\partial^0 T_E}{\partial q_1} = \begin{pmatrix} -c_1 s_2 - c_2 s_1 & -c_1 c_2 + s_1 s_2 & 0 & -L_1 s_1 + L_2 (-c_1 s_2 - c_2 s_1) \\ c_1 c_2 - s_1 s_2 & -c_1 s_2 - c_2 s_1 & 0 & L_1 c_1 + L_2 (c_1 c_2 - s_1 s_2) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial^0 T_E}{\partial q_2} = \begin{pmatrix} -c_1 s_2 - c_2 s_1 & -c_1 c_2 + s_1 s_2 & 0 & L_2 (-c_1 s_2 - c_2 s_1) \\ c_1 c_2 - s_1 s_2 & -c_1 s_2 - c_2 s_1 & 0 & L_2 (c_1 c_2 - s_1 s_2) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

# Jacobienne d'un robot simple



## Notations raccourcies

- $c_1 = \cos(q_1)$
- $s_1 = \sin(q_1)$
- $c_2 = \cos(q_2)$
- $s_2 = \sin(q_2)$

## Jacobienne

$$J(q) = \begin{pmatrix} -L_1 s_1 + L_2 (-c_1 s_2 - c_2 s_1) & L_2 (-c_1 s_2 - c_2 s_1) \\ L_1 c_1 + L_2 (c_1 c_2 - s_1 s_2) & L_2 (c_1 c_2 - s_1 s_2) \end{pmatrix}$$

# Modèle Géométrique Inverse (Inverse Kinematics)

## Objectif

Pour un  $o \in \mathcal{O}$ , quelles configurations  $q \in \mathcal{Q}$  tel que  $\mathcal{G}(q) = o$

## Différences avec le MGD

- Généralement, plusieurs solutions
- Parfois 0 solutions
- Parfois infinité de solutions

# MGI et nombre de degrés de liberté

Cas classique :  $n = 6$

L'espace opérationnel comprend position et orientation.

Sur-contraint :  $n < 6$

Suppression de contraintes (par exemple position uniquement)

Sous-contraint :  $n > 6$

Plusieurs possibilités :

- Fixer toutes les articulations sauf 6
- Introduire des contraintes supplémentaires

# Méthodes de résolutions

## Méthodes analytiques

- Résolution géométrique
- Résolution algébrique

## Méthodes numériques (itératives)

- Par Jacobienne Inverse
- Par Jacobienne Transposée

# Méthodes analytiques : Avantages et inconvénients

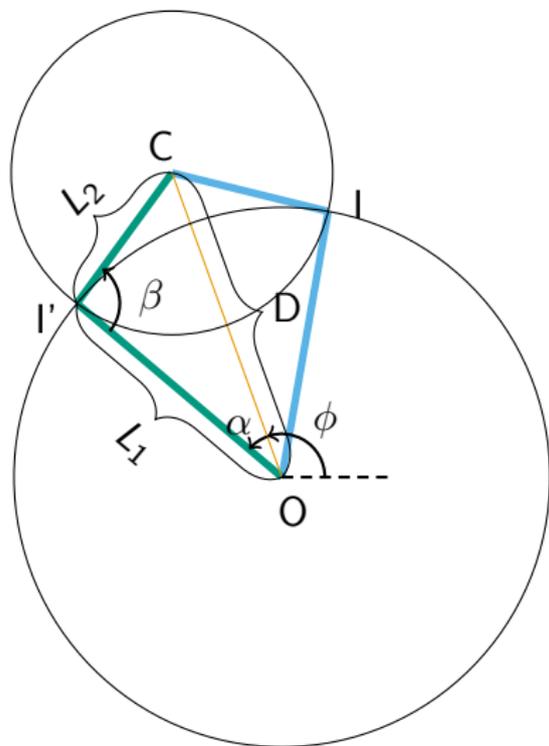
## Avantages

- Réponses exactes
- Nombre de solutions disponible
- Exécution rapide

## Inconvénients

- Pas de méthode générale : propre à chaque robot
- Ne fournit pas de solution approchée quand la cible n'est pas atteignable

