

Chapitre 2

Surfaces HR-équationnelles

Ce chapitre aborde l'étude du cas des surfaces. Dans un premier temps, nous ferons une relecture, dans un esprit constructif, du résultat de classification des surfaces sans bord non compactes, en vue de le transformer en un résultat effectif. Cela nous conduira notamment à coder les surfaces sans bord non compactes par des arbres. Dans ce contexte, nous étudierons la notion de régularité arborescente, incarnée par les surfaces non compactes HR-équationnelles, et nous en donnerons plusieurs caractérisations à divers niveaux : En termes de triangularisations, en termes de sommes connexes et en termes de frontière idéale. Cette notion permettra alors la mise au point d'un algorithme pour décider de l'homéomorphisme de deux surfaces sans bord non compactes HR-équationnelles.

Par ailleurs, nous donnerons une méthode de construction de surfaces non HR-équationnelles; cela nous conduira à démontrer que l'ensemble des classes d'homéomorphisme de surfaces non compactes sans bord possède la puissance du continu.

Dans un troisième temps, nous aborderons le problème pour le cas des surfaces à bord. A cet égard, nous généraliserons le théorème de classification au cas des surfaces planaires à bord non compactes; pour ce faire, il est nécessaire d'affiner la structure de la frontière idéale en la partitionnant en sous-ensembles appelés fleurs, caractérisés en termes de courbes plongées dans la surface. Le cas général des surfaces à bord reste quant-à-lui très mystérieux.

2.1 Surfaces non compactes sans bord et arborescence

2.1.1 Notion de bout

Le concept de bout [AS60, Hal64, MS85] est une formalisation de l'idée de "chemin vers l'infini" dans les objets non compacts, tels que les graphes infinis par exemple.

Soit K un polyèdre connexe localement compact. Nous appellerons *région* de K tout ouvert connexe non vide. Nous dirons qu'une région de K est *bornée* si son adhérence est compacte. On considère les suites emboîtées $P_0 \supset P_1 \supset \dots \supset P_k \supset \dots$ de régions non bornées de K telles que quelque soit $k \geq 0$, la frontière de P_k , i.e. $\overline{P_k} \cap \overline{P_k}^c$, soit compacte et pour toute région bornée A , $P_k \cap A = \emptyset$ pour k suffisamment grand. On définit une relation d'équivalence sur l'ensemble de ces suites en convenant que $(P_k)_k$ et $(P'_k)_k$ sont équivalentes si et seulement

si pour tout $k \geq 0$, il existe k' tel que $P'_{k'} \subset P_k$ et *vice versa*.

Définition 4

Une classe d'équivalence relativement à cette relation est appelée un **bout**. L'ensemble des bouts de K est noté $B(K)$.

Par abus de langage, nous parlerons souvent des bouts d'un hypergraphe infini de degré fini, faisant en fait référence aux bouts du polyèdre associé. Dans ce cas, on peut définir les bouts de façon peut-être plus intuitive: soit G , un hypergraphe infini connexe de degré fini, et v_0 un sommet de G . On considère les branches infinies partant de v_0 , i.e. les chemins infinis $v_0v_1\dots v_k\dots$ de G tels que $d(v_0, v_k)$ croît strictement avec k et donc tend vers l'infini. Nous conviendrons que deux branches infinies sont équivalentes si elles restent connectées dans le complémentaire de toute boule centrée en v_0 .

Il existe alors une bijection canonique entre l'ensemble des classes d'équivalence de branches infinies et l'ensemble des bouts de G ; pour la construire, il nous faut auparavant fixer quelques notations. On considère la famille $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ des sous-graphes de G qui sont les composantes connexes des complémentaires des boules centrées en v_0 . Notons que pour toute paire $U_i, U_{i'}$ d'éléments de \mathfrak{U} , $U_i \cap U_{i'}$ est égale à \emptyset , U_i ou bien $U_{i'}$. On montre que tout bout p peut être représenté par une suite emboîtée $(U_{i_k})_{k \geq 1}$ d'éléments de \mathfrak{U} telle que pour tout k , U_{i_k} est une composante connexe du complémentaire de la boule centrée en v_0 de rayon $k - 1$; cette suite est unique. On associe à p une branche infinie définie de la façon suivante: soit, pour tout k , un sommet w_k de U_{i_k} , situé à distance k exactement de w_0 ; on choisit un chemin minimal α_k le connectant à w_0 . On définit maintenant une branche infini $\alpha = v_0v_1v_2\dots$ par induction, par un raisonnement type "lemme de Koenig": comme les α_k sont en nombre infini et que G est de degré borné, il existe au moins un sommet v_1 à distance 1 de v_0 par lequel passe une infinité d' α_k ; on élimine tous les α_k qui ne passent pas par v_1 . Il existe alors un sommet v_2 à distance 2 de v_0 par lequel passent une infinité d' α_k ; on élimine alors tous les α_k ne passant pas par v_2 . Les α_k restants sont alors en nombre infini et passent tous par v_0, v_1 et v_2 ; ils permettent alors de choisir v_3 , un sommet à distance 3 de v_0 par lequel une infinité d'entre eux passent, etc. On montre que la classe d'équivalence de α ne dépend pas du choix des v_k , c'est par définition l'image de p . La bijectivité de cette correspondance est omise.

