

Sur le problème de l'homéomorphisme des surfaces à bord non compactes planaires

Olivier Ly ^(*) ¹

LaBRI Université Bordeaux I,

351. cours de la Libération, 33405 Talence, France

1 Introduction

2 Décomposition arborescente

Lemme 1

Il existe une suite croissante $(B_n)_n$ de parties de S satisfaisant les propriétés suivantes :

- B_n est une région (connexe) compacte (et $B_n \subset B_{n+1}$)
- $\bigcup_n B_n = S$
- Si C une composante connexe de $\overline{B_n \setminus B_{n-1}}$, alors $\text{Fr}(C) \cap B_{n-1} = C \cap B_{n-1}$ est connexe, c'est une courbe simple α correctement plongée dans B_n . De plus α divise S en deux parties, dont celle contenant $\overset{\circ}{C}$ est non compacte.

3 Espace des bouts

Définition 1 (Bout [4, 1])

Soit S une surface non compacte sans bord, on considère une suite décroissante $P_1 \supset P_2 \supset \dots \supset P_n \supset \dots$ de régions non bornées telle que

- la frontière de P_n est compacte,
- pour toute partie bornée A de S , il existe n_0 tel que $A \cap P_n = \emptyset$ pour tout $n \geq n_0$.

Nous dirons que deux telles suites $\{P_i\}_{i \geq 0}$, $\{P'_i\}_{i \geq 0}$ sont équivalentes si pour tout n il existe n' tel que $P'_{n'} \subset P_n$ et réciproquement.

Une classe d'équivalence pour cette relation sera appelée un bout de S .

Définition 2 (Frontière idéale)

On considère U une région de S de frontière compacte, soit alors U^* la partie de $B(S)$ formée par les classes d'équivalence de suite $\{P_i\}_{i \geq 0}$ telle $P_n \subset U$ pour n suffisamment grand. Soit \mathcal{B} l'ensemble de tous les U^* obtenus de la sorte, nous appellerons frontière idéale de S l'ensemble $B(S)$ des bouts de S muni de la topologie de base \mathcal{B} .

¹lylabri.u-bordeaux.fr

Soit $\hat{S} = S \cup B(S)$, on munit \hat{S} de la topologie engendrée par les ouverts de S ainsi que les parties de la forme $U \cup U^*$.

Proposition 1 (Compactification)

$i : S \rightarrow \hat{S}$ est une compactification de S .

Remarquons que \hat{S} n'est pas nécessairement une surface.

Définition 3 ([2, p146])

Nous dirons que X est de dimension zéro si tout point de X possède des voisinages ouverts de frontières vides arbitrairement petits, ce qui équivaut à dire que X est totalement discontinu.

Théorème 1

Les propriétés suivantes caractérisent l'espaces des bouts :

- \hat{S} est un espace de Hausdorff localement connexe,
- $B(S)$ est totalement de dimension zéro,
- $B(S)$ est une partie non séparable de \hat{S} (i.e. si G est une région connexe de \hat{S} , alors $G \cap S$ reste connexe dans S).

Toute compactification satisfaisant ces propriétés est isomorphe à (\hat{S}, S) .

Soit $(B_n)_n$ une famille de régions de d'une surface planeaire S satisfaisant les conditions du lemme 1; La compacité de B_n implique que $\text{Fr}(B_n)$ est composée d'un nombre fini k_n de courbes, ces courbes délimitent $k_n + 1$ régions $U_{n,0}, U_{n,1}, \dots, U_{n,k_n-1}$ et B_n . Pour tout couple n, k d'entiers tel que $0 \leq k \leq n_k$, on note $\beta_{n,k} = U_{n,k}^*$. On a alors

Lemme 2

$\beta_{n,k}$ est un ouvert fermé, en particulier, c'est un compact.

$\{\beta_{n,k} \mid n \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq n_k\}$ constitue une base pour la topologie de $B(S)$.

Soit S une surface à bord non compacte planeaire.

Les composantes connexes du bord de S sont des variétés de dimension 1 sans bord : des courbes simples fermées homéomorphes à S^1 ou bien des courbes simples homéomorphes à \mathbb{R} . On considère \overline{S} , la surface obtenue à partir de S en recollant un demi-plan (resp. un disque) sur chaque composante connexe non compacte (resp. compacte) du bord; cela revient à définir un homéomorphisme entre chaque composante non compacte du bord et $\mathbb{R} = \delta(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ (resp. entre chaque composante compacte du bord et $S^1 = \delta D^2$), on peut vérifier que la classe d'homéomorphisme de \overline{S} ne dépend pas du choix des recollements. Ainsi \overline{S} est bien définie.

Proposition 2

\overline{S} est une surface sans bord planeaire.

Preuve :

On considère S' la surface obtenue à partir de S en recollant un disque sur chaque composante connexe compacte du bord de S ; $S \subset S' \subset \bar{S}$.

S' est planaire. En effet, par hypothèse, S l'est, on peut supposer $S \subset S^2$. Considérons $\gamma : [0, 1] \rightarrow \delta S$ paramétrisation d'une composante connexe compacte du bord de S . γ est une courbe de Jordan de S^2 , elle sépare S^2 en deux disques, i.e. $S^2 \setminus \gamma$ est formée de deux disques ouverts D_1 et D_2 . D'autre part, S est connexe et du fait qu'elle est une surface, le reste si on lui retire γ ; donc $S \setminus \gamma$ est totalement inclu dans D_1 ou dans D_2 , disons D_1 par exemple. Dans la construction de S' , on peut donc recoller D_2 sur γ . En répétant cette opération pour toutes les composantes connexes compactes de S , on obtient S' comme partie de S^2 , S' est planaire.

Soit $\gamma :]0, 1[\rightarrow \delta S$ paramétrisation d'une composante connexe non compacte du bord de S . Chaque point $\gamma(x)$ ($x \in]0, 1[$) possède un voisinage ouvert dans S homéomorphe au demi-disque $E = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1 \text{ et } \text{Im}(z) \geq 0\}$: il existe un plongement $j_x : E \rightarrow S \subset S^2$ tel que $j_x(0) = x$. On considère un plongement $\bar{j}_x : D^2 \rightarrow S^2$ prolongeant j_x .