# Résolution géométrique : cas pratique



## Données du problèmes

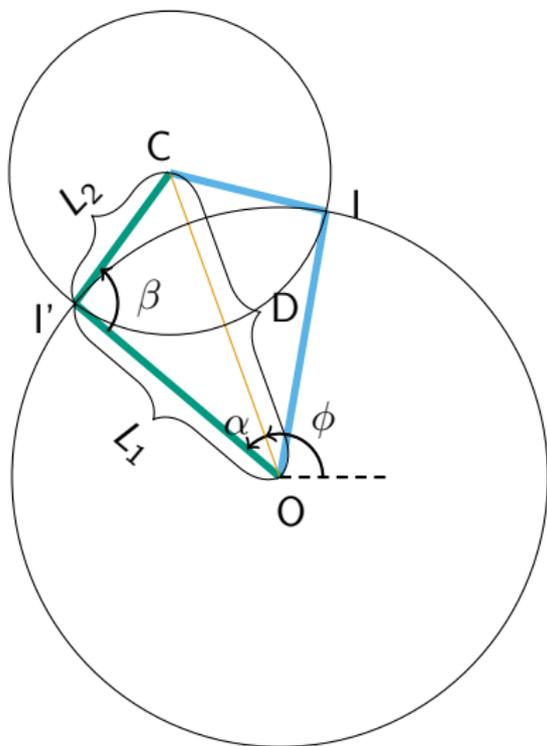
$C$  : Position cible

$D$  :  $\|O - C\|$

$L_1$  :  $\|O - I\|$

$L_2$  :  $\|I - C\|$

## Résolution géométrique : cas pratique



Quelles valeurs pour  $\alpha$  et  $\beta$

- Par la *Loi des cosinus* :

$$L_2^2 = D^2 + L_1^2 - 2DL_1 \cos(\alpha)$$

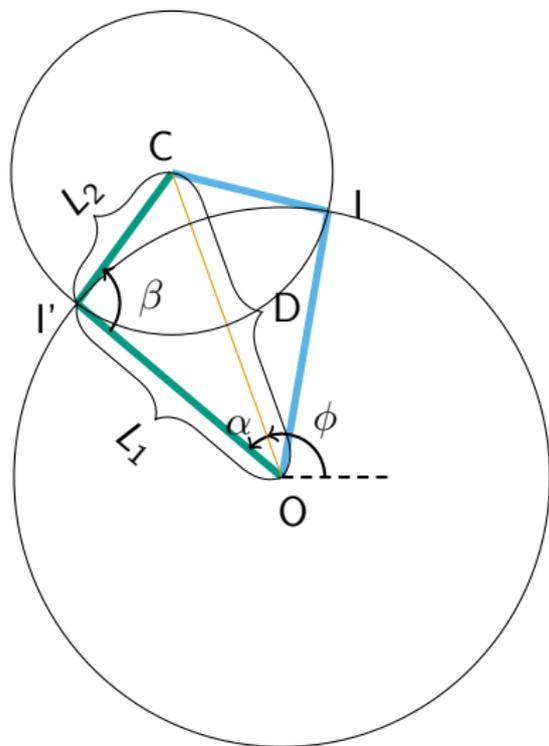
- Autrement di :

$$\alpha = \arccos \left( \frac{L_1^2 + D^2 - L_2^2}{2L_1D} \right)$$

- De manière similaire :

$$\beta = \arccos \left( \frac{L_1^2 + L_2^2 - D^2}{2L_1L_2} \right)$$

# Résolution géométrique : cas pratique

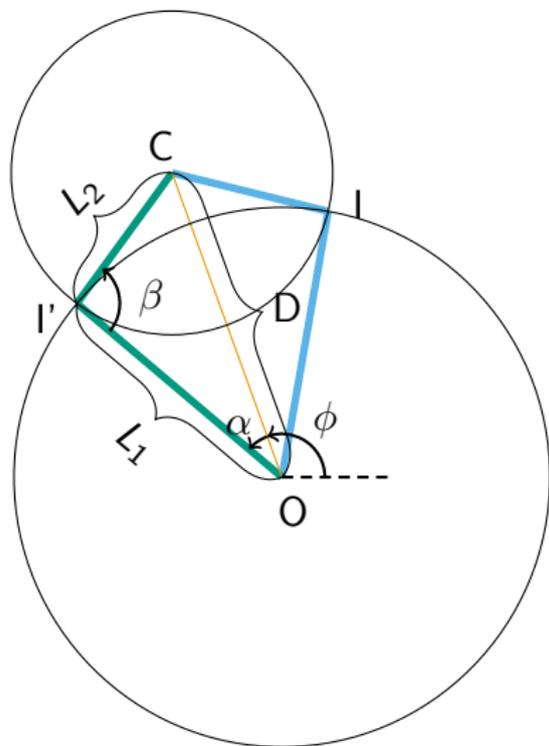


Quelles valeurs pour  $q_1$  et  $q_2$

● Cas classique : 2 solutions :

$$\begin{cases} q_1 = \phi - \alpha, q_2 = \pi - \beta \\ q_1 = \phi + \alpha, q_2 = \beta - \pi \end{cases}$$