Notons que le concept de bout est topologique et non métrique. Par exemple, une grille infinie n'a qu'un seul bout; en effet, le complémentaire de toute boule est connexe. Il en est de même de l'hypergraphe HR-équationnel présenté en figure 1.4.

L'ensemble des bouts $B(K)$ est muni d'une topologie naturelle. Pour toute région U de frontière compacte, on note U^* l'ensemble des bouts de K représentés par les suites emboîtées de régions $(P_n)_n$ telles que $P_n \subset U$ pour n suffisamment grand. Dans le cas des hypergraphes, U^* est l'ensemble des bouts représentés par les branches qui sont ultimement dans U . La topologie de $B(K)$ est alors définie en prenant pour base d'ouverts l'ensemble des U^* . $B(K)$ muni de cette topologie est appelée la *frontière idéale* de K . Dans le cas des hypergraphes, en conservant les notations précédentes, on montre que la famille $\{U_i^*\}_{i \in I}$ constitue déjà une base pour la topologie de la frontière idéale.

Nous énumérons les propriétés classiques de $B(K)$ sans démonstration. La première est que $B(K)$ est métrisable (cf. [HY61, théorème 2.48]); en fait, on peut le plonger dans l'es-

pace de Cantor, lui-même sous-espace de l'intervalle fermé unité $[0, 1]$ de \mathbb{R} . Ensuite, c'est un espace compact (cf. [AS60]). Le terme de frontière provient du fait qu'il réalise une compactification de K . En effet, on munit $K \cup B(K)$ de la topologie définie en prenant pour base d'ouverts l'ensemble des parties de la forme $U \cup U^*$ où U est une région de K de frontière compacte. $K \cup B(K)$ devient alors un espace compact dans lequel K est plongé. Ainsi, le concept de bout s'apparente à celui de "point à l'infini"; notons que la compactification de K par sa frontière idéale est plus fine que la vénérable compactification d'Alexandroff qui consiste à ajouter un seul point à l'infini. Enfin, $B(K)$ est de dimension zéro, i.e. chacun de ses points possède une base de voisinages ouverts de frontières vides (cf. [AS60, HW41]).

2.1.2 Théorème de Kerékjartó-Richards

Comme dans le cas des surfaces compactes, la classification des surfaces non compactes sans bord s'appuie sur les notions de genre et d'orientabilité. Soit S une surface non compacte sans bord. S est dite de *genre* $k \in \mathbb{N}$ si elle contient une région bornée A de genre k telle que $S \setminus A$ soit planaire. Si un tel entier k n'existe pas, S est dite de *genre infini*. De la même manière, S est dite *finiment non orientable* si elle contient une région bornée A non orientable telle que $S \setminus A$ soit orientable; si une telle région n'existe pas, S est dite *infiniment non orientable*. Une surface finiment non-orientable est dite de *type pair* (resp. de *type impair*) de non-orientabilité si toute région suffisamment grande est de genre pair (resp. de genre impair).

Si le genre et l'orientabilité suffisent à classifier les surfaces compactes, il n'en est pas de même dans le cas non-compact; il faut aussi considérer le comportement des surfaces à l'infini. Soit p un bout de S représenté par une suite emboîtée de régions $(P_k)_k$; p est dit *planair* (resp. *orientable*) si P_n est planaire (resp. orientable) pour n suffisamment grand. On note $B'(S)$ (resp. $B''(S)$) l'ensemble des bouts non planaires (resp. non orientables). $B'(S)$ et $B''(S)$ sont compacts (cf. [AS60]) et trivialement, $B''(S) \subset B'(S)$.

FIG. 2.1: *Surface de genre 1 à deux bouts planaires :*

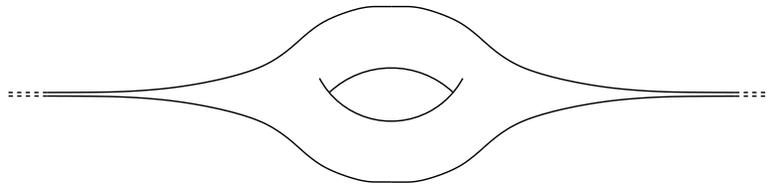
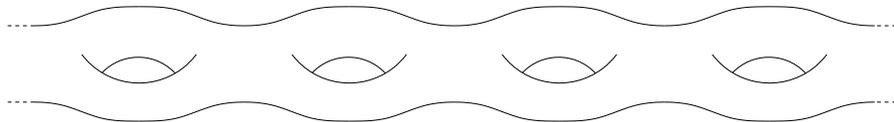


FIG. 2.2: *Surface de genre infini à deux bouts orientables non planaires :*



Théorème 1 (Kerékjártó-Richards [Mas67, Ric63]) Soient S_1 et S_2 deux surfaces non compactes sans bord de même caractéristiques d'orientabilité et de genre. S_1 et S_2 sont alors homéomorphes si et seulement si il existe un homéomorphisme $f : (B(S_1), B'(S_1), B''(S_1)) \rightarrow (B(S_2), B'(S_2), B''(S_2))$, i.e. un homéomorphisme entre $B(S_1)$ et $B(S_2)$ échangeant $B'(S_1)$ avec $B'(S_2)$ et $B''(S_1)$ avec $B''(S_2)$.