La famille $\{\bar{j}_x(D_\epsilon) \mid D_\epsilon \text{ disque ouvert centré en } 0 \text{ de rayon } \epsilon\}$ constitue une base des voisinages de x dans la topologie de S^2 . Par conséquent, il existe $\epsilon > 0$ tel que $\bar{j}_x(D_\epsilon) \cap S = \bar{j}_x(D_\epsilon) \cap \bar{j}_x(E)$ (S est munie de la topologie induite par la topologie de S^2). On pose alors

$$D_x = \bar{j}_x(D_{\frac{\epsilon}{2}}) \setminus \bar{j}_x(E)$$

puis

$$P = \bigcup_{x \in]0, 1[} D_x$$

P est connexe. En effet, soit C une composante connexe de P . On peut lui associer une partie de γ ^{(*)2} : $C' = \{x \in \gamma \mid D_x \subset C'\}$. Il est clair que C' est ouverte. On peut aussi montrer facilement qu'elle est fermée. En effet, soit $(x_n)_{n \geq 1}$ une suite de C' convergente vers $x_0 \in \gamma$, D_{x_0} intercepte une infinité de D_{x_n} , donc par construction de C , $D_{x_0} \subset C$ et $x_0 \in C'$. D'autre part, γ est connexe, donc $\gamma = C'$ et par suite $P = C$.

P n'est pas encore homéomorphe au plan, il peut subsister des "trous". Soit α un lacet de P , les composantes connexes de $S^2 \setminus \alpha$ sont toutes homéomorphes à des disques ouverts, l'une d'elles contient S . Pour chaque lacet α de P , on considère T_α la réunion des composantes connexes de $S^2 \setminus \alpha$ qui ne contiennent pas S . On pose alors

$$P' = P \cup \bigcup_{\alpha} T_\alpha$$

On peut montrer que P' est simplement connexe, et donc, homéomorphe à un plan.

D'autre part, on peut voir que $\overline{P'} \cap S = \gamma$, $P' \cup \gamma$ est un demi-plan. Par conséquent $S \cup P'$ représente le recollement d'un demi-plan sur γ , du fait que $S \cup P \subset S^2$, la variété obtenue est planaire.

L'ensemble des composantes du bord est dénombrable : $\{\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_k, \dots\}$. En itérant le procédé

²Pour simplifier les notations, $\gamma(]0, 1[)$ est notée γ .

de recollement décrit plus haut, on construit une suite croissante de surfaces $S_0 \subset S_1 \subset \dots \subset S_k \subset \dots$ où S_k est obtenu en recollant un demi-plan sur γ_{k-1} dans S_{k-1} et toutes ces surfaces sont des parties de S^2 . Finalement $\bar{S} = \bigcup_k S_k$ est bien planaire \square

\bar{S} est donc une surface planaire sans bord non compacte. $B(\bar{S})$ est un espace compact de dimension zéro, on peut donc le plonger dans l'espace de Cantor et donc dans la sphère S^2 . Choisissons un tel plongement, son image sera encore notée $B(\bar{S})$. D'après le théorème de Kerékjártó, le complémentaire de $B(\bar{S})$ dans S^2 est homéomorphe à \bar{S} . On peut donc remplacer \bar{S} par cette surface et considérer S comme sous-surface de \bar{S} . Remarquons que le compactifié de \bar{S} est exactement S^2 .

Lemme 3

On peut choisir comme représentants d'un bout $p \in B(\bar{S})$ sont une suite emboîtée de voisinages de p dans S^2 , homéomorphes à des disques fermés privés d'un ensemble de dimension zéro.

Considérons la partie Φ de $B(S) \times B(\bar{S})$ définie par :

$$((P_n)_{n \geq 0}, (\bar{P}_n)_{n \geq 0}) \in \Phi \text{ ssi } \forall N \exists n_0 \forall n \geq n_0 : P_n \subset \bar{P}_N \quad (1)$$

Il est facile de vérifier que cette condition ne dépend pas des représentants des bouts.

Proposition 3

Φ est le graphe d'une application continue, surjective, encore notée Φ , de $B(S)$ sur $B(\bar{S})$.

Preuve :

(i) Chaque bout $(P_n)_{n \geq 0} \in B(S)$ possède au plus une image par Φ

Soient $(\bar{P}_n)_{n \geq 0}$ et $(\bar{P}'_n)_{n \geq 0}$ deux représentants de bouts de \bar{S} satisfaisant la condition 1 ci-dessus. Si nous avons affaire à deux bouts distincts, il existerait N tel que \bar{P}_N et \bar{P}'_N soient disjoints. Or par (1), il existe n_0 tel que $P_{n_0} \subset \bar{P}_N$ et n'_0 tel que $P_{n'_0} \subset \bar{P}'_N$. Si par exemple, $n_0 \geq n'_0$, il vient que $P_{n_0} \subset \bar{P}_N \cap \bar{P}'_N$, ce qui est absurde.

(ii) Tout élément de $B(S)$ possède une image par Φ

Supposons au contraire qu'il existe un bout de S représenté par $(P_n)_n$ tel que pour tout bout de \bar{S} représenté par $(\bar{P}_n)_n$, il existe N tel que $\forall n, P_n \subset \bar{P}_N$.

Supposons qu'il existe $x \in P_n \cap \bar{P}_N$ et $x' \in P_n \setminus \bar{P}_N$. Comme P_n est connexe par arc, il existe un chemin α dans P_n connectant x et x' . Or ce chemin coupe la frontière F de \bar{P}_N , en particulier $F \cap P_n \neq \emptyset$.

D'autre part, F est compacte. Par conséquent il existe $k > n$ tel que $P_k \cap F = \emptyset$. On a alors $P_k \cap \bar{P}_N = \emptyset$ ($P_k \subset \bar{P}_N$ est contradictoire) et donc $\forall k' \geq k \forall N' \geq N, P_{k'} \cap \bar{P}_{N'} = \emptyset$.

Considérons maintenant une suite $(x_n)_{n \geq 0}$ de points de S tels que $x_n \in P_n$.

Nous allons voir que cette suite ne possède pas de point d'adhérence dans $\bar{S} \cup B(\bar{S})$, ce qui constituera une contradiction, ce dernier ensemble étant compact.

D'abord, S ne peut pas comporter de point d'adhérence de $(x_n)_{n \geq 0}$ car sinon ce point appartenirait à l'intersection des adhérences des P_n , qui est vide.

$(x_n)_n$ ne possède pas de point d'adhérence dans \overline{S} non plus. C'est évident si l'on remarque que chaque point de $\overline{S} \setminus S$ possède un voisinage entièrement contenu dans $\overline{S} \setminus S$.

