

# Chapitre 1

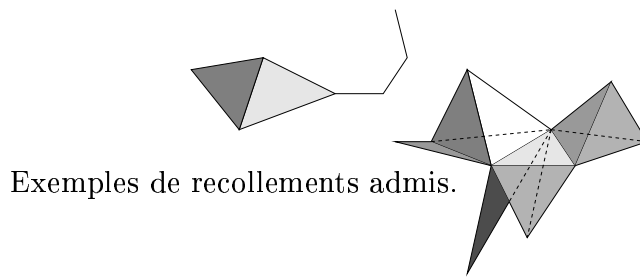
## Concepts de base

Ce chapitre est consacré à l'introduction aux concepts de base. D'abord, nous donnerons une définition des complexes simpliciaux. Ensuite, nous définirons les grammaires de remplacement d'hyperarcs ainsi que les hypergraphes HR-équationnels; nous discuterons à ce propos de l'idée de régularité arborescente. Enfin, nous introduirons le concept de polyèdre HR-équationnel, essentiel dans notre travail. Pour finir, nous définirons le concept de variété; à cet égard, nous aborderons quelques questions algorithmiques préliminaires.

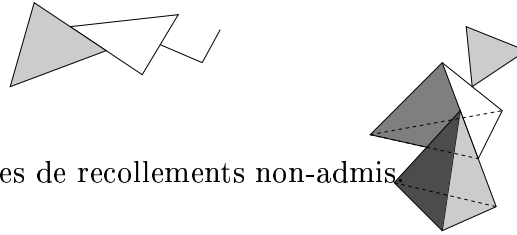
### 1.1 Polyèdres HR-équationnels

#### 1.1.1 Complexes simpliciaux, polyèdres et hypergraphes

Le concept de *complexe simplicial* [FM97, HY61, Mas67, Rot88, RS72] consiste à fabriquer des espaces topologiques appelés *polyèdres* en recollant entre eux des segments, des triangles, des tétraèdres et plus généralement des *simplexes*, i.e. enveloppes convexes d'ensembles finis de points indépendants dans un espace affine (cf. [Ber90]). Le recollement de deux simplexes entre eux se fait, comme le dicte l'intuition, en identifiant deux de leurs faces. Ce que l'on appelle ici *face* d'un simplexe généralise le concept commun : c'est l'enveloppe convexe d'un sous-ensemble non vide de ses sommets. Par exemple, on peut recoller deux tétraèdres en identifiant deux de leurs faces triangulaires; mais on peut aussi les recoller simplement sur des arêtes ou même sur des sommets. Ces recollements de simplexes se font selon l'idée la plus simple et les cas pathologiques (cf. figure 1.1) ne sont pas considérés, de même qu'on ne recollera pas un simplexe sur lui-même. Notons que ce concept de recollement est purement topologique et ne tient pas compte des propriétés métriques des simplexes : on considère en effet que deux simplexes ayant le même nombre de sommets sont des objets équivalents. Un complexe simplicial est la donnée d'un polyèdre muni d'une décomposition en simplexes. Une telle décomposition est appelée une *triangularisation*. La structure combinatoire sous-jacente est un *hypergraphe non orienté*, i.e. un couple  $(V, E)$  où  $V$  est un ensemble de sommets et  $E$  est un ensemble de parties finies de  $V$ , les éléments de  $E$  sont appelés les *hyperarêtes* [Ber73, Ber83, Ber87]. L'ensemble des sommets de cet hypergraphe non orienté est l'union des ensembles de sommets de tous les simplexes du complexe simplicial en question quotientée par la relation d'équivalence induite par les identifications de faces. Chaque simplexe est codé



Exemples de recollements admis.



Exemples de recollements non-admis.

FIG. 1.1: polyèdres

par une hyperarête qui est simplement l'ensemble des classes d'équivalence de ses sommets.

### Définition 1 (Complexes simpliciaux)

Formellement, un **complexe simplicial** est un 3-uplet  $(K, H, \{\varphi_e\}_{e \in E})$  où

- $K$  est un espace topologique;
- $H = (V, E)$  est un hypergraphe non-orienté;  $V$  est l'ensemble des sommets de  $H$  et  $E$  son ensemble d'hyperarêtes; les hyperarêtes satisfont la propriété d'hérédité suivante : toute partie non-vide d'une hyperarête de  $H$  est aussi une hyperarête de  $H$ ;
- pour tout  $e \in E$ ,  $\varphi_e : \sigma_e \rightarrow K$  est un plongement, i.e. une application continue qui est un homéomorphisme entre son domaine et son image, où  $\sigma_e$  est un simplexe dont le nombre de sommets est égal au nombre d'éléments de  $e$  tel que pour toute paire d'hyperarêtes  $e_1, e_2$  de  $E$ ,  $\varphi_{e_1}(\sigma_{e_1}) \cap \varphi_{e_2}(\sigma_{e_2})$  est égale à  $\varphi_{e_1 \cap e_2}(\sigma_{e_1 \cap e_2})$  si  $e_1 \cap e_2 \neq \emptyset$  et à l'ensemble vide sinon; et pour  $i = 1, 2$ ,  $\varphi_{e_i}^{-1} \circ \varphi_{e_1 \cap e_2}$  est un homéomorphisme entre  $\sigma_{e_1 \cap e_2}$  et une face de  $\sigma_i$ ;
- $K = \bigcup_{e \in E} \varphi_e(\sigma_e)$ .

Un **polyèdre** est un espace topologique pour lequel il existe un complexe simplicial dont il est la première composante, un tel complexe simplicial est appelé une **triangularisation** du polyèdre en question. Une application continue d'un polyèdre triangularisé<sup>1</sup> sur un autre polyèdre triangularisé sera dite **simpliciale** si l'image de tout simplexe est un simplexe de même dimension.

1. i.e. un polyèdre muni d'une triangularisation

La donnée d'un hypergraphe définit de façon naturelle un complexe simplicial, et donc un polyèdre. En effet, soit  $H = (V, E)$ , un hypergraphe dont l'ensemble des hyperarêtes satisfait la condition d'hérédité énoncée précédemment. D'abord, à chaque hyperarête  $e \in E$ , on associe un simplexe  $\sigma_e$  dont toutes les arêtes sont de longueur 1, i.e. un simplexe équilatéral de côté 1, muni d'une bijection  $\tau_e$  entre les sommets de  $\sigma_e$  et les éléments de  $e$ ; on choisit les  $\sigma_e$  deux à deux disjoints. On définit ensuite le recollement de tous ces simplexes : pour ce faire, on considère pour toute face  $f$  de tout simplexe  $\sigma_e$  l'isométrie unique  $\psi_f : f \rightarrow \sigma_{e'}$  telle que pour tout sommet  $x$  de  $f$ ,  $\psi_f(x) = \tau_{e'}^{-1} \circ \tau_e(x)$ , où  $e'$  est l'hyperarête incluse dans  $e$  qui est définie par les sommets de  $f$  via  $\tau_e$ , i.e.  $e' = \{\tau_e(x) \mid x \text{ sommet de } f\}$ . La famille  $\{\psi_f\}$  définit alors une relation d'équivalence sur  $\bigcup_{e \in E} \sigma_e$  engendrée par clôture symétrique et transitive par l'ensemble des couples de la forme  $(x, \psi_f(x))$ . Le quotient de  $\bigcup_{e \in E} \sigma_e$  par cette relation d'équivalence est par définition le polyèdre associé à  $H$ . On peut vérifier que cette construction définit un complexe simplicial. Le polyèdre associé, que l'on notera  $|H|$ , dépend du choix des  $\sigma_e$ ; néanmoins, on montre que sa classe d'homéomorphisme en est indépendante<sup>2</sup>.