2.1.3 Bouts, langages de mots infinis, arbres

Nous allons voir dans cette partie comment la notion de frontière idéale s'apparente à celle de *frontière* d'un langage au sens de [BN80]. Ce point de vue constitue le premier pas vers un codage constructif de la frontière idéale en vue de rendre le théorème de classification effectif.

La frontière d'un langage $L \subset A^*$, où A est un alphabet fini, est l'ensemble $FrL \subset A^\omega$ des mots infinis sur A , dont tout préfixe est préfixe d'au moins un mot de L . De façon équivalente, FrL est la frontière de L comme partie de $A^* \cup A^\omega$ relativement à la topologie usuelle. En particulier, FrL hérite d'une topologie, et en fait d'une métrique, en tant que partie de $A^* \cup A^\omega$ lui-même espace métrique. Considérons maintenant l'arbre t_L dont les nœuds sont les préfixes des mots de L . FrL est alors canoniquement homéomorphe à l'espace des branches infinies de t_L , que l'on note $path(t_L)$. Rappelons que l'on munit l'ensemble des branches infinies d'un arbre d'une métrique en prenant pour distance entre deux branches données l'inverse d'une exponentielle de la longueur de leur partie commune. Réciproquement, l'espace des branches infinies d'un arbre de degré borné est toujours la frontière d'un langage. En effet, on associe une lettre différente à chaque fils d'un nœud donné; chaque nœud définit alors un mot et la frontière du langage défini par l'ensemble des nœuds est l'ensemble des mots infinis codés par les branches infinies de l'arbre. Cette discussion nous permet de voir le résultat suivant comme une interprétation en terme de bout de la notion de frontière d'un langage, et réciproquement.

Lemme 2.1.1 *L'espace des branches infinies d'un arbre est homéomorphe à sa frontière idéale.*

Preuve. Il suffit pour voir cela de considérer la définition des bouts d'un graphe infini à l'aide des branches infinies et de constater que dans un arbre, deux branches infinies distinctes ne sont jamais équivalentes.

□

Ce résultat peut se généraliser au cas des hypergraphes arborescents i.e. de largeur arborescente bornée. Si G est un hypergraphe arborescent, on peut trouver une décomposition arborescente (U, f) de largeur bornée telle que la frontière idéale de U et de G soient homéomorphes. Nous ne développerons pas cette idée ici.

En fait, on a le résultat suivant :

Proposition 2.1.1 *Soit X un espace de Hausdorff (cf. [HY61]), les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (i) X est la frontière idéale d'un polyèdre localement compact.

- (ii) X est un espace métrique compact de dimension zéro.
- (iii) X est homéomorphe à l'espace des chemins infinis d'un arbre de degré borné.
- (iv) X est homéomorphe à la frontière idéale d'un arbre de degré borné.
- (v) X est homéomorphe à la frontière d'un langage.

Preuve. (i) \Rightarrow (ii) résume les propriétés classiques qui ont été énoncées dans la définition de la frontière idéale.

La démonstration de (ii) \Rightarrow (iii) consiste en une interprétation en terme d'arbres de [HY61, théorème 2.95]. Par [HY61, théorème 2.94], si X désigne un espace métrique compact de dimension zéro, il existe alors une suite de recouvrements finis $\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_k, \dots$ où chaque \mathcal{U}_k est une collection d'ouverts-fermés (en anglais "clopen") deux à deux disjoints, de diamètres inférieurs à $1/k$ tels que \mathcal{U}_{k+1} est un raffinement de \mathcal{U}_k pour tout $k \geq 0$, i.e. tout ouvert-fermé de \mathcal{U}_{k+1} est totalement inclus dans un ouvert-fermé de \mathcal{U}_k . Soient $U_{k,0}, U_{k,1}, \dots, U_{k,n_k}$ les éléments de \mathcal{U}_k ; on peut supposer que $\mathcal{U}_0 = \{X\}$. Quitte à introduire des recouvrements intermédiaires, on peut considérer que les n_k sont bornés. Considérons alors l'arbre t_X dont les nœuds sont les $U_{k,\ell}$ et dont les arcs sont définis par la relation d'inclusion: $U_{k',\ell'}$ est fils de $U_{k,\ell}$ si et seulement si $k' = k + 1$ et $U_{k',\ell'} \subset U_{k,\ell}$. On définit un homéomorphisme $\zeta : X \rightarrow \text{path}(t_X)$ de la façon suivante: pour $x \in X$, on définit $\zeta(x)$ comme étant le chemin infini $U_{0,0}U_{1,\ell_1}U_{2,\ell_2}\dots U_{k,\ell_k}\dots$ où pour tout $k, \ell_k \in [0, n_k]$ est l'unique indice tel que $x \in U_{k,\ell_k}$. On vérifie que ζ définit une bijection. En effet, comme le diamètre des $U_{k,\ell}$ converge vers 0 lorsque k tend vers l'infini et que X est complet, on peut définir l'image réciproque d'un chemin $U_{0,0}U_{1,\ell_1}U_{2,\ell_2}\dots U_{k,\ell_k}\dots$ de t_X comme étant l'unique élément de $\bigcap_k U_{k,\ell_k}$. Enfin, pour ce qui concerne la bi-continuité, comme X est compact, il suffit de vérifier la continuité, ce qui est facile en remarquant que la famille des $U_{k,\ell}$ forme une base pour la topologie de X . (iii) \Leftrightarrow (iv) est un cas particulier du lemme 2.1.1; (iii) \Leftrightarrow (v) a déjà été discuté précédemment; enfin, on a trivialement (iv) \Rightarrow (i).