Soit maintenant un bout $p \in B(\overline{S})$ représenté par une suite $(\overline{P}_N)_N$, la famille $\{\overline{P}_N^* \mid N \geq 0\}$ constitue une base des voisinages de p dans la topologie de $\overline{S} \cup B(\overline{S})$. Or nous avons vu qu'il existe k tel que $P_k \cap \overline{P}_N = \emptyset$; en particulier pour tout $k' \geq k$, $x_{k'} \notin \overline{P}_N^*$.

Nous avons donc prouvé que Φ est une application.

(iii) Φ est continue

Il suffit de montrer que pour toute suite $(\overline{P}_N)_N$ représentant un bout de \overline{S} , $\forall N$, $\Phi^{-1}(\overline{P}_N^*)$ est un ouvert de $B(S)$. Or $\Phi^{-1}(\overline{P}_N^*) = \bigcup P_n^*$ où l'union est prise sur tous les $P_n \in \overline{P}_N$ appartenant à une suite $(P_n)_n$ représentant un bout de S . Donc $\Phi^{-1}(\overline{P}_N^*)$ est bien ouvert comme union d'ouverts.

(iv) Φ est surjective

Supposons donc qu'il existe un bout de \overline{S} représenté par $(\overline{P}_N)_N$ qui ne possède pas d'antécédent par Φ .

Pour tout N , \overline{P}_N intercepte S . Sinon, \overline{P}_N serait contenu dans un demi-plan P pour N assez grand. Ce qui conduirait à une contradiction sachant que $\delta\overline{P}_N$ est compacte. Soit donc pour tout N , un élément x_N de $\overline{P}_N \cap S$. On montre de façon similaire à (ii) que la suite $(x_N)_N$ ne possède aucune valeur d'adhérence dans $S \cup B(S)$. Or ce dernier est compact : contradiction \square

Définition 4

Nous appellerons Fleur toute partie de $B(S)$ de la forme $\Phi^{-1}(\{p\})$ avec $p \in B(\overline{S})$

Les fleurs sont simplement les classes d'équivalence de la relation \sim_Φ définie par $p \sim_\Phi p'$ ssi $\Phi(p) = \Phi(p')$.

Proposition 4

Φ induit un homéomorphisme $\overline{\Phi}$ entre l'ensemble des fleurs muni de la topologie quotient et $B(\overline{S})$.

On montre que $\overline{\Phi}$ est une bijection continue sur un compact \square

Proposition 5

Soit $i : S \rightarrow \overline{S}$ le plongement canonique.

$\Phi \cup i : S \cup B(S) \rightarrow \overline{S} \cup B(\overline{S})$ est une application continue.

Rappelons que $S \subset \overline{S} = S^2 \setminus B(S)$

On considère une composante connexe non compacte γ du bord de S . γ possède deux bouts limites $p_1, p_2 \in B(S)$. Il est facile de voir que $\Phi(p_1) = \Phi(p_2) = \bar{p} \in B(\overline{S})$.

γ est une courbe simple fermée privée d'un point qui est exactement \bar{p} . Pour voir cela, on

remarque que γ est un segment ouvert de S^2 dont les deux extrémités convergent vers \bar{p} . Ainsi, $\overline{\gamma} = \gamma \cup \{\bar{p}\}$ est une courbe de Jordan de S^2 , et donc, partage S^2 en deux disques. L'un de ces disques contient S , soit D le second (D est un disque ouvert). Remarquons que $D \cup \gamma$ est exactement le demi-plan recollé sur γ dans la construction de \overline{S} .

On considère γ' la frontière d'un voisinage régulier de γ dans S . Un tel voisinage est homéomorphe à une bande $[0, 1] \times \mathbb{R}$ ou, de façon plus imagée, à une plage bordant γ dans S^2 ; en fait, γ' est une courbe non compacte sans bord longeant γ dont les extrémités convergent aussi vers p . $\overline{\gamma'}$ est aussi une courbe de Jordan de S^2 , elle sépare S^2 en deux disques dont l'un contient D , notons le D' .

Il est maintenant facile de se convaincre qu'il existe une homotopie

$$H_\gamma : (\overline{D'} \setminus \overline{D}) \times [0, 1] \rightarrow \overline{D'} \setminus \{p\}$$

telle que

- $\forall t \in [0, 1]$, $H_\gamma(\cdot, t)$ est un plongement,
- $H_\gamma(\cdot, 0)$ est l'identité,
- $H_\gamma(\cdot, 1) : \overline{D'} \setminus \overline{D} \rightarrow \overline{D'} \setminus \{p\}$ est un homéomorphisme.
- $\forall t$, $H_\gamma(\cdot, t)|_{\gamma'}$ est l'identité.

(on peut considérer D comme l'union disjointe de segments dont une extrémité est \bar{p} et l'autre appartient à γ).

Remarquons que pour deux courbes distinctes du bord γ_1 et γ_2 , H_{γ_1} et H_{γ_2} ont des domaines disjoints. Ainsi,

$$H = i \cup \bigcup_{\gamma} H_\gamma : S' \setminus \delta S' \rightarrow \overline{S}$$

(on note i l'injection canonique de domaine $S' \setminus (\bigcup \overline{D'})$)

H est donc une homotopie telle que :

- $\forall t \in [0, 1]$, $H(\cdot, t)$ est un plongement,
- $H(\cdot, 0)$ est l'identité,
- $H(\cdot, 1) : S' \setminus \delta S' \rightarrow \overline{S}$ est un homéomorphisme.
- $\forall t$, $H_\gamma(\cdot, t)|_{\text{Dom}(i)}$ est l'identité.

Pour simplifier les notations, on note η l'application $H(\cdot, 1)$.

4 Courbes correctement plongées dans une surface planeaire

Définition 5

Nous dirons qu'un bout p de S est limite d'une composante connexe du bord C si et seulement si il existe une suite $(P_n)_n \in p$ tel que $\forall n : P_n \cap C = \emptyset$.

Lemme 4

Deux bouts de S appartiennent à la même fleur si et seulement si il n'existe pas de courbe simple fermée de S les séparant dans $S \cup B(S)$.

Preuve :

(i) : (\Rightarrow)

Soient deux bouts p, p' de S représentés respectivement par $(P_n)_n$ et $(P'_n)_n$, $\gamma : [0, 1] \rightarrow S$ une courbe simple fermée telle que p et p' n'appartiennent pas à la même composante connexe de $S \cup B(S) \setminus \gamma$.

Soient C_1 et C_2 les composantes connexes de $S \setminus \gamma$, $\overline{S} \setminus \gamma$ est constituée de deux composantes connexes C'_1 et C'_2 telles que $C_i \subset C'_i$ ($i = 1, 2$). En effet, supposons que C_1 et C_2 soient connectées dans \overline{S} par un arc α . On peut transformer α , en laissant ses extrémités fixées, de telle sorte qu'il ne coupe pas γ ni de composante du bord de S (cela n'est pas possible en général si γ est un arc correctement plongé dans S) et de ce fait devienne un arc de S , ce qui est contradictoire.