# Résolution géométrique : cas pratique



Quelles valeurs pour  $q_1$  et  $q_2$

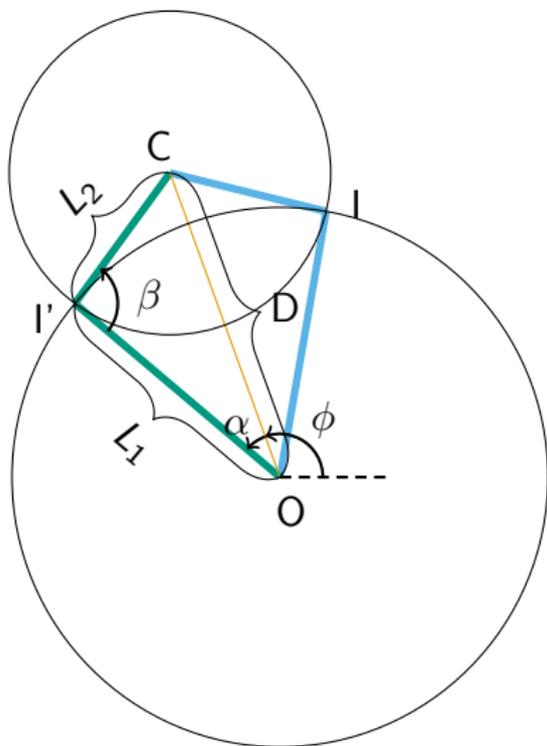
- Cas classique : 2 solutions :

$$\begin{cases} q_1 = \phi - \alpha, q_2 = \pi - \beta \\ q_1 = \phi + \alpha, q_2 = \beta - \pi \end{cases}$$

- Pas de solutions :

- $D > L_1 + L_2$  ou
- $D < |L_2 - L_1|$

# Résolution géométrique : cas pratique



## Quelles valeurs pour $q_1$ et $q_2$

- Cas classique : 2 solutions :

$$\begin{cases} q_1 = \phi - \alpha, q_2 = \pi - \beta \\ q_1 = \phi + \alpha, q_2 = \beta - \pi \end{cases}$$

- Pas de solutions :

- $D > L_1 + L_2$  ou
- $D < |L_2 - L_1|$

- Une seule solution :

$$D = L_1 + L_2$$

# Résolution algébrique

- Non-couvert ici (voir<sup>1</sup>, sec. 4.3)
- Systèmes d'équation avec cos et sin
- Choix du repère dans lequel sont exprimés est important
- Utilisation de calcul symbolique (sympy, maxima, maple)

---

1. W KHALIL, E DOMBRE et ML NAGURKA. "Modeling, Identification and Control of Robots". In : *Applied Mechanics Reviews* (2003). ISSN : 0003-6900. DOI : 10.1115/1.1566397.

# Méthodes numériques : Avantages et inconvénients

## Avantages

- Méthode similaire pour tous les robots, basée sur  $\mathcal{G}$
- Solution approximative pour position impossible

## Inconvénients

- Fournit une seule solution
- Vulnérable aux singularités
- Calculatoire
- Non répétable

# Inverse de la jacobienne

## Éléments nécessaires

$q \in \mathcal{Q}$  : La configuration initiale du robot

$\mathcal{G}$  : Le modèle géométrique du robot

$J(q)$  : La jacobienne du robot en  $q$

$o \in \mathcal{O}$  : La cible à atteindre (espace de dimension  $k$ )

## Résolution du MGI : approximation linéaire locale

Soit  $\epsilon \in \mathbb{R}^k$  un vecteur de norme faible :

$$\mathcal{G}(q + \epsilon) \approx \mathcal{G}(q) + J(q)\epsilon$$

$$o - \mathcal{G}(q) \approx J(q)\epsilon$$

$$\epsilon \approx J(q)^{-1}(o - \mathcal{G}(q))$$

# Inverse de la jacobienne

## Résolution du MGI : approximation linéaire locale

Soit  $\epsilon \in \mathbb{R}^k$  un vecteur de norme faible :

$$\mathcal{G}(q + \epsilon) \approx \mathcal{G}(q) + J(q)\epsilon$$

$$o - \mathcal{G}(q) \approx J(q)\epsilon$$

$$\epsilon \approx J(q)^{-1}(o - \mathcal{G}(q))$$

## Problèmes fréquents

- $\epsilon$  trop grand : approximation linéaire invalide
  - Borne sur norme de  $\epsilon$  : méthode itérative
- $J(q)$  non-inversible (exemple : matrice rectangulaire)