□

2.1.4 Sommes connexes arborescentes

Toute surface compacte sans bord non homéomorphe à la sphère peut être obtenue en recollant entre elles un nombre fini de surfaces homéomorphes au tore ou au plan projectif (cf. [Mas67]); la sphère, le tore et le plan projectif sont ainsi les briques élémentaires à partir desquelles sont construites toutes les surfaces compactes sans bord. Nous allons voir dans cette partie par quel procédé elles permettent en fait de construire toutes les surfaces non compactes sans bord.

L'idée de recollement de surface est formalisée par le concept de *somme connexe* (cf. [Mas67]). La somme connexe de deux surfaces consiste à découper un disque dans chacune d'entre elles, puis de les recoller sur les bords restants (voir figure 2.1.4). On montre que la classe d'homéomorphisme de la surface ainsi obtenue ne dépend ni du choix des disques que l'on découpe, ni du recollement. Notons que dans un contexte topologique, nous ne ferons pas de distinction entre une surface et sa classe d'homéomorphisme; nous nous autoriserons

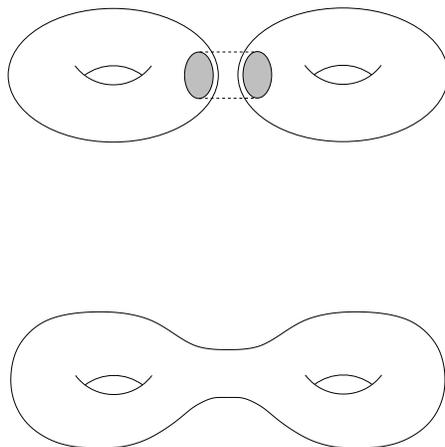


FIG. 2.3: La somme connexe de deux surfaces S_1 et S_2 est définie de la façon suivante : soient D_1 et D_2 , deux disques plongés respectivement dans S_1 et S_2 ; on considère les surfaces \tilde{S}_1 et \tilde{S}_2 , obtenues à partir de S_1 et S_2 en leur retirant les intérieurs de D_1 et de D_2 . La somme connexe de S_1 et S_2 est alors définie comme étant la surface obtenue en identifiant les bords de D_1 et D_2 . Bien sûr, cette surface dépend du choix de D_1 et de D_2 , mais pas sa classe d'homéomorphisme. On montre que toute surface compacte sans bord distincte de la sphère est homéomorphe à une somme connexe de tores et de plans projectifs (cf. [Mas67]).

de somme connexe, qui est en fait définie sur l'ensemble des classes d'homéomorphisme de surfaces, confère à l'ensemble des classe d'homéomorphisme de surfaces compactes sans bord une structure relativement simple : c'est un monoïde commutatif finiment présenté dont une présentation est : $\langle t, p \mid tp = pt, p^3 = tp \rangle$; l'élément neutre représente la sphère, t , le tore et p , le plan projectif. On peut donner un ensemble de représentants sous la forme suivante : $\{t^n p^m \mid n \in \mathbb{N}, m = 0, 1, 2\}$; notons que n et m sont respectivement le genre et le type d'orientabilité.

Le théorème 1 montre que la frontière idéale d'une surface est un invariant essentiel de sa structure topologique. Nous avons vu dans la partie 2.1.3 comment décrire cette frontière idéale en termes d'arbre. Ces considérations conduisent au fait que toute surface peut être représentée sous forme arborescente. Afin de formaliser cette idée nous introduisons le concept de *somme connexe arborescente*. Construire une surface non compacte par somme connexe arborescente consiste à se donner une infinité de surfaces compactes agencées selon les nœuds d'un arbre infini, puis de les recoller deux à deux le long des arêtes de l'arbre en question.

Formellement, on se donne un arbre t de degré fini muni d'une application τ qui associe à chaque nœud de t une surface compacte sans bord. Pour tout couple de nœuds (w, w') de t tel que w est le père de w' , on se donne un plongement $f_{w,w'} : D \rightarrow \tau(w)$ du disque unité $D = \{z \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_2 \leq 1\}$ dans la surface associée à w . Puis pour tout nœud w' distinct de la racine, on se donne un autre plongement $p_{w'} : D \rightarrow \tau(w')$. On suppose que les

images de tous ces plongements sont deux à deux disjointes. Pour tout nœud w , on considère maintenant la surface, notée $\tilde{\tau}(w)$, obtenue à partir de $\tau(w)$ en découpant les $f_{w,w'}(\overset{\circ}{D})$ avec w' fils de w , et $p_w(\overset{\circ}{D})$ si w est distinct de la racine ($\overset{\circ}{D}$ désigne l'intérieur de D). Soit alors \mathcal{R} la relation d'équivalence sur $K = \bigcup_w \tilde{\tau}(w)$ engendrée par les couples (x, x') tels qu'il existe $z \in S^1 = Fr(D)$, w, w' des nœuds de t avec w père de w' tels que $x = f_{w,w'}(z)$ et $x' = p_{w'}(z)$.