Une autre façon de construire un polyèdre associé à  $H$ , homéomorphe au précédent, consiste en la méthode suivante : Soit  $\ell^2(\mathbb{R})$  l'espace des suites réelles de carré sommable; soit  $(b_n)_{n \geq 0}$  sa base hilbertienne canonique ( $b_n = (\delta_{n,k})_{k \geq 0}$ ). On se donne une injection  $\tau$  de  $V$  dans  $\{b_n \mid n \geq 0\}$ . Pour chaque hyperarête  $e$  de  $H$ , on considère  $\sigma_e$ , l'ensemble de tous les barycentres à coefficients positifs de  $\{\tau(v) \mid v \in e\}$ .  $K$  est alors défini comme l'union de tous les  $\sigma_e$ .

Un polyèdre est ainsi une représentation topologique d'un hypergraphe non orienté. Notons que pour les complexes simpliciaux de dimension 1, on n'assemble que des sommets et des segments. De tels objets sont codés par des hypergraphes dont les hyperarêtes, à la condition d'hérédité près, sont simplement des paires de sommets; ce sont en fait des graphes non-orientés. Ainsi les représentations graphiques usuelles des graphes non-orientés n'évoquent rien d'autre que les polyèdres associés.

### 1.1.2 Hypergraphes HR-équationnels

L'objet de ce mémoire est l'étude de propriétés algorithmiques de certains polyèdres infinis constructifs. Nous nous attacherons particulièrement à étudier des polyèdres donnés par des triangularisations générées par des grammaires de graphes. Pour ce faire, nous avons besoin d'une structure d'hypergraphe plus riche que celle d'hypergraphe non orienté, ceci en vue de définir avec rigueur une généralisation aux hypergraphes de l'opération de concaténation de mots.

Suivant [Cou90b, Roz97], nous appellerons donc *hypergraphe*, ce qui en toute rigueur pourrait s'appeler *multi-hypergraphe orienté*, un 6-uplet  $(V, E, A, \text{vert}, \text{lab}, \text{src})$  où  $V$  est l'ensemble au plus dénombrable des sommets;  $E$  est l'ensemble des *hyperarcs*; la relation d'adjacence est codée par l'application  $\text{vert} : E \rightarrow V^*$  qui associe à chaque hyperarc une liste ordonnée de sommets; la longueur de cette liste est appelée l'*arité* de l'hyperarc; les hyperarcs sont étiquetés par des éléments de  $A$  qui est un ensemble de symboles; les étiquettes sont définies

---

2. Plus précisément,  $|H|$  n'est défini qu'à homéomorphisme simplicial près

par l'application  $lab : V \cup E \rightarrow A$ ; on distingue dans chaque hypergraphe une liste de sommets  $src \in V^*$  dont les éléments sont appelés les *sources*. Un sommet n'apparaissant pas dans cette liste est dit *interne*. Le nombre de sources d'un hypergraphe est appelé son *type*. Notons qu'un hypergraphe  $H = (V, E, A, vert, lab, src)$  définit trivialement un hypergraphe non orienté dont l'ensemble des sommets est  $V$  et l'ensemble des hyperarêtes est défini par  $vert$ ; il définit donc aussi un complexe simplicial.

Un *système déterministe de remplacement d'hyperarc* est un ensemble  $\{H_b\}_{b \in B}$  d'hypergraphes finis indicés sur un ensemble fini de symboles  $B$ . Un tel système définit une transformation d'hypergraphe consistant à remplacer chaque hyperarc étiqueté par un élément  $b$  de  $B$  par l'hypergraphe correspondant  $H_b$ . Les sources de  $H_b$  sont alors recollées une à une sur les sommets de l'hyperarc en question en respectant les ordres définis par  $src$  et  $vert$ . Une telle transformation n'est possible que sur un hypergraphe étiqueté sur un ensemble  $A$  contenant  $B$  tel que pour chacun de ses hyperarcs  $e$  dont l'étiquette est un élément  $b$  de  $B$ , l'arité de  $e$  est égale au type de  $H_b$ , et pour tout  $i$ , son  $i$ -ième sommet possède la même étiquette que la  $i$ -ième source de  $H_b$ . Les symboles de  $B$  sont dit *non terminaux*, ceux de  $A \setminus B$  sont dit *terminaux*. On appelle *grammaire déterministe de remplacement d'hyperarcs* un couple  $(b_0, \theta)$  où  $\theta = \{H_b\}_{b \in B}$  est un système déterministe de remplacement d'hyperarc et  $b_0$  est un élément de  $B$  appelé *symbole initial*.

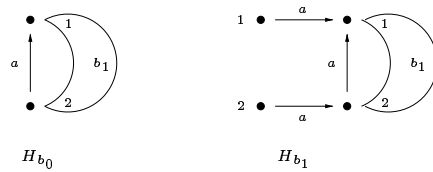


FIG. 1.2: On donne ici un exemple de système déterministe de remplacement d'hyperarc formé de deux hypergraphes  $H_{b_0}$  et  $H_{b_1}$ . L'ensemble de symboles d'étiquettes est  $\{a, b_0, b_1\}$ ; les symboles non terminaux sont  $b_0$  et  $b_1$ . Les hyperarcs terminaux (i.e. étiquetés par  $a$ ) sont d'arité 2 et sont représentés par des flèches. Les hyperarcs non terminaux sont représentés sous forme de croissants de lune.  $H_{b_1}$  comporte deux sources (les sommets numérotés de 1 à 2),  $H_{b_0}$  n'en a pas.

Cette notion offre un moyen simple de génération d'hypergraphes infinis par récurrence. Les itérations successives de la transformation d'hypergraphe associée à une grammaire produisent une suite d'hypergraphes finis "emboîtés". On définit les hypergraphes *HR-équationnels* comme limites inductives de telles suites.