Supposons qu'il existe un bout $\bar{p} \in B(\overline{S})$ tel que $\Phi(p) = \Phi(p') = \bar{p}$. Il existe N_0 tel que $\overline{P}_{N_0} \cap \gamma = \emptyset$, donc \overline{P}_{N_0} est inclu dans C'_1 ou bien dans C'_2 , disons C'_1 ; mais alors, pour n assez grand, $P_n \cap \overline{P}_{N_0} = \emptyset$, c'est une contradiction.

(ii) : (\Leftarrow)

Soient deux bouts p, p' de S n'appartenant pas à la même fleur, $(P_n)_n$ et $(P'_n)_n$, représentants respectifs de p et p' . Soient $\bar{p} = \Phi(p)$, $\bar{p}' = \Phi(p')$. Par hypothèse, \bar{p} et \bar{p}' sont deux bouts distincts de \overline{S} , surface sans bord; on peut montrer qu'ils sont séparés par une courbe simple fermée $c : [0, 1] \rightarrow \overline{S}$ (on peut regarder \overline{S} comme une somme connexe arborescente par exemple). On considère alors la courbe $c' = \eta^{-1}(c)$, nous allons voir qu'elle sépare p et p' .

Il est clair que c' sépare \bar{p} et \bar{p}' dans S^2 , de plus c' est une courbe de S . Maintenant, il existe deux voisinages V et V' de \bar{p} et \bar{p}' séparé par c' . Pour finir, par définition de Φ , il existe n_0 tel que $P_{n_0} \subset V$ et $P'_{n_0} \subset V'$ \square

Lemme 5

Soit $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ un ensemble fini de courbes compactes correctement plongées telles que :

- Chaque a_i sépare S en deux parties, \mathcal{A}_i qui contient toutes les autres courbes et \mathcal{B}_i , qui n'en contient aucune.
- Chaque partition évoquée ci-dessus induit une partition de $B(S)$ qui est saturée pour la relation d'appartenance à la même fleur.

Il existe alors une courbe fermée simple correctement plongée dans S induisant la partition de $B(S)$ constituée des ensembles $\bigcap \mathcal{A}_i$ et $\bigcup \mathcal{B}_i$.

La preuve se fait par récurrence sur k , si $k = 1$, c'est fini. Supposons donc $k \geq 2$,

cas 1 : *Il existe parmi les a_i deux courbes simples fermées, disons a_{k-1} et a_k on les connecte alors par un arc α et on les remplace par le bord d'un voisinage régulier de $a_{k-1} \cup a_k \cup \alpha$.*

cas 2 : *Au plus l'un des a_i est une courbe simple fermée*

Choisissons donc un arc parmi les a_i , disons a_k , par hypothèse, cet arc sépare S , les limites des courbes du bord qu'il connecte appartiennent à une fleur f totalement incluse dans \mathcal{B}_k , si l'on parcourt l'une de ces courbes dans la partie connexe contenant x , on doit retomber sur un arc a_i , car sinon on connecte un bout de f à x ce qui est contraire aux hypothèses; maintenant, en suivant ce chemin on doit retomber sur a_k puisque la collection initiale de courbe est finie. On a alors décrit une courbe simple fermée, en considérant le bord d'un de ses voisinages réguliers, on peut éliminer tous les arcs rencontrés, nous avons augmenté le nombre de courbes simples fermées sans augmenter k , le cas 1 permet donc de conclure. \square

Proposition 6

Soit f une fleur infinie. Soit L l'ensemble des bouts limites de composantes du bord est dense dans f , alors f est l'adhérence de L dans $B(S)$; de plus L est dénombrable.

Preuve :

Soit p un bout appartenant à une fleur infinie, $(P_n)_n$ un représentant de p .

$\exists n_0 \mid \forall n \geq n_0 : \delta P_n$ n'est pas composée que de courbe simple fermée

Sinon, la proposition précédente impliquerait que $|\Phi^{-1}(\Phi(p))| = 1$.

pour $n \geq n_0$, δP_n peut être réduite à une union disjointe de segments correctement plongés

D'abord, δP_n est une union finie de segments et de cercles correctement plongés, pour faciliter les notations, on considère que P_n commence à partir de P_{n_0} .

Supposons que δP_n contienne un cercle c , dans ce cas on remplace P_n par la composante connexe de $S \setminus (\delta P_n \setminus c)$ la contenant. ³.

On peut transformer $(P_n)_n$ de telle sorte que δP_n soit un segment correctement plongé.

Supposons que P_n soit constituée d'au moins deux segments s_1 et s_2 , P_n est connexe par arc, on peut donc connecter s_1 et s_2 par un arc α .

Il existe n_1 minimum, tel que $P_{n_1} \cap (s_1 \cup s_2 \cup \alpha) = \emptyset$. On remplace alors P_n par la composante connexe de $S \setminus (s_1 \cup s_2 \cup \alpha)$ contenant P_{n_1} , on élimine ensuite tous les P_k pour $n < k < n_1$. δP_n est décrémentée de 1, on conclut par récurrence.

Ainsi, δP_n est constitué d'un seul segment correctement plongé. Soit γ une composante du bord de S contenant une extrémité de ce segment. On considère ensuite p' un des deux bouts limite de γ ⁴.

$$\Phi(p') = \Phi(p)$$

³Il y a ici une imprecision dans la rédaction sur le choix de n_0 : n_0 est choisit tel que $\forall n, n' \geq n_0$, δP_n et $\delta P_{n'}$ ne peuvent pas être séparé par une courbe simple fermée correctement plongée

⁴PB : γ pourrait être compacte a priori

Sinon, p et p' sont séparés par un cercle c correctement plongé dans S . Soit D le disque de frontière c contenant p' , D contient γ entièrement car c est correctement plongé. Soit γ' la composante du bord de S contenant l'autre extrémité de δP_n , elle ne peut être contenue dans D sinon, $\delta P_n \subset D$ ce qui est impossible. Donc δP_n coupe D en un point x , on considère alors un voisinage régulier de c dans $S \setminus D$, sa frontière est une courbe joignant des points de P_n à des points de $S \setminus P_n$ mais ne coupant pas δP_n : contradiction.

p' appartient donc à f , on choisit un tel p' pour chaque P_n , notons le p'_n . La suite $(p'_n)_n$ converge maintenant vers p \square

Lemme 6

p_1 et p_2 appartiennent à la même fleur si et seulement si toute courbe γ allant de p_1 à p_2 partage S en deux parties.