Définition 5 La **somme connexe arborescente** définie par t , notée $\Sigma(t)$, est alors définie comme étant le quotient K/\mathcal{R} . On montre que la classe d'homéomorphisme de $\Sigma(t)$ ne dépend pas des choix des $f_{w,w'}$, ni de ceux des p_w .

On code les bouts de $\Sigma(t)$ par les branches infinies de t : pour toute branche infinie $\alpha = (w_k)_{k \geq 0} \in path(t)$, on définit $b(\alpha)$ comme étant le bout de $\Sigma(t)$ définie par les régions P_k formées par le recollement des surfaces compactes associées au nœuds de t_{w_k} , le sous-arbre de t de racine w_k . En reprenant les idées de la proposition 2.1.1, on obtient le résultat suivant :

Lemme 2.1.2 On reprend les notations de la construction précédente. Soient :

- $path'(t) \subset path(t)$ l'ensemble des branches infinies $(w_k)_{k \geq 0}$ telles qu'il existe des indices k aussi grands que l'on veut tels que $\tau(w_k)$ ne soit pas planaire.
- $path''(t) \subset path(t)$ l'ensemble des branches infinies $(w_k)_{k \geq 0}$ telles qu'il existe des indices k aussi grands que l'on veut tels que $\tau(w_k)$ ne soit pas orientable.

Alors $b : (path(t), path'(t), path''(t)) \longrightarrow (B(\Sigma(t)), B'(\Sigma(t)), B''(\Sigma(t)))$ est un homéomorphisme.

Le résultat suivant consiste en une relecture des résultats de [Ric63].

Lemme 2.1.3

Soit X un espace métrique compact de dimension zéro. Soient $X'' \subset X'$ deux fermés de X . Il existe alors une surface non compacte sans bord S obtenue par somme connexe arborescente de sphères, de tores et de plan projectifs, telle que $(B(S), B(S)', B(S)'')$ est homéomorphe à (X, X', X'') .

Preuve. Considérons l'arbre t_X construit dans la démonstration de la proposition 2.1.1. Rappelons que c'est un arbre de degré borné. Conformément aux notations de cette démonstration, ζ désigne l'homéomorphisme canonique entre X et l'espace des branches infinies de t_X . Pour tout nœud w de t_X , par abus de notation, on désigne par $\zeta^{-1}(w)$ l'ensemble des points $x \in X$ tels que $\zeta(x)$ est un chemin passant par w . On définit une somme connexe arborescente d'arbre t_X dont l'application τ est définie comme suit. Pour tout nœud w de t_X :

- si $\zeta^{-1}(w) \cap X'' \neq \emptyset$ alors $\tau(w)$ est un plan projectif.
- si $\zeta^{-1}(w) \cap X' \neq \emptyset$ et $\zeta^{-1}(w) \cap X'' = \emptyset$ alors $\tau(w)$ est un tore.
- si $\zeta^{-1}(w) \cap X' = \emptyset$ alors $\tau(w)$ est une sphère.

On vérifie que $b \circ \zeta : (X, X', X'') \longrightarrow (B(\Sigma(t)), B'(\Sigma(t)), B''(\Sigma(t)))$ est un homéomorphisme, notons que pour ce faire, l'hypothèse de fermeture sur X' et X'' est essentielle.

□

Théorème 2

Toute surface sans bord est une somme connexe arborescente de sphère, de tore et de plan projectifs.

Preuve. Soit S une surface sans bord. Si, S est compacte, c'est une sphère ou bien une somme connexe de tores et de plans projectifs; dans ce cas on choisit t fini et sa forme ne compte pas. Si S est non compacte, le lemme 2.1.3 fournit une surface S_1 définie par somme connexe arborescente de sphères, de tores et de plans projectifs telle que $(B(S_1), B'(S_1), B''(S_1))$ est homéomorphe à $(B(S), B'(S), B''(S))$; si S est de genre fini ou finiment non-orientable, on colle à la racine de l'arbre définissant S_1 un arbre fini codant une surface compacte de même caractéristiques de genre et d'orientabilité que S . On conclut en appliquant le théorème 1.

□

Question :

(Systèmes de réécritures de termes et homéomorphismes de surfaces)

Nous avons vu page 36 que les surfaces compactes sans bord sont décrites par des mots sur un alphabet à deux lettres. Notons que le langage de représentants des classes d'homéomorphisme, i.e. $\{t^n p^m \mid n \in \mathbb{N}, m = 0, 1, 2\}$, que nous avons donné est un langage rationnel. En fait, on peut montrer que ces représentants sont les formes normales d'un système de réécriture noethérien confluent. Le théorème précédent généralise cette idée en ceci que toute surface, compacte ou non, est codée par un arbre dont les nœuds sont étiquetés sur un alphabet de trois lettres. L'homéomorphisme des surfaces définit donc une relation d'équivalence sur l'ensemble de ces arbres. Nous posons le problème qui consiste à déterminer si cette relation d'équivalence peut être engendrée par un système fini de réécriture de termes. Notons qu'un tel système permettrait, s'il était noethérien et confluent, de mettre en oeuvre un algorithme élégant pour résoudre le problème de l'homéomorphisme.