**Définition 2 (Hypergraphes HR-équationnels)** Un *hypergraphe HR-équationnel*  $G$  est défini au moyen d'une grammaire déterministe de remplacement d'hyperarc  $(b_0, \theta)$ . On suppose que la transformation associée à  $\theta = \{H_b\}_{b \in B}$  est définie sur chaque  $H_b$ , i.e. pour tout  $b \in B$ , tout hyperarc  $e$  de  $H_b$ , étiqueté par un symbole non-terminal  $b'$ , est d'arité égale au type de  $H_{b'}$  et pour tout  $i$ , son  $i$ -ième sommet possède la même étiquette que la  $i$ -ième source de  $H_{b'}$ . On suppose aussi que les sources de chaque  $H_b$  sont deux à deux distinctes.  $G$  est alors défini de la façon suivante: soit  $(G_n)_{n \geq 0}$  la suite d'hypergraphes définie par récurrence par  $G_0 = H_{b_0}$  et pour tout  $n \geq 0$ ,  $G_{n+1} = \theta(G_n)$  (pour un exemple, voir figure 1.3). Pour tout  $n \geq$

0, on considère l'hypergraphe  $\tilde{G}_n$  obtenu à partir de  $G_n$  en supprimant les hyperarcs étiquetés sur  $B$ , i.e. les hyperarcs non-terminaux. Pour tout  $n \geq 0$ ,  $\tilde{G}_n$  se plonge canoniquement dans  $\tilde{G}_{n+1}$  (pour un exemple, voir figure 1.4), soit  $i_n : \tilde{G}_n \rightarrow \tilde{G}_{n+1}$  le plongement.  $\bigcup i_n$  induit alors une relation d'équivalence sur  $\bigcup_{n \geq 0} V_{\tilde{G}_n} \cup E_{\tilde{G}_n}$  dont l'hypergraphe quotient est par définition  $G$ .

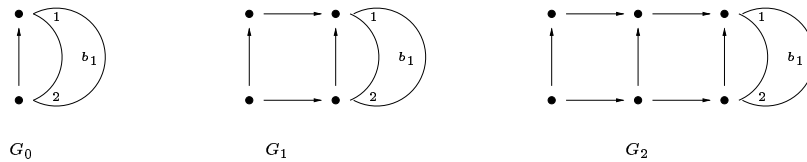


FIG. 1.3: On montre ici les deux premières itérations de la transformation associée au système présenté en figure 1.2.  $G_0$  est en fait  $H_{b_0}$  (cf. définition 2);  $G_1$  (respectivement  $G_2$ ) est obtenu à partir de  $G_0$  (respectivement  $G_1$ ) en recollant  $H_{b_1}$  à la place de l'hyperarc non terminal étiqueté par  $b_1$ . Pour alléger la figure, le symbole  $a$  n'est pas représenté.

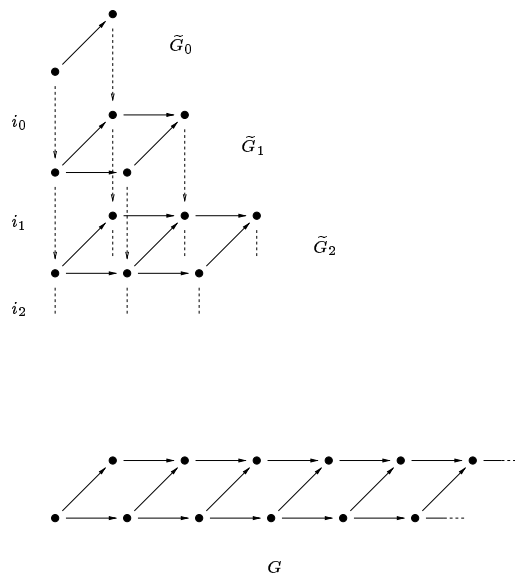


FIG. 1.4: Construction de l'hypergraphe HR-équationnel défini par le couple  $(b_0, \{H_{b_0}, H_{b_1}\})$  où  $H_{b_0}, H_{b_1}$  sont représentés en figure 1.2. On obtient une échelle infinie.

### 1.1.3 Arborescence et régularité

La notion d'hypergraphe HR-équationnel donne naissance à un concept de *régularité* dans la classe des *hypergraphes arborescents*.

Afin de préciser cette idée, nous avons besoin des notions de *décomposition* et de *largeur arborescente* introduites dans [RS84] (voir aussi [Cou90b]). Une décomposition arborescente d'un hypergraphe  $G$  est un couple  $(U, f)$  formé d'un arbre non orienté  $U$  et d'une application  $f : V_U \rightarrow 2^{V_G}$  tel que tout sommet de  $G$  appartient à l'image d'un des nœuds de  $U$ , i.e.  $V_G = \bigcup_{i \in V_U} f(i)$ ,  $2^{V_G}$  désigne l'ensemble des parties de  $V_G$ ; tout hyperarc de  $G$  a tous ses sommets dans un  $f(i)$  pour au moins un  $i \in V_U$ ; si  $i, j, k \in V_U$  sont tels que  $j$  est sur le chemin sans boucle unique connectant  $i$  et  $k$ , alors  $f(i) \cap f(k) \subseteq f(j)$ ; enfin, toutes les sources de  $G$  appartiennent à un  $f(i)$  pour au moins un  $i \in V_U$ . La *largeur* d'une telle décomposition est par définition égale à  $\max\{\text{card}(f(i)) \mid i \in V_U\} - 1$ ; la *largeur arborescente* d'un hypergraphe  $G$  est la largeur minimale d'une décomposition arborescente de  $G$ . On dira d'un hypergraphe infini qu'il est *arborescent* si sa largeur arborescente est finie. Les arbres sont arborescents, leur largeur arborescente est de 1; la grille infinie par contre, est de largeur arborescente infinie (cf. [RS84]).

Les hypergraphes HR-équationnels sont arborescents. Pour le voir, nous allons développer une construction directe de ces hypergraphes empruntée à [Cou90b]. Soit  $G$  un hypergraphe HR-équationnel défini par une grammaire  $(b_0, \theta)$  où  $b_0 \in B$  et  $\theta = \{H_b\}_{b \in B}$ . Pour tout  $b \in B$ , soit  $m_b$  le nombre d'hyperarcs non terminaux de  $H_b$ . Soit  $m$  le maximum des  $m_b$ . Dans chaque  $H_b$ , on ordonne linéairement l'ensemble des hyperarcs non terminaux. Soit maintenant, pour tout  $b \in B$ , l'arbre  $T_b$  étiqueté sur  $B$  défini de façon inductive par les propriétés suivantes: la racine de  $T_b$  est étiquetée par  $b$ ; un nœud de  $T_b$  étiqueté par  $b' \in B$  possède  $m_{b'}$  fils et pour  $j = 1, \dots, m_{b'}$  son  $j$ -ième fils est étiqueté par le même symbole de  $B$  que le  $j$ -ième hyperarc non terminal de  $H_{b'}$ .  $T_b$  est appelé l'*arbre syntactique* de symbole  $b$  associé à  $\theta$  (cf. figure 1.8). On obtient  $G$  à partir de  $T_{b_0}$  de la façon suivante: on associe à chaque nœud  $\mu$  de  $T_{b_0}$  une copie  $\tilde{H}_\mu$  de  $\tilde{H}_{b_\mu}$  où  $b_\mu$  est le symbole d'étiquette de  $\mu$  et  $\tilde{H}_{b_\mu}$  désigne l'hypergraphe obtenu à partir de  $H_{b_\mu}$  après avoir supprimé tout ses hyperarcs non terminaux. La construction de  $G$  se fait alors en recollant les  $\tilde{H}_{b_\mu}$  entre eux le long des arêtes de  $T_{b_0}$ . Si par exemple,  $\mu'$  est le  $j$ -ième fils de  $\mu$ ,  $\tilde{H}_{\mu'}$  est recollé sur  $\tilde{H}_\mu$  à la place du  $j$ -ième hyperarc non terminal. On obtient finalement une décomposition arborescente  $(T_{b_0}, f)$  en définissant pour tout nœud  $\mu$  de  $T_{b_0}$ :  $f(\mu) = V_{\tilde{H}_\mu}$ . Cette décomposition est de largeur finie.