# Jacobienne Transposée : Théorie

## Formulation du problème

Minimisation d'une fonction de coût  $C(o, q)$  avec :

- $o \in \mathcal{O}$  : la cible à atteindre
- $q \in \mathcal{Q}$  : la configuration du robot

## Recherche du coût minimum

- Optimisation de fonction en boîte noire
- Résolution plus efficace avec accès au gradient :  $\nabla C(o, q)$

$$\nabla C(o, q) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial q_1} C(o, q) \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial q_n} C(o, q) \end{pmatrix}$$

# Jacobienne Transposée : Exemple

## Cas simple

- Cas simple : 3 degrés de liberté
- Cible : position en 3D
- Coût : carré des erreurs :

$$C(o, q) = \sum_{i=0}^3 (o_i - \mathcal{G}_i(q))^2 = (o - \mathcal{G}(q))^T (o - \mathcal{G}(q))$$

# Jacobienne Transposée : calcul de $\nabla C(o, q)$

Fonction de coût : carré des erreurs :

$$C(o, q) = \sum_{i=1}^3 (o_i - g_i(q))^2$$

Jacobiennes Transposées : calcul de  $\nabla C(o, q)$ 

Fonction de coût : carré des erreurs :

$$C(o, q) = \sum_{i=1}^3 (o_i - g_i(q))^2$$

Dérivations de fonctions composées :

$$\frac{\partial C(o, q)}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^3 -2(o_i - g_i(q)) \frac{\partial g_i(q)}{\partial q_j}$$

Jacobiennes Transposées : calcul de  $\nabla C(o, q)$ 

Dérivations de fonctions composées :

$$\frac{\partial C(o, q)}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^3 -2(o_i - \mathcal{G}_i(q)) \frac{\partial \mathcal{G}_i(q)}{\partial q_j}$$

Autrement dit :

$$\frac{\partial C(o, q)}{\partial q_j} = -2 \left( \frac{\partial \mathcal{G}(q)}{\partial q_j} \right)^T (o - \mathcal{G}(q))$$

Jacobiennes Transposées : calcul de  $\nabla C(o, q)$ 

Autrement dit :

$$\frac{\partial C(o, q)}{\partial q_j} = -2 \left( \frac{\partial \mathcal{G}(q)}{\partial q_j} \right)^T (o - \mathcal{G}(q))$$

D'où :

$$\nabla C(o, q) = -2 \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathcal{G}_1(q)}{\partial q_1} & \frac{\partial \mathcal{G}_2(q)}{\partial q_1} & \frac{\partial \mathcal{G}_3(q)}{\partial q_1} \\ \frac{\partial \mathcal{G}_1(q)}{\partial q_2} & \frac{\partial \mathcal{G}_2(q)}{\partial q_2} & \frac{\partial \mathcal{G}_3(q)}{\partial q_2} \\ \frac{\partial \mathcal{G}_1(q)}{\partial q_3} & \frac{\partial \mathcal{G}_2(q)}{\partial q_3} & \frac{\partial \mathcal{G}_3(q)}{\partial q_3} \end{pmatrix} (o - \mathcal{G}(q))$$

Jacobienne Transposée : calcul de  $\nabla C(o, q)$ 

D'où :

$$\nabla C(o, q) = -2 \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathcal{G}_1(q)}{\partial q_1} & \frac{\partial \mathcal{G}_2(q)}{\partial q_1} & \frac{\partial \mathcal{G}_3(q)}{\partial q_1} \\ \frac{\partial \mathcal{G}_1(q)}{\partial q_2} & \frac{\partial \mathcal{G}_2(q)}{\partial q_2} & \frac{\partial \mathcal{G}_3(q)}{\partial q_2} \\ \frac{\partial \mathcal{G}_1(q)}{\partial q_3} & \frac{\partial \mathcal{G}_2(q)}{\partial q_3} & \frac{\partial \mathcal{G}_3(q)}{\partial q_3} \end{pmatrix} (o - \mathcal{G}(q))$$

Finalement :

$$\nabla C(o, q) = -2J(q)^T (o - \mathcal{G}(q))$$