2.2 Régularité arborescente, algorithme

2.2.1 Surfaces HR-équationnelles et sommes connexes arborescentes

Une somme connexe arborescente n'est définie qu'à homéomorphisme près. Ainsi, au lieu d'attacher des surfaces compactes aux nœuds de l'arbre qui la définit, il est en réalité plus naturel de leurs attacher des classes d'homéomorphisme de surfaces compactes sans bord. En considérant la classification des surfaces compactes sans bord, on peut donc définir des sommes connexes arborescentes à partir d'arbres dont chaque nœud est étiqueté par un entier: le genre ainsi qu'un symbole parmi trois qui code les différents types relatifs à l'orientabilité: orientable, non-orientable de type pair et non-orientable de type impair. Notons que l'on peut coder ces deux paramètres à l'aide d'un seul entier dont par exemple la

classe modulo 3 donnerait le type d'orientabilité et le quotient donnerait le genre. C'est sur ces considérations que nous donnons la définition suivante qui propose un nouveau concept de régularité pour une surface non-compacte sans bord.

Définition 6 Nous dirons d'une somme connexe arborescente qu'elle est **régulière** si elle est effectuée sur un arbre régulier.

Comme les surfaces HR-équationnelles, les surfaces définies par sommes connexes arborescentes régulières peuvent être définies de façon constructive : une telle surface est par définition codée par un arbre régulier qui lui-même est codé par un multi-graphe orienté pointé fini. Notons que dans ce cas, les arcs n'ont pas besoin d'être étiquetés.

La démonstration de la proposition suivante consiste en différents découpages de triangularisations. Pour ce type de procédés, nous avons besoin des concepts de *subdivision barycentrique* (cf. [HY61]) et de *voisinage régulier* (cf. [RS72, Hem76]).

Soit σ un simplexe de sommets s_0, s_1, \dots, s_n , rappelons que les s_i sont affinement indépendants et que σ est leur enveloppe convexe. Un autre point de vue consiste à dire que σ est l'ensemble des points dont les coordonnées barycentriques par rapport aux x_i sont toutes positives ou nulles. Soient $f_1, \dots, f_{2^{n+1}-1}$, les faces de σ ; on les identifie avec les parties non vides de $\{s_0, s_1, \dots, s_n\}$. Soit \dot{f}_i le barycentre de f_i . Soit Σ le complexe simplicial dont les sommets sont les \dot{f}_i et dont les simplexes sont les enveloppes convexes des parties $\{\dot{f}_{i_0}, \dot{f}_{i_1}, \dots, \dot{f}_{i_n}\}$ avec $f_{i_0} \subsetneq f_{i_1} \subsetneq \dots \subsetneq f_{i_n}$. Σ est appelé la subdivision barycentrique de σ . La subdivision d'un complexe simplicial quelconque consiste à subdiviser tous ses simplexes.

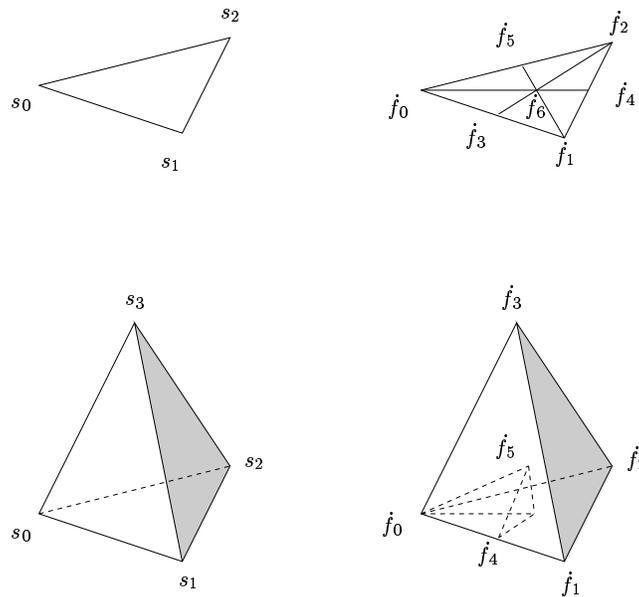


FIG. 2.4: *Subdivision barycentrique*

La notion de voisinage régulier est apparue pour la première fois dans [Whi39], on trouvera des approches modernes dans [RS72, Hem76]. Soit K un complexe simplicial, σ un simplexe de K et τ une face de σ de dimension $\dim \sigma - 1$ qui n'appartient à aucun autre simplexe de K .