Par la suite, nous utiliserons aussi une notion plus forte que l'arborescence, basée sur le concept de *décomposition fortement arborescente*. Une décomposition arborescente  $(U, f)$  sera dite *fortement arborescente* si l'image par  $f$  de tout nœud de  $U$  engendre un sous-graphe connexe. On vérifie que la notion de forte arborescence est strictement plus forte que celle d'arborescence. Néanmoins, on montre que tout hypergraphe HR-équationnel est fortement arborescent. Par ailleurs, cette notion possède une interprétation géométrique: Un graphe connexe est fortement arborescent si et seulement si il est quasi-isométrique à un arbre<sup>3</sup>.

---

3. On appelle *quasi-isométrie* une application  $\varphi : X \rightarrow Y$  d'un espace métrique dans un autre telle qu'il existe deux réels  $\lambda$  et  $c$  tels que pour tout  $x, x' \in X$ :  $\frac{1}{\lambda}d(x, x') - c < d(\varphi(x), \varphi(x')) < \lambda d(x, x') + c$ ; une telle application est dite *quasi-surjective* si pour tout point  $y$  de  $Y$  il existe un point  $x$  de  $X$  tel que  $d(\varphi(x), y) < c$ ; dans ce cas,  $X$  et  $Y$  sont dits *quasi-isométriques* (pour plus de détails, cf. [GdlH90, Gro87, CDP90]).

La régularité annoncée plus haut provient du fait que l'arbre syntactique  $T_{b_0}$  est un *arbre régulier* [Cou83, Tho90] en ce sens qu'il ne possède qu'un nombre fini de sous-arbres à isomorphisme près : les  $T_b$  pour  $b \in B$  (cf. figure 1.8). Un arbre régulier est un objet *a priori* infini. Mais il est cependant décrit par une donnée finie : un *multi-graphe orienté pointé* fini, i.e. un hypergraphe fini de type 1 dont les hyperarcs sont tous d'arité 2; l'unique source d'un tel hypergraphe est souvent appelée sa *racine*. Le codage se fait de la façon suivante : soit  $t$  un arbre étiqueté régulier. Notons que  $t$  est nécessairement de degré borné; l'ordre défini entre les fils d'un nœud donné est décrit par un étiquetage des arcs de  $t$ . On considère le multi-graphe orienté pointé  $\Gamma$  dont les sommets sont les classes d'isomorphisme des sous-arbres de  $t$ , l'étiquette d'un sommet est celle de la racine du sous-arbre qui lui est associé; la racine de  $\Gamma$  est la classe d'isomorphisme de  $t$  lui-même; enfin, pour chaque classe de sous-arbre  $[t']$  et pour chaque fils  $x$  de la racine de  $t'$ , on définit un arc dans  $\Gamma$  qui connecte  $[t']$  à  $[t_x]$ , où  $t_x$  désigne le sous-arbre de  $t'$  de racine  $x$ ; on affecte cet arc de la même étiquette que celle l'arc connectant la racine de  $t'$  à  $x$ . Réciproquement, étant donné un multi-graphe orienté pointé fini  $\Gamma$  de racine  $v_0$  dont les sommets sont étiquetés, on considère l'arbre régulier  $t$  dont les nœuds sont les chemins dans  $\Gamma$  d'origine  $v_0$ . L'étiquette d'un tel chemin sera définie comme étant celle de son dernier sommet. Un chemin  $\alpha$  sera le père d'un chemin  $\alpha'$  si et seulement si  $\alpha$  est préfixe de  $\alpha'$  et leurs longueurs diffèrent de 1; l'étiquette de l'arc connectant  $\alpha$  à  $\alpha'$  est celle du dernier arc emprunté par  $\alpha'$ . On vérifie facilement que  $t$  est régulier;  $t$  est appelé le *développement* de  $\Gamma$ . Le concept de multi-graphe orienté pointé fini allié à l'usage que nous en faisons est très proche de celui d'automate à nombre fini d'états. Néanmoins, la notion d'état final n'est pas présente ici; de plus, nous considérerons dans la suite des arbres réguliers dont seulement les sommets sont étiquetés.

Notons que le concept de développement de graphe ou d'automate se rapproche de celui de revêtement de graphe. Soit  $\Gamma$  un graphe connexe, par *revêtement* de  $\Gamma$  nous entendons un couple  $(\tilde{\Gamma}, p)$  où  $\tilde{\Gamma}$  est un graphe connexe et  $p : \tilde{\Gamma} \rightarrow \Gamma$  est un homomorphisme surjectif tel que pour tout couple  $(\tilde{v}, v) \in V_{\tilde{\Gamma}} \times V_{\Gamma}$  avec  $p(\tilde{v}) = v$ , le sous-graphe de  $\tilde{\Gamma}$  formé du sommet  $\tilde{v}$  et des arcs qui le contiennent s'applique isomorphiquement par  $p$  sur le sous-graphe de  $\Gamma$  formé du sommet  $v$  et des arcs qui le contiennent<sup>4</sup>. Un revêtement  $(\tilde{\Gamma}, p)$  sera dit *universel* si tout revêtement de  $\tilde{\Gamma}$  lui est isomorphe. On montre que le revêtement universel d'un graphe fini est un graphe orienté connexe sans cycles qui est *fortement régulier* en ce sens que l'action de son groupe d'automorphisme sur l'ensemble de ses sommets possède un nombre fini d'orbites; à peu de choses près, on peut dire que c'est un arbre régulier. La réciproque est fautive; cependant, on montre que le concept de développement d'un multi-graphe fini pointé coïncide avec celui de revêtement universel si l'on affaiblit la définition des revêtements comme suit : nous appellerons *revêtement sortant* d'un graphe connexe  $\Gamma$  tout couple  $(\tilde{\Gamma}, p)$  où  $\tilde{\Gamma}$  est un graphe connexe et  $p : \tilde{\Gamma} \rightarrow \Gamma$  est un homomorphisme surjectif tel que pour tout couple  $(\tilde{v}, v) \in V_{\tilde{\Gamma}} \times V_{\Gamma}$  avec  $p(\tilde{v}) = v$ , le sous-graphe de  $\tilde{\Gamma}$  formé du sommet  $\tilde{v}$  et de ses arcs sortants, i.e. les arcs dont il est l'origine, s'applique isomorphiquement par  $p$  sur le sous-graphe de  $\Gamma$  formé du sommet  $v$  et de ses arcs sortants; cette notion est étudiée dans [Sak99].