Preuve :

(\Rightarrow) : supposons le contraire, soit $x \in \gamma$, un petit voisinage de x dans S , homéomorphe à un disque est partagé en deux par γ , cependant, ces deux parties sont connectées dans $S \setminus \gamma$ par une courbe simple α , maintenant, il est facile de prolonger α des deux côtés vers x pour finalement fabriquer une courbe simple fermée qui sépare p_1 et p_2 , c'est une contradiction grâce au lemme 2

(\Leftarrow) : Soit γ une courbe joignant p_1 et p_2 qui partage S en deux parties, si p_1 et p_2 ne sont pas dans la même fleur, alors on peut les séparer par une courbe simple fermée, ceci constitue une contradiction. (on regarde dans S^2 .) \square

Corollaire 1

Un segment correctement plongé dans S sépare cette dernière en deux parties ssi il connecte deux composantes du bord associées à la même fleur.

Preuve :

Pour voir cela, notons γ_1 et γ_2 les deux composantes du bord connectées par le segment α on considère alors la frontière d'un voisinage régulier dans S de $\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \alpha$ \square

Remarque 1 Une courbe simple partitionne au plus une fleur.

5 Ordre cyclique dans une fleur

On suppose que S est une surface orientée (choisir une orientation de S , c'est en fait choisir une face de S), c'est-à-dire qu'un ordre cyclique (une permutation circulaire d'ordre 3) est choisi sur les sommets de chaque simplexe de dimension deux de S . Il est facile de voir que cette orientation induit une orientation de \bar{S} . Le problème est que nous n'avons pas de triangulation canonique de $\bar{S} \cup B(\bar{S})$, cependant, ce dernier espace est homéomorphe à S^2 , et par conséquent, orientable; maintenant, \bar{S} est une partie de $\bar{S} \cup B(\bar{S})$ d'intérieur non vide, elle induit donc une orientation de $\bar{S} \cup B(\bar{S})$.

Définition 6

Soit γ une courbe simple orientée partageant une surface S , elle-même orientée en deux parties S_1 et S_2 , ces deux surfaces héritent chacune d'une orientation de S , seule l'une des deux est compatible avec celle de γ , disons S_1 . Nous dirons alors qu'une partie connexe par arc $A \subset S \setminus \gamma$ est à gauche de γ si et seulement si $A \subset S_1$.

Définition 7

Soient $p_1, p_2, p_3 \in f \subset B(S)$, on définit une relation G d'arité 3 sur f par $G(p_1, p_2, p_3)$ ssi pour toute courbe γ ayant pour limite p_1 et p_2 , orientée de p_1 à p_2 , p_3 se trouve à gauche de γ i.e. $\forall (P_n^3)_n \in p_3, \exists n_0 \geq 0$ tel que $P_{n_0}^3$ est à gauche de γ .

Pour démontrer la validité de cette définition, il faut voir que $G(p_1, p_2, p_3)$ ne dépend pas du choix de γ ni de celui de $(P_n^3)_n$; le dernier point est facile.

Soit maintenant γ et γ' deux candidats (des courbes simples) pour la définition. (on les suppose simpliciale). Comme dans la définition, on considère les sous-surfaces S_1, S_2, S'_1, S'_2 (S_1 et S'_1 sont respectivement les parties gauches de γ et de γ'). Nous allons voir que, ni $S_1 \cap S'_2$, ni $S'_1 \cap S_2$ ne peuvent contenir p_3 . Soit donc une composante connexe C de $S_1 \cap S'_2$ contenant p_3 , sa frontière (pas son bord !) est contenue dans $\gamma \cup \gamma'$.

Cette frontière est une 1-variété. Les seules singularités possibles sont des points de croisements de γ et γ' . Lorsque l'on énumère tous les cas de figure, seul un semble problématique (la figure ? représente un point ou la frontière n'est pas une variété), une analyse plus approfondie montre cependant que ce cas est absurde, en effet, les deux parties qui se font face sont connectées par un arc α de C (cf figure ?) ce faisant, la planarité implique qu'il sépare γ et γ' qui pourtant se rejoignent en p_1 et p_2 , ces derniers appartiendraient alors à α .

∂C est donc composée de courbes simples, les cas envisageables sont alors les suivants :

- supposons que ∂C contienne une courbe simple fermée, la connexité de γ et de γ' ainsi que la planarité de S implique que ∂C ne peut contenir d'autre composante, il s'en suit que p_3 est séparé de p_1 et de p_2 par une courbe simple fermée, c'est contradictoire avec le fait qu'ils appartiennent tous les trois à la même fleur.
- ∂C est donc composée de courbes simples non compactes. A quoi ressemblent ces courbes ? soit ζ l'une d'elle, une analyse détaillée (cf figure) montre que les limites de ζ existent et sont dans $\{p_1, p_2\}$, de chaque côté, au bout d'un certain temps, ζ est confondue avec γ , ou bien γ' . Il s'en suit que le nombre de composantes de ∂C n'exède pas 2.

Supposons que les deux limites de ζ soient égales au même bout, par exemple p_1 . Plongée dans S^2 , $\bar{\zeta}$ est une courbe simple fermée, elle divise S^2 en deux disques D_1 et D_2 , l'un d'eux contenant p_2 , disons D_2 . Clairement, C est contenue dans D_1 . Mais revenons à S , soit $(P_n^1)_n$ un représentant de p_1 , il existe $n_0 \geq 0$ tel que $P_{n_0}^1$

n'intercepte pas p_3 , d'autre part, il existe $N > 0$ tel que $\zeta(]-\infty, -N] \cup [N, \infty[) \subset P_{n_0}^1$, ce dernier est connexe, il existe donc un arc α connectant $\zeta(-N)$ et $\zeta(N)$ dans $P_{n_0}^1$, nous avons fabriqué une courbe simple fermée séparant p_1 et p_2 de p_3 (cf figure), c'est une contradiction.