Le complexe simplicial obtenu à partir de K en lui retirant σ et τ est dit être obtenu à partir de K par effondrement élémentaire. Si L est un complexe simplicial obtenu à partir de K par une séquence finie d'effondrements élémentaires, on dit que K s'effondre en L , ce qui est noté $K \searrow L$. Remarquons que $|L|$ est un *rétract par déformation* de K (cf. [Hem76, RS72]). Supposons maintenant que K soit un complexe simplicial dont le polyèdre $|K|$ est une variété de dimension n ; soit L un sous-complexe de T . On appelle *voisinage régulier* de L dans K toute sous-variété de $|K|$ de la forme $|K_1|$ où K_1 est un sous-complexe de K avec $K_1 \searrow L$. Notons que $|K_1|$ n'est pas nécessairement un voisinage de $|L|$ au sens usuel du terme.

Lemme 2.2.1

Soient K un complexe simplicial et L un sous-complexe fini de T . Soient K'' et L'' les double subdivisions barycentriques de T et L ,

$$\text{Soit } N(L'', K'') = \bigcup_{\sigma \in L''} \{\tau \mid \tau \text{ est une face d'un simplexe de } K'' \text{ interceptant } \sigma\}$$

alors $|N(L'', T'')|$ est un voisinage régulier de L'' dans K'' .

Voir [Whi39, Hem76, RS72] pour la démonstration de ce lemme.

Lemme 2.2.2 *La subdivision barycentrique d'un complexe simplicial HR-équationnel est HR-équationnelle.*

Preuve. Il suffit de subdiviser chaque hyperarc terminal.

□

Proposition 2.2.1 *Une surface sans bord est HR-équationnelle si et seulement si c'est une somme connexe arborescente régulière.*

Preuve. (\Leftarrow):

Soit S une surface définie à homéomorphisme près comme somme connexe arborescente sur un arbre régulier t . On suppose que t est lui-même défini comme le développement d'un multi-graphe orienté pointé (Γ, v_0) dont les sommets sont étiquetés par des classes d'homéomorphisme de surfaces compactes sans bord. Pour chaque $v \in V_\Gamma$, on considère un hypergraphe H_v , codant une triangulation d'une surface associée à v . Pour chaque $v \neq v_0$, on découpe un disque dans H_v dont les sommets seront les sources de H_v . Puis, pour chaque arc e de Γ , on découpe un disque dans H_v , où v est l'origine de e , et on recolle à la place un hyperarc non-terminal étiqueté par v' , où v' est l'extrémité de e . Tout les disques que l'on découpe doivent être disjoints, pour cela, on remplacera au besoin H_b par sa subdivision barycentrique. On obtient finalement une grammaire de remplacement d'hyperarc qui définit une triangulation de S .

(\Rightarrow):

Soit une surface HR-équationnelle S définie par une grammaire $\Theta = (b_0, \{H_b\}_{b \in B})$. On peut supposer que Θ satisfait les conditions du lemme 1.2.1.

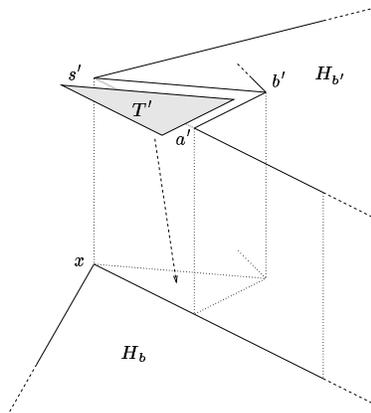
• On peut transformer Θ de telle sorte que chaque \tilde{H}_b soit la triangulation d'une surface à bord. (Rappelons que \tilde{H}_b désigne une copie de H_b à laquelle on a retiré tous les hyperarcs non-terminaux.

On commence par remplacer la triangulation de S par sa double subdivision barycentrique, cela facilite les découpages. On note encore Θ la grammaire associée. Il faut transformer Θ de telle sorte que chacun des sommets de chaque \tilde{H}_b possède un voisinage homéomorphe à un disque ou bien un demi-disque. Considérons donc un H_b ainsi qu'un de ses sommets x .

Si x n'appartient pas à un hyperarc non-terminal et n'est pas une source, alors tous les hyperarcs terminaux formant un voisinage de x dans S sont déjà dans H_b . Comme S est une surface, ce voisinage est homéomorphe à un disque.

Si x est une source, alors il doit être recollé sur un sommet x' appartenant à un hyperarc non-terminal dans l'un des H_b . Si x ne possède pas de voisinage homéomorphe à un disque ou bien un demi-disque, alors il en est de même pour x' . C'est le cas suivant.

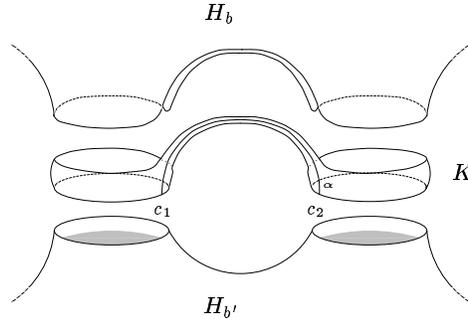
Supposons donc que x appartienne à un hyperarc non-terminal de H_b et qu'il ne possède pas de voisinage homéomorphe à un disque ou bien un demi-disque. Par le lemme 1.2.1, il n'y a qu'un seul $H_{b'}$ qui doit être recollé sur x . Soit s' la source de $H_{b'}$ qui doit être identifiée à x . Considérons les triangles, i.e. les hyperarc terminaux d'arité 3, de $H_{b'}$ contenant s' . Nous allons les retirer de $H_{b'}$ et les recoller autour de x dans H_b , ainsi que dans tout autre $H_{b'}$ contenant un hyperarc non-terminal étiqueté par b' . Ensuite, on supprimera s' . Après cette opération, x aura un voisinage homéomorphe à un disque dans \tilde{H}_b . Soit T' un de ces triangles; rappelons que nous considérons la double subdivision barycentrique de la triangulation originale de S . Les sommets créés durant le processus de subdivision ont tous des bons voisinages, s' n'en fait donc pas partie. C'est par contre le cas des deux autres sommets a' et b' de T' (cf. figure). Après la suppression de T' , pour ajuster le recollement de $H_{b'}$, ils