---

4. Cette définition diffère légèrement de celle des 1-revêtements qui est usuelle en théorie des graphes.

Cette régularité confère aux hypergraphes HR-équationnels des propriétés algorithmiques importantes. Pour donner à cette remarque un sens plus précis, il nous est nécessaire d'introduire le langage de la logique monadique du second ordre (pour une définition rigoureuse, voir page 97, ou bien [Gur85, Tho, Cou90a, Cou97]; pour une initiation à la logique en informatique théorique, voir [LdR96]). Il s'agit des formules logiques ayant trait aux hypergraphes dont les quantifications ne se font que sur des ensembles de sommets ou d'hyperarcs. Ces formules utilisent des variables, qui prennent pour valeurs des ensembles de sommets ou d'hyperarcs; elles sont construites, à l'aide des connecteurs logiques habituels, à partir de formules élémentaires exprimant l'adjacence et les étiquettes. Un résultat fondamental de [Cou89], qui généralise [MS83, MS85], est que l'on peut décider de façon effective si un hypergraphe HR-équationnel donné satisfait une propriété exprimée par une formule donnée de la logique monadique du second ordre. Notons que ce résultat tire ses racines dans [Rab69] où le concept de régularité évoqué plus haut est utilisé pour démontrer la décidabilité de la logique monadique du second ordre des arbres. Les conséquences en matière de décidabilité sont importantes. La connexité par exemple, est exprimable en logique monadique du second ordre (cf. [Cou89] ou bien chapitre 3); il existe donc un algorithme pour décider si un hypergraphe HR-équationnel est connexe. Cette méthode conduit aussi à une solution algorithmique au problème de l'isomorphisme des hypergraphes HR-équationnels [Cou90b]. En effet, la classe d'isomorphisme d'un hypergraphe HR-équationnel est caractérisée par une formule monadique du second ordre que l'on peut construire de façon effective. Ainsi, on peut décider si deux hypergraphes HR-équationnels sont isomorphes en testant si l'un satisfait la formule caractérisant l'autre à isomorphisme près. Ce résultat est essentiel pour nous : restreint au cas des graphes, il montre que le problème de l'homéomorphisme des complexes simpliciaux HR-équationnels de dimension 1 est décidable.

### 1.1.4 Polyèdres HR-équationnels

#### Définition 3 (Polyèdres HR-equationnels)

*On dira d'un complexe simplicial qu'il est HR-équationnel si son hypergraphe est HR-équationnel. De même, un polyèdre sera dit HR-équationnel s'il possède une triangularisation HR-équationnelle.*

Comme tout hypergraphe fini est HR-équationnel [Cou89], on a immédiatement le résultat suivant :

#### Proposition 1.1.1 (Complexe simpliciaux finis)

*Tout complexe simplicial fini est HR-équationnel. En particulier, toute variété topologique compacte de dimension inférieure ou égale à 3 possède une triangularisation HR-équationnelle.*

#### Exemple 1.1.1 (La Sphère à cornes)

La surface non compacte sous-jacente à la célèbre "Sphère à corne" (cf. [HY61]) est une sphère privée d'un ensemble de Cantor. Elle possède une triangularisation HR-équationnelle.

Cette surface, non compacte, peut être en effet représentée comme la surface d'un arbre binaire infini complet légèrement épaissi. Ce point de vue permet de mettre en évidence une décomposition régulière en paires de pantalons (cf. figure 1.5). Cette décomposition conduit à la génération d'une triangularisation par une grammaire de remplacement d'hyperarcs.



Une paire de pantalons peut être obtenue comme recollement de triangles, i.e. un complexe simplicial de dimension 2 (cf. figure 1.6). Et cette triangularisation est elle-même codée par un hypergraphe. On obtient donc une triangularisation de la sphère privée d'un ensemble de Cantor en recollant une infinité de copies de cet hypergraphe. C'est la régularité de ce recollement qui lui permet d'être codé par une grammaire de remplacement d'hyperarcs présentée dans les figures 1.7 et 1.9.

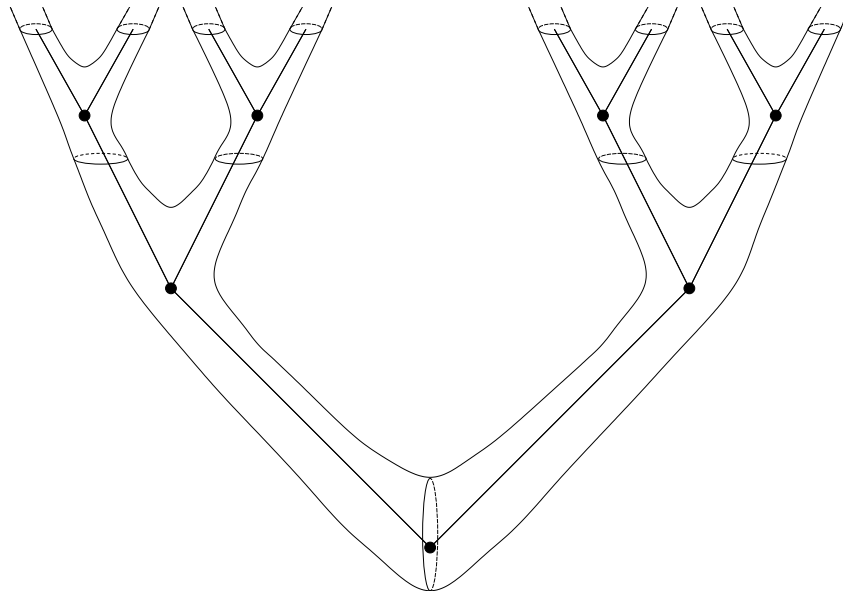


FIG. 1.5: La sphère privée d'un ensemble de Cantor peut être représentée comme la surface d'un arbre binaire infini complet légèrement épaissi.

## 1.2 Variétés

Le travail exposé dans ce mémoire concerne essentiellement le cas des *variétés topologiques* [BG87, Mas67, Rot88, Thu97]. Ce sont des polyèdres connexes “localement simples”, en ceci que chacun de leurs points possède un voisinage homéomorphe à  $\mathbb{R}^n$ , pour un entier naturel  $n$  fixé appelé la *dimension* de la variété. Nous étudierons également le cas des variétés *à bord*, i.e. les polyèdres dont chaque point possède un voisinage homéomorphe à  $\mathbb{R}^n$  ou bien à un demi-espace fermé  $\{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n \geq 0\}$ . Les variétés de dimension 2 sont des objets familiers: ce sont les surfaces; le plan, la sphère ou encore le tore en sont des exemples classiques. Ils se généralisent en dimension  $n$  quelconque en considérant respectivement l'espace  $\mathbb{R}^n$ , la  $n$ -sphère  $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\|_2 = 1\}$  et le tore de dimension  $n$  que l'on peut définir comme le produit cartésien de  $n$  cercles  $S^1 \times \dots \times S^1$ . Notons que les exemples 1.1.1 et 1.2.1 décrivent respectivement des variétés non compactes de dimension 2 et 3.