Ainsi ζ a pour limite p_1 et p_2 . Mais alors, ζ est confondue avec γ ou bien γ' (On se sert de l'orientation de C par rapport à celle de γ et γ'). Trois cas se présentent alors, (i) $\partial C = \gamma \cup \gamma'$ avec $\gamma \cap \gamma' = \emptyset$, (ii) $\partial C = \gamma$ ou bien (iii) $\partial C = \gamma'$ les deux derniers cas étant symétriques. Pour (i), on applique la méthode précédente des deux côtés; (ii) veut dire que γ est à droite de γ' et par voie de conséquence, que γ' est à droite de γ (C et S_1 ont la même frontière dans S). Il existe alors un chemin α dans $S_2 \cap S_2'$ connectant γ et γ' , ce chemin arrive sur γ et sur γ' par la droite. D'autre part, γ et γ' sont disjointes mais ont les mêmes limites, dans $S^2, \overline{\gamma \cup \gamma'}$ est une courbe simple fermée, les orientations de γ et de γ' montrent que α connecte les deux disques séparés par $\gamma \cup \gamma'$ (cf figure), contradiction.

Ce qui achève de démontrer que la définition 7 est cohérente \square

Lorsqu'une courbe simple joint deux bouts p_1 et p_2 de la même fleur f , elle partage S en deux parties S_1 et S_2 (corollaire 1), ce qui induit une partition de f en deux ensembles qui correspondent aux bouts p tels que $G(p_1, p_2, p)$ est vraie d'une part et d'autre part ceux pour lesquels $G(p_1, p_2, p)$ est fausse.

Lemme 7 $G(p_1, p_2, p_3) \Leftrightarrow \neg G(p_1, p_3, p_2)$

Lemme 8

Soient $x_1, x_2 \in B(S)$, alors x_1 et x_2 sont les limites d'une même composante compacte γ du bord de S ssi $\sigma(x_1)$ et $\sigma(x_2)$ le sont. De plus, l'orientation de γ induite par S est préservée.

Preuve :

Il faut montrer que x_1 et x_2 sont les limites d'une même composante compacte du bord de S si et seulement si pour tout autre bout x de de la même fleur, $G(x_1, x_2, x)$ est vraie (cela veut aussi dire que γ est orientée par S de x_1 vers x_2) ou bien pour tout autre bout x de de la même fleur, $G(x_1, x_2, x)$ est fausse (cela veut aussi dire que γ est orientée par S de x_2 vers x_1). (\Leftarrow) est facile, l'autre sens paraît plus dur ...

(\Rightarrow) :

Supposons donc que pour tout autre bout x de de la même fleur, $G(x_1, x_2, x)$ est vraie, Soit α un segment séparant x_1 de x_2 (cela peut être la frontière d'un P_n^1 pour n assez grand (vérifier que l'on peut choisir cette frontière connexe), α connecte deux courbes du bord γ et γ' dont l'une, γ par exemple est orientée en direction opposée de celle de x_1 alors que l'autre file en direction de x_1 (on peut voir cela en regardant l'orientation de $\gamma \cup \alpha \cup \gamma'$ induite par l'orientation de P_n^1 , d'ailleurs, nous supposons dans la suite que α est orienté de la sorte : de γ à γ'). Nous allons voir que γ est notre candidat.

Soit ζ une courbe allant de x_1 à x_2 , ne coupant α qu'en un seul point M , montrons que γ est située à droite de ζ . En effet, soit S_1 la partie gauche de ζ , elle lui induit son orientation, cette orientation est déjà induite par $S_1 \cap P_n^1$, or $\zeta \cap P_n^1 \cup \alpha \cap S_1$ appartient au bord de $S_1 \cap P_n^1$, d'autre part, $\zeta \cap P_n^1$ et $\alpha \cap S_1$ sont orientés de façon cohérente par rapport à $S_1 \cap P_n^1$,

mais ζ est orientée en direction de M , donc $\alpha \cap S_1$ est orientée dans le sens opposé, ce qui prouve que l'extrémité de α appartient à S_1 : par voie de conséquence, son origine est à droite de ζ , cette origine appartient à γ : cette dernière est donc située à droite de ζ . Donc les limites de γ sont à droite de ζ , ce qui par hypothèse implique que ce sont x_1 et x_2 \square

6 Résultat principal

Théorème 2

Soient S et S' deux surfaces orientées, $\sigma : B(S) \rightarrow B(S')$ un homéomorphisme échangeant les fleurs et conservant l'ordre cyclique. Alors S et S' sont homéomorphes; de façon plus précise, σ se prolonge en un homéomorphisme (isomorphisme) entre les compactifications $S \cup B(S)$ et $S' \cup B(S')$.

Lemme 9

Soient S_1 et S_2 deux surfaces compactes planaires à bord orientées, $f : \partial S_1 \rightarrow \partial S_2$ un homéomorphisme conservant l'orientation. Alors f est prolongeable en un homéomorphisme entre S_1 et S_2

Pour voir cela, on se ramène au cas du disque en découpant le long d'arcs essentiels \square

Remarque 2 En fait le théorème est une généralisation du lemme 9.

Preuve du théorème :

Nous allons construire par récurrence une suite d'homéomorphismes $f_n : A_n \rightarrow A'_n$ telle que

- (i) les suites $(A_n)_n$ et $(A'_n)_n$ sont croissantes, en fait elles doivent satisfaire les conditions imposées aux B_n .
- (ii) $B_{2n} \subset A_{2n}$ et $B'_{2n+1} \subset A'_{2n+1}$
- (iii) f_{n+1} prolonge f_n .
- (iv) Pour chaque composante U de $\overline{S \setminus A_n}$, si U' est la composante de $S' \setminus A'_n$ telle que $f_n(\text{Fr}U) = \text{Fr}U'$, alors $\sigma(U^*) = U'^*$
- (v) Soit \mathcal{C} (resp. \mathcal{C}') l'ensemble des point du bord de S appartenant à $\text{Fr}A_n$ (resp. $\text{Fr}A'_n$), à tout point x de \mathcal{C} on associe un bout $l(x)$ limite de la demi-droite du bord de S issue de x ne coupant A_n qu'en x . Alors $f_n|_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ est une bijection et $l'(f_n(x)) = \sigma(l(x))$ pour tout $x \in \mathcal{C}$.

Pour commencer on choisit $A_n = A'_n = \emptyset$

On suppose construit les f_n jusqu'au rang $N - 1$ (N impair), on considère alors $m = \min\{n \in \mathbb{N} \mid n \geq N \text{ et } A'_{N-1} \subset B'_n\}$ et $A'_N = B'_m$ (ca, c'est un peu rapide...) considérons une composante connexe C' de la région compacte $\overline{A'_N \setminus A'_{N-1}}$. C'est une surface compacte plane à bord. Le but est de lui associer dans S une surface C ainsi qu'un

homéomorphisme $f : C \rightarrow C'$ tel que $f^{-1}(C' \cap A'_{N-1}) = C \cap A_{N-1}$ et que $f|_{C \cap A_{N-1}} \equiv f_{N-1}|_{C \cap A_{N-1}}$. La méthode que nous allons adopter consiste à assigner une courbe de S à chaque composante du bord de C' de telle sorte que l'ensemble de ces courbes délimitera exactement C .