Tous les exemples évoqués ci-dessus sont des polyèdres HR-équationnels; la  $n$ -sphère et le tore de dimension  $n$  sont HR-équationnels, comme d'ailleurs toutes les variétés compactes

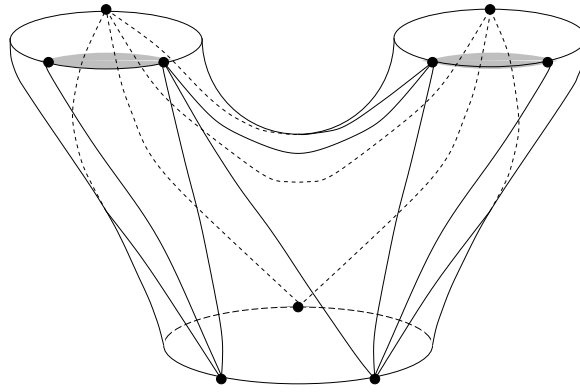


FIG. 1.6: *Triangularisation d'une paire de pantalons : on obtient une paire de pantalons (i.e. une sphère privée de trois disques ouverts disjoints) en recollant entre eux 11 triangles.*

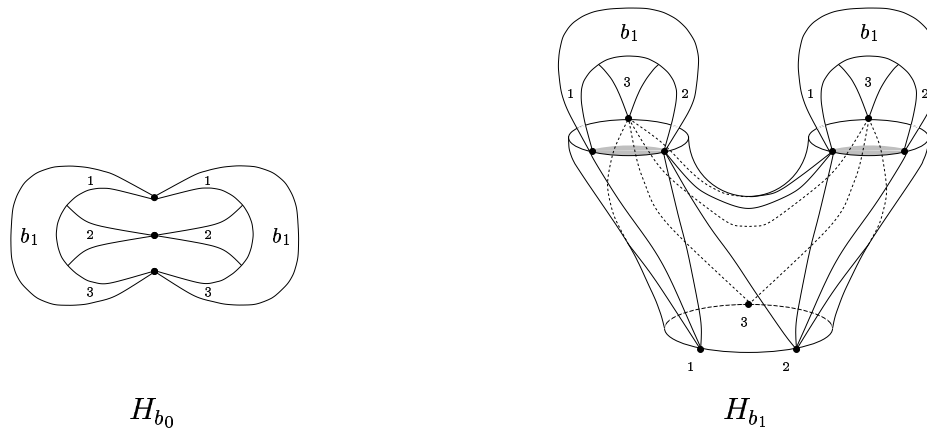


FIG. 1.7: *La grammaire présentée ici permet de générer une triangulation de la sphère privée d'un ensemble de Cantor. Le système associé est formé de deux hypergraphes  $H_{b_0}$  et  $H_{b_1}$ .  $H_{b_0}$  comporte trois sommets et deux hyperarcs terminaux d'arité 3. Les hyperarcs de  $H_{b_1}$ , qui sont d'arité 3, forment la triangulation d'une paire de pantalons (cf. figure 1.6). Les symboles non terminaux n'apparaissent pas dans la figure. On peut vérifier que l'hypergraphe HR-équationnel défini par  $(b_0, \{H_{b_0}, H_{b_1}\})$  code une triangulation de la sphère privée d'un ensemble de Cantor.*

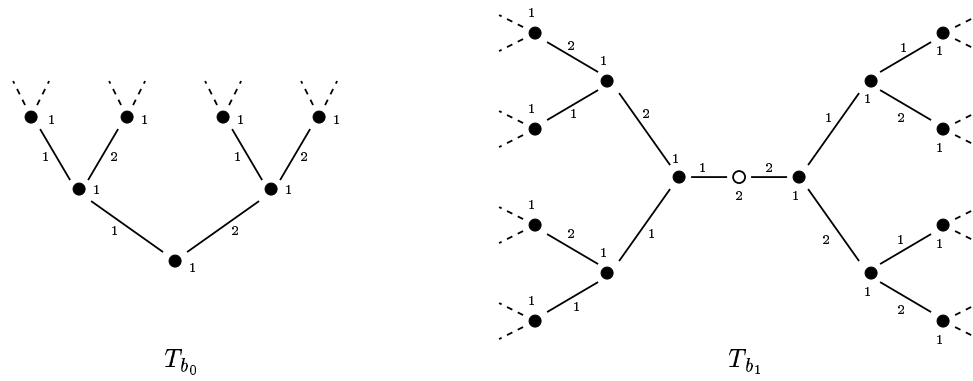


FIG. 1.8: Arbres syntactiques associés à la grammaire présentée dans la figure 1.7.

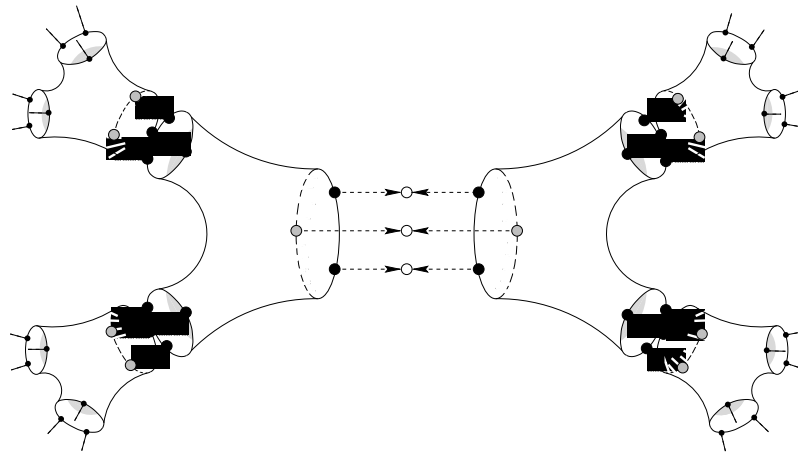


FIG. 1.9: Génération de la triangulation de la sphère privée d'un ensemble de Cantor par le système présenté dans la figure 1.7.

en dimension inférieure ou égale à 3 (voir note de bas de page n° 6 page 3). En effet, une variété compacte peut être triangularisée par un complexe simplicial fini [Thu97] qui, par la proposition 1.1.1 est HR-équationnel. L'espace  $\mathbb{R}^n$  quant à lui, peut être découpé en une infinité de couches sphériques épaisses  $\mathbb{R}^n = \bigcup_{n \geq 0} \{x \in \mathbb{R}^n \mid n \leq \|x\|_2 \leq n+1\}$ . Exceptée la première qui n'est autre que la boule  $B^3$  de  $\mathbb{R}^n$ , chacune de ces couches est homéomorphe à  $\{x \in \mathbb{R}^n \mid 1 \leq \|x\|_2 \leq 2\}$ . C'est une variété à bord que l'on peut triangulariser par un complexe simplicial fini. Ainsi, on obtient une triangularisation de l'espace  $\mathbb{R}^n$  en recollant linéairement une infinité de complexes simpliciaux isomorphes. Ce recollement peut être codé par une grammaire de remplacement d'hyperarc.

**Exemple 1.2.1 (Variété de Whitehead  $Wh_3$  [Whi35, McM62])**

Considérons  $M$  la variété de dimension 3 à bord présenté en figure 1.10. Son bord est constitué de deux tores de dimension 2; l'un forme la surface extérieure, on le note  $T_1$ ; l'autre est creusé dans la matière à l'intérieur, notons le  $T_2$ .  $T_1$  et  $T_2$  sont des surfaces compactes homéomorphes, soit  $\varphi : T_1 \rightarrow T_2$  un homéomorphisme.

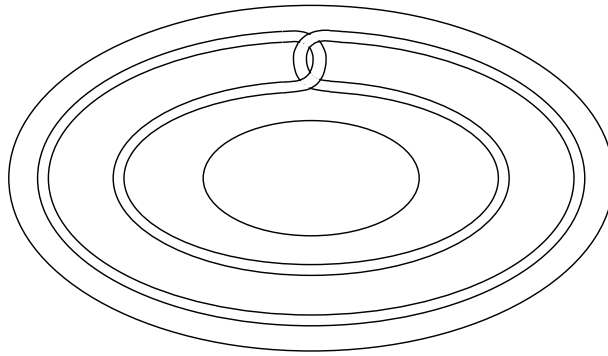


FIG. 1.10:  $M$  est obtenue à partir d'un tore plein en creusant à l'intérieur un tunnel en forme de tore noué.

Soient  $M_1, M_2, \dots, M_n, \dots$  une infinité de copies deux à deux disjointes de  $M$  et  $M_0$  un tore plein. Soient  $T_1^n, T_2^n$  les deux composantes du bord de  $M_n$ , et  $T_1^0$  la surface extérieure de  $M_0$ .  $T_1^0$  et  $T_2^1$  sont homéomorphes, ce sont des tores. Soit  $\varphi_0 : T_1^0 \rightarrow T_2^1$  un homéomorphisme. Pour tout  $n \geq 1$ ,  $\varphi$  définit un homéomorphisme  $\varphi_n : T_1^n \rightarrow T_2^{n+1}$ ; cet homéomorphisme induit une relation d'équivalence entre  $T_1^n$  et  $T_2^{n+1}$  qui peut être vue comme une façon de recoller  $M_n$  à l'intérieur de  $M_{n+1}$ . L'idée consiste alors à recoller  $M_0$  à l'intérieur de  $M_1$  suivant  $\varphi_0$ , puis  $M_1$  à l'intérieur de  $M_2$ , etc. La réunion de tous les  $M_n$  quotientée par la réunion de toutes les relations d'équivalence définies par les  $\varphi_n$  est la *variété de Whitehead*  $Wh_3$ .

De même que dans l'exemple précédent, la régularité de ce procédé de recollement autorise la construction d'une triangularisation de  $Wh_3$  par remplacement d'hyperarc. On commence par triangulariser  $M$ , i.e. la décomposer en tétraèdres. Cette décomposition induit une décomposition de  $T_1$  et de  $T_2$  en triangles. Quitte à subdiviser certains tétraèdres, on peut supposer que les triangularisations de  $T_1$  et  $T_2$  sont isomorphes, et que  $\varphi$  est simpliciale. Cette décomposition de  $M$  en tétraèdres donne lieu à un hypergraphe  $H$ ; les sources de  $H$

sont définies comme étant les sommets de la triangulation de  $T_2$  dans un ordre arbitraire. C'est à partir de  $H$  que l'on construit le système de remplacement d'hyperarc. Pour ce faire, on ajoute à  $H$  un hyperarc non terminal connectant tous les sommets de la triangulation de  $T_1$ , l'ordre de cette connection doit respecter l'ordre des sources de  $H$  i.e. les sommets de  $T_2$  relativement à l'isomorphisme induit par  $\varphi$ , qui identifie les triangulations de  $T_1$  et  $T_2$ . Cet hyperarc non terminal code le recollement d'une copie de  $H$  sur  $H$  lui-même. On établit ainsi la récurrence de la construction de la triangulation de  $Wh_3$ . L'hypergraphe initial codera une triangulation du tore plein  $M_0$ . On obtient un système constitué de deux symboles non terminaux dont l'un est le symbole initial. Il génère une triangulation de  $Wh_3$ . La décomposition de  $M$  en tétraèdres est plutôt fastidieuse et ne sera pas détaillée ici.

Par une méthode similaire, on peut montrer que le complémentaire du *collier d'Antoine* (cf. [HY61]) dans  $S^3$  possède lui aussi une triangulation HR-équationnelle.

Dans cette partie, nous allons montrer que l'on peut décider de façon effective si un polyèdre HR-équationnel de dimension au plus 3 donné par une grammaire est une variété.

Nous avons vu dans la section précédente, page 22, qu'il existe un algorithme pour décider si un hypergraphe HR-équationnel est connexe. Il s'en suit que la connexité d'un polyèdre HR-équationnel est décidable. D'autre part, un hypergraphe HR-équationnel est de degré infini ou bien de degré uniformément borné [Cou90b]; de plus, ce degré est calculable. Nous ne nous intéresserons pas aux hypergraphes de degré infini; ces derniers codent des complexes simpliciaux définissant des polyèdres qui ne sont pas localement compacts; et nous considérerons ici ce cas comme pathologique. Ainsi, dans la suite, nous ne nous intéresserons qu'aux polyèdres connexes localement compacts et donc aux hypergraphes HR-équationnels connexes de degré fini.

Le lemme suivant fait partie du folklore de la théorie des grammaires de remplacement d'hyperarcs.

### Lemme 1.2.1

*Soit  $(b_0, \{H_b\}_{b \in B})$  une grammaire définissant un hypergraphe HR-équationnel  $G$  connexe de degré fini. Alors il existe une grammaire  $(b'_0, \{H'_b\}_{b \in B'})$  définissant  $G$  tel que quelque soit  $b \in B'$  :*

- *les sommets connectés par un hyperarc non terminal de  $H'_b$  sont deux à deux distincts;*
- *les hyperarcs non terminaux de  $H'_b$  ne contiennent pas de source;*
- *deux hyperarcs non terminaux de  $H'_b$  distincts n'ont pas de sommets en commun;*
- *l'hypergraphe obtenu à partir de  $H'_b$  en supprimant les hyperarcs non terminaux est connexe.*

*Preuve.*

- Soit  $e$  un hyperarc non terminal de  $H_b$  et  $v$  un sommet apparaissant plusieurs fois dans  $vert_{H_b}(e)$ . Soient  $i_1, \dots, i_k$  les positions de  $v$  dans  $vert_{H_b}(e)$ . Soit  $b_e$  le symbole d'étiquette de  $e$ . On définit un nouveau symbole non terminal  $b'_e$  ainsi qu'un nouvel hypergraphe  $H_{b'_e}$  que l'on

obtient à partir de  $H_{b_e}$  en identifiant les sources d'indices  $i_1, \dots, i_k$ . Le recollement codé par  $e$  de  $H_{b_e}$  sur  $H_b$  est en fait un recollement de  $H_{b'_e}$ . On remplace donc  $e$  par un nouvel hyperarc  $e'$  qui code le recollement de  $H_{b'_e}$  sur  $H_b$ , dans lequel  $v$  n'apparaît maintenant qu'une seule fois. Durant cette opération, on ne crée pas de nouvelle source dans  $H_{b_e}$ . Par conséquent, en répétant l'opération, le nombre de nouveaux hypergraphes construits est borné. On itère donc cette opération jusqu'à ce que le système satisfasse le premier point, ce qui sera le cas au bout d'un temps fini.