Il nous faut fixer quelques notations, soient $c'_0, c'_1 \dots c'_k$ les courbes (simples fermées) du bord de C' , on suppose que c'_0 intercepte A'_{N-1} (c'est d'ailleurs la seule). C' hérite d'une orientation de S' , elle en induit une sur les c'_i , on les considère donc munit de cette orientation. Il se peut que pour certaines courbes c'_i interceptent le bord de S' (notons $I = \{0 \leq i \leq k \mid c'_i \cap \partial S' \neq \emptyset\}$ l'ensemble d'indice correspondant), dans ce cas c'_i est formée alternativement de morceaux du bord de S' et de segments correctement plongés, composantes connexes de $\text{Fr}C'$; choisissons l'un d'eux : α'_{i0} (dans le cas où $i = 0$, on choisit $C' \cap A'_{N-1}$), puis numérotions les autres dans leur ordre d'apparition en suivant l'orientation de c'_i : $\alpha'_{i1}, \alpha'_{i2} \dots \alpha'_{ik_i}$. Pour tout $i \notin I$, notons $\alpha'_{i0} = c'_i$ ($k_i = 0$); enfin, pour tout couple (i, j) avec $0 \leq i \leq k$ et $0 \leq j \leq k_i$, Y'_{ij} l'adhérence de la composante connexe de $S' \setminus (\bigcup_{(\tilde{i}, \tilde{j}) \leq_{\text{lex}} (i, j)} \alpha'_{\tilde{i}\tilde{j}})$ voisine de A'_{N-1} (\leq_{lex} désigne l'ordre lexicographique)

Remarquons que la suite des Y'_{ij} est décroissante et que son intersection est exactement C' , en fait on peut noter les c'_i ($i \notin I$) et les α'_{ij} de façon uniforme : d'_0, d'_1, \dots, d'_m dans un ordre évident (obtenu en remplaçant c'_i pour $i \in I$ par $\alpha'_{i0}, \alpha'_{i1} \dots \alpha'_{ik_i}$). Notre méthode de preuve consiste alors à construire par induction d_0, d_1, \dots, d_h (puis considérer les parties Y_h , construites de façon similaire à Y'_h mais à partir des d_h) et un homéomorphisme $f_h : d_0 \cup d_1 \cup \dots \cup d_h \rightarrow d'_0 \cup d'_1 \cup \dots \cup d'_h$ de telle sorte que

- (i) f_h prolonge f_{h-1}
- (ii) L'orientation de d_h induite par celle de d'_h via f_h correspond à celle induite par Y_h
- (iii) deux points de $\partial S' \cap \text{Im}(f_h)$ sont connectés par une composante du bord ssi leurs antécédents par f_h le sont aussi.
- (iv) $Y_h^* = \sigma^{-1}(Y_h'^*)$

Le premier pas de cette induction est donné par f_{N-1} ($f_0 \equiv f_{N-1}|_{d_0}$), supposons donc construit d_0, \dots, d_{h-1} , plusieurs cas se présentent alors :

cas 1 : d'_h est une courbe simple fermée

$Y'_{h-1} \setminus Y_h'^*$ est un ouvert fermé de $B(S')$, et en particulier un compact, il en est donc de même de $\sigma^{-1}(Y'_{h-1} \setminus Y_h'^*) = Y_{h-1}^* \setminus \sigma^{-1}(Y_h'^*)$. On considère $N_h = \{(n, k) \in \mathbb{N}^2 \mid \beta_{n,k} \subset Y_{h-1}^* \setminus \sigma^{-1}(Y_h'^*)\}$, l'ensemble $\{\beta_{n,k} \mid n \in N_h\}$ est un recouvrement ouvert de $Y_{h-1}^* \setminus \sigma^{-1}(Y_h'^*)$, mais comme ce dernier est compact, on peut extraire un sous recouvrement fini, notons \tilde{N}_h le sous ensemble de N_h associé à ce sous recouvrement. Maintenant, grâce au lemme 5, on peut trouver une courbe simple fermée partageant $B(S)$ en deux parties : $\{\beta_{n,k} \mid (n, k) \in N_h\}$ et son complémentaire, on peut choisir cette courbe de telle sorte qu'elle ne coupe aucune d_j déjà construite, appelons-la d_h , elle partage S en deux parties, soit alors U celle qui ne contient pas A_{N-1} , elle ne contient pas non plus B_{N-1} , on a donc $U^* = \sigma^{-1}(Y'_{h-1} \setminus Y_h'^*)$. Or par

construction, $Y_p^* = Y_{p-1}^* \setminus U^* = \sigma^{-1}(Y_{p-1}^*) \setminus (\sigma^{-1}(Y_{h-1}^* \setminus Y_h^*)) = \sigma^{-1}(Y_h^*)$.

Pour étendre f_{h-1} , on établit un homéomorphisme entre d_h et d'_h de telle sorte que les orientations induites respectivement par Y_h et Y'_h sont conservées.

cas 2 : d'_h est un segment correctement plongé

Soient γ'_0 et γ'_1 les composantes du bord de S' connectées par d'_h (on peut supposer que d'_h est orienté (par Y'_h) de γ'_0 à γ'_1), notons $m'_i = \gamma'_i \cap d'_h$ ($i = 0, 1$), on considère le bout p'_i de $B(S')$ limite de la partie de γ'_i non contenue dans Y'_h . Remarquons que γ'_0 est orientée vers p'_0 alors que γ'_1 est orientée dans la direction opposée à celle de p'_1 .

Soient donc $p_i = \sigma^{-1}(p'_i)$, grâce au lemme 8 p_i est limite d'une composante du bord de S , notons la γ_i , de plus, l'orientation des γ_i est la même que celle de leurs correspondantes dans S' .

d_h doit joindre γ_0 à γ_1

On peut s'accorder sur les notations de la figure suivante :

Nous allons construire les antécédents des d_j par induction.

Soient donc deux points $m_i \in \gamma_i$ ($i = 0, 1$), $m_i \in Y_{h-1}$ (c'est possible car $p_0, p_1 \in Y_{h-1}^*$), le but est de les connecter par un arc (orienté de m_0 à m_1) qui réalise la partition de $B(S)$ en $\sigma^{-1}(Y_{h-1}^*) \setminus \sigma^{-1}(Y_h^*)$ et son complémentaire tout en laissant A_{N-1} sur sa gauche. (d'_h laisse A'_{N-1} sur sa gauche).