- Soit  $e$  un hyperarc non terminal de  $H_b$  contenant une source  $s$  de  $H_b$ . Quitte à simplement éliminer  $H_b$  du système, on peut supposer qu'il est utilisé pour la construction de  $G$ . L'hypergraphe  $G_b$  produit par la grammaire  $(b, \theta)$  dont l'axiome est  $b$  au lieu de  $b_0$  et où  $\theta = \{H_b\}_{b \in B}$ , est de degré fini. Par conséquent, il existe  $k_s \geq 0$  tel que tous les hyperarcs terminaux de  $G_b$  contenant  $s$  sont déjà dans  $\theta^{k_s}(H_b)$ , le  $k_s$ -ième itéré de  $\theta$  sur  $H_b$ . Supposons que  $s$  appartienne encore à un hyperarc non terminal de  $\theta^{k_s}(H_b)$ . Cet hyperarc code le recollement de l'un des hypergraphes du système, disons  $H_{b'}$  sur  $\theta^{k_s}(H_b)$ . Dans ce recollement,  $s$  est identifié à une source  $s'$  de  $H_{b'}$  qui n'appartient à aucun hyperarc terminal. En fait, quelque soit  $n \geq 0$ , aucun hyperarc terminal ne connecte  $s'$  à  $\theta^n(H_{b'})$ .  $s'$  donne donc naissance à un sommet isolé de  $G_{b'}$ . Ce dernier est inutile, on peut le supprimer, et retirer  $s$  de tout hyperarc non terminal de  $\theta^n(H_{b'})$  qui est étiqueté par  $b'$ .

- La deuxième condition étant satisfaite, la troisième devient facile. Il suffit en effet de remplacer chaque  $H_b$  par  $\theta(H_b)$ .

- $G$  est connexe par hypothèse; on peut donc supposer que chaque  $G_b$  pour  $b \in B$  est aussi connexe. En effet, si  $G_b$  n'est pas connexe, on peut séparer ses composantes en plusieurs hypergraphes et leur attribuer à chacun un nouveau symbole non terminal. Sous cette hypothèse, chacun des  $H_b$  est connexe. Notons  $\tilde{H}_b$  l'hypergraphe obtenu à partir de  $H_b$  en supprimant les hyperarcs non terminaux. Supposons que  $\tilde{H}_b$  n'est pas connexe. Comme  $G_b$  l'est, pour  $n_b$  assez grand, toutes les sources de  $\theta^{n_b}(H_b)$  appartiennent à la même composante connexe de  $\theta^{n_b}(H_b)$  que l'on note  $C_b$ . Soient  $K_{b_1}, \dots, K_{b_{k_b}}$  les composantes connexes de  $\theta^{n_b}(H_b) \setminus C_b$ . On commence par remplacer  $H_b$  par  $C_b$  dans le système  $\theta$ , et ce, pour tout  $b \in B$  (les sources de  $H_b$  sont exactement celles de  $C_b$  relativement au plongement canonique). On crée ensuite de nouveaux symboles non terminaux  $b_{b_1}, \dots, b_{b_{k_b}}$  qui serviront à coder le recollement des  $K_{b_k}$  sur  $C_b$ . A cet effet, on ajoute à  $C_b$  de nouveaux hyperarcs  $e_{b_1}, \dots, e_{b_{k_b}}$  étiquetés respectivement par les  $b_{b_1}, \dots, b_{b_{k_b}}$ . On ajoute au système  $\theta$  les nouveaux hypergraphes  $H_{b_{b_j}} = K_{b_j}$ . On omet le détail de la définition des sources de ces hypergraphes. Il se peut cependant que  $\tilde{H}_{b_{b_j}}$  ne soit pas encore connexe; il suffit alors de remplacer chacun de ces hyperarcs non terminaux par l'hypergraphe correspondant donné par notre grammaire (i.e. un  $C_b$ ).

□

Nous aurons ensuite besoin des notions de *lien* et d'*étoile* d'un simplexe d'un complexe simplicial [FM97, HY61, Mas67, Rot88, RS72]: soit  $S$  un complexe simplicial et  $\sigma$  un simplexe de  $S$ . L'étoile de  $\sigma$  dans  $S$  est par définition le sous-complexe de  $S$  formé de tous les simplexes de  $S$  dont  $\sigma$  est une face ainsi que toutes leurs faces; on la note  $St(\sigma)$ . Le *lien* de  $\sigma$  est le sous-complexe simplicial de  $St(\sigma)$  formé de tous les simplexes disjoints de  $\sigma$  ainsi que toutes leurs faces; on le note  $Lk(\sigma)$ . Par extension, on parle aussi de l'étoile et du lien d'un sommet ou d'un hyperarc d'un hypergraphe.

### Proposition 1.2.1

*Il existe un algorithme pour décider si un polyèdre HR-équationnel est une variété de dimension 1, 2 ou 3.*

*Preuve.* On considère un polyèdre défini par un hypergraphe HR-équationnel  $G$ , connexe de degré fini, donné par une grammaire  $(b_0, \theta)$  où  $\theta = \{H_b\}_{b \in B}$ , satisfaisant les conditions du lemme 1.2.1. L'idée consiste à vérifier que le voisinage de chaque point possède la forme requise; ce qui se fait, suivant le critère 3.2.5 de [Thu97], en s'assurant que le lien de chaque simplexe  $\sigma$  de  $G$  est une sphère de dimension  $n - \dim(\sigma) - 1$  où  $n$  vaut 2 ou 3 suivant que l'on veut démontrer que  $G$  code une surface ou une variété de dimension 3. Le cas  $n = 1$  est facile : les seules variétés de dimension 1 sont le cercle et la droite.

L'idée consiste à modifier les  $H_b$  de telle sorte qu'un voisinage de chaque simplexe de  $G$  apparaisse déjà dans l'un d'eux. On commence par remplacer chaque  $H_b$  par  $\theta^2(H_b)$ ; ceci nous assure que le voisinage de chaque sommet et de chaque hyperarc de  $G$  est totalement représenté dans l'un des  $H_b$ ; précisément : il existe une application  $f : V_G \cup E_G \rightarrow \bigcup_b V_{H_b} \cup E_{H_b}$  associant à chaque sommet de  $G$  un sommet interne de l'un des  $H_b$  et à chaque hyperarc de  $G$  un hyperarc terminal de l'un des  $H_b$  ne contenant aucune de source et n'ayant pas de sommet en commun avec un hyperarc non terminal, telle que, si  $\sigma$  désigne un élément de  $V_G \cup E_G$ , l'étoile de  $\sigma$  dans  $G$  soit isomorphe à celle de  $f(\sigma)$  dans  $\tilde{H}_b$  où  $\tilde{H}_b$  est l'hypergraphe obtenu à partir de  $H_b$  en supprimant les hyperarcs non terminaux.

Il suffit de vérifier que pour tout élément interne  $\sigma \in V_{H_b} \cup E_{H_b}$ ,  $Lk(\sigma)$  est soit un cercle, soit une sphère suivant la valeur de la dimension de  $\sigma$  et la valeur de  $n$  relativement au critère évoqué plus haut. Il est clair que l'extraction de  $Lk(\sigma)$  peut se faire de façon effective. Vérifier que c'est un cercle, s'il y a lieu, est facile. Si l'on doit vérifier que c'est une sphère, on fait simplement appel à la caractéristique d'Euler (cf. introduction ou bien [Mas67])<sup>5</sup>.

□

---

5. au vu de l'algorithme de [Rub95] pour reconnaître la sphère  $S^3$ , on peut étendre ce résultat à la dimension 4.