Soit donc un arc α connectant m_0 et m_1 dans $S \setminus A_{N-1}$, orienté vers m_1 , on peut supposer que α ne coupe aucun d_h déjà construit. De plus, comme p_0 et p_1 appartiennent à la même fleur $f = \sigma^{-1}(f')$ où f' est la fleur de p'_0 et de p'_1 , α sépare S en deux parties.

Remarquons que cet arc ne sépare pas p_0 de p_1 , ceci grâce à l'orientation des courbes γ_0 et γ_1 .

Nous voulons dans un premier temps transformer α de telle sorte qu'il laisse A_{N-1} sur sa gauche. Si c'est déjà le cas, c'est fini. Supposons donc que non, deux cas se présentent alors :

d'_h est un α'_{0j} ($j \neq 0$: l'homéomorphisme est déjà donné par f_{N-1}).

Dans ce cas, A_{N-1} est nécessairement à gauche de α :

On sait que γ_0 est orientée par S en direction de p_0 . Cela implique que la partie de γ_0 se trouvant du côté gauche de α , est celle ne contenant pas p_0 . Soit le chemin θ construit de la façon suivante : on commence par remonter γ_0 à partir de m_0 en sens inverse de son orientation, on rencontre alors l'extrémité de d_{h-1} , on le parcourt jusqu'à son origine, on rencontre alors une composante γ du bord de S , γ est distincte de γ_0 et de γ_1 par conséquent, $\gamma \cap \alpha = \emptyset$, on parcourt alors γ en sens inverse de son orientation, on rencontre alors d_{h-2} , en ainsi de suite. Après un temps fini, on rencontre α_{00} qui est incluse dans A_{N-1} . On a relié A_{N-1} à α par un chemin coupant α par sa gauche en un unique point qui est l'origine de α . A_{N-1} est bien à gauche de α .

d'_h est un α'_{ij} avec $i \neq 0$.

Dans ce cas, A_{N-1} est séparé de m_0 et de m_1 par la courbe simple c_0 (déjà construite), si c_0 emprunte le bord de S , on peut la déplacer légèrement par une isotopie de telle sorte qu'elle

soit un S^1 correctement plongé. Soient \bar{m}_0 et de \bar{m}_1 deux points de c_0 ainsi que deux chemins α_0 de m_0 vers \bar{m}_0 et α_1 de \bar{m}_1 vers m_1 , \bar{m}_0 et de \bar{m}_1 délimitent dans c_0 deux arcs, orientés vers \bar{m}_1 par convention, sur ces deux arcs, seul l'un est correctement orienté par rapport à A_{N-1} (c'est-à-dire que son orientation est induite par celle de c_0 qui laisse A_{N-1} sur sa gauche) : appelons le β , on remplace alors α par $\alpha_0 \cup \beta \cup \alpha_1$.

Soit U la partie droite de α i.e. celle qui ne contient pas A_{N-1} .

On a alors, $U^* \cap f = \sigma^{-1}(\overline{Y'_{h-1} \setminus Y'_h} \cap f')$. Pour voir cela, on vérifie que $\overline{Y'_{h-1} \setminus Y'_h} \cap f'$ est exactement l'ensemble des éléments de f' qui sont à droit de d'_h , s'il existe un bout à gauche de ζ' qui n'appartient pas à Y'_h , il est alors séparé de Y'_h par un d_i pour $i < h$ et donc, il n'appartient pas non plus à Y'_{h-1} , d'autre part, aucun d'_i ne figure à droite de d'_h . Ainsi donc $\overline{Y'_{h-1} \setminus Y'_h} \cap f' = \mathcal{D}_{(p'_0, p'_1)} = \{p'_0, p'_1\} \cup \{p' \in f' \mid \neg G(p'_0, p'_1, p')\}$. Or par hypothèse, $\sigma^{-1}(\mathcal{D}_{(p'_0, p'_1)}) = \mathcal{D}_{(p_0, p_1)} = U^* \cap f$

Reste à arranger α pour ajouter ce qui manque à U^* c'est-à-dire $\sigma^{-1}(Y'_{h-1} \setminus Y'_h) \setminus U^*$ et retirer ce qu'il y a en trop : $U^* \setminus \sigma^{-1}(Y'_{h-1} \setminus Y'_h)$.

Pour cela remarquons que $\sigma^{-1}(Y'_{h-1} \setminus Y'_h) \setminus U^*$ est un ouvert fermé, saturé pour la relation d'appartenance à la même fleur (la seule fleur susceptible d'être coupée en deux est f). Par un procédé similaire au cas 1, on peut construire une courbe simple fermée ϵ en découpant. On connecte maintenant α à ϵ par un arc puis on prend la frontière d'un voisinage régulier du tout... On utilise la même méthode pour retirer $U^* \setminus \sigma^{-1}(Y'_{h-1} \setminus Y'_h)$ de U^* .

Nous avons finalement construit un arc qui laisse A_{N-1} sur sa gauche et qui réalise la partition en $\sigma^{-1}(Y'_{h-1} \setminus Y'_h) \setminus \sigma^{-1}(Y'_h)$ et son complémentaire. On peut donc le noter d_h et établir un homéomorphisme $f_h : d_h \rightarrow d'_h$ respectant l'orientation.

On arrive finalement à construire tous les d_h ; grâce à la condition (iii) portant sur f_h , on peut construire une extension de f_h de $\bigcup c_i$ sur $\bigcup c'_i$. On a enfin $Y_n^* = \emptyset$, cela implique que Y_n est une surface compacte, son bord est exactement $\bigcup c_i$: c'est la partie C que nous cherchions, par le lemme 9 elle est homéomorphe à C' . En effectuant cette construction sur chaque composante connexe de $A'_N \setminus A'_{N-1}$, on obtient f_N \square

References

- [1] Ahlfors L. W., Sario L., *Riemann Surfaces*. Princeton University Press (1960).
- [2] Hocking J. G., Young G. S. *Topology*. Dover Publications, Inc., New York.
- [3] Massey W. S. *Algebraic Topology : An Introduction*. Graduate Text in Mathematics 56.
- [4] Richards I., *On The Classification of Non Compact Surfaces* Trans. Amer. Math. Soc 106 p259-269 (1963) .
- [5] Whitehead J. H. C., *Simplicial spaces, nuclei and m -groups*. Proc. London Math. Soc. 45 p243-327 (1939).