deviennent des sources. Notons que l'un d'eux pouvait déjà en être une. On vérifie facilement qu'ils ont des bons voisinages dans $\tilde{H}_{b'} \setminus T'$. Le détail de cette opération étant plus complexe que difficile, il est omis ici.

• On peut transformer Θ de telle sorte que les sources d'un H_b sont les sommets d'au plus une composante du bord de $|\tilde{H}_b|$.

Considérons le sous-hypergraphe F_b de H_b formé par les sources de H_b et les hyperarcs d'arité 2 les connectant entre elles, i.e. les côtés des triangles connectant deux sources. Notons d'abord que le point précédent implique que $|F_b|$ est une union de courbes simples fermées deux à deux disjointes. Notre but ici consiste à transformer Θ de telle sorte que chaque F_b ne comporte qu'une seule courbe. Supposons donc que F_b contienne au moins deux courbes disjointes c_1 et c_2 . Grâce au lemme 1.2.1, on peut supposer que \tilde{H}_b est connexe; soit α un chemin de \tilde{H}_b connectant c_1 et c_2 (cf. figure). Soit K un voisinage régulier de $c_1 \cup \alpha \cup c_2$



dans \tilde{H}_b . K est homéomorphe à une paire de pantalons, c_1 et c_2 forment deux composantes de sa frontière, soit c la troisième (voir figure). L'idée consiste à retirer K de H_b , remplacer les sommets de c_1 et de c_2 dans la liste des sources de H_b par les sommets de c , et enfin, recoller K à la place de chaque hyperarc étiqueté par b dans Θ . A chaque recollement de K , on adjoint un nouvel hyperarc étiqueté par b qui code le recollement du nouvel H_b sur c . Nous ne développerons pas le détail de ces opérations ici (cf. [Ly99]). Finalement, nous avons fait décroître le nombre de composantes de F_b , on conclut par récurrence.

On construit maintenant un multi-graphe orienté pointé Γ codant l'arbre régulier relatif à une somme connexe arborescente définissant S . L'ensemble des sommets de Γ est B , l'ensemble des indices des H_b ; la racine de Γ est b_0 ; l'ensemble des arcs de Γ est en bijection avec l'union des ensembles d'hyperarcs non-terminaux des H_b , il est défini comme suit : pour chaque $b \in B$ et chaque hyperarc non-terminal e de H_b , on définit un arc dans Γ d'origine b et d'extrémité b' , où b' est l'étiquette de e . Il reste à associer une surface compacte sans bord à chaque sommet de Γ : pour tout $b \in B = V_\Gamma$, on considère la surface, en fait sa classe d'homéomorphisme, obtenue en recollant un disque sur chaque composante du bord de $|\tilde{H}_b|$. On vérifie que Γ définit un arbre régulier qui définit à son tour par somme connexe arborescente une surface homéomorphe à S .

□

2.2.2 Espaces de dimension zéro de types finis

Théorème de Pierce

Dans cette partie, X désigne un espace métrique compact de dimension 0. Pour toute partie A de X , on note $A' \subset A$ sa dérivée topologique, i.e. l'ensemble de ses points d'accumulation.

Définition 7 ([Pie72])

On muni l'ensemble des parties de X , noté 2^X , des opérations booléennes usuelles \cup , \cap et \cdot^c , des opération d'arité 1 d'adhérence topologique $\bar{\cdot}$ et de dérivée topologique \cdot' , et de l'opération d'arité nulle \emptyset . Sa plus petite sous-algèbre, notée $\mathfrak{U}(X)$, est appelée l'**algèbre booléenne topologique** de X . Notons qu'elle est engendrée par \emptyset . Si $\mathfrak{U}(X)$ est de cardinal fini, X est dit **de type fini**.

Soit \mathfrak{U} une sous algèbre de 2^X . On appelle *atome* de \mathfrak{U} tout élément $a \in \mathfrak{U}$ tel que pour tout $b \in \mathfrak{U}$, $b \subset a$ implique $b = a$ ou bien $b = \emptyset$.

Lemme 2.2.3 ([Pie72])

On suppose que X est de type fini. Soit \mathfrak{U} une sous-algèbre finie de 2^X . On suppose que \mathfrak{U} est engendrée par ses éléments fermés. Il existe alors une suite finie emboîtée $\emptyset = A_0 \subset A_1 \subset \dots \subset A_{n-1} \subset A_n = X$ d'éléments fermés de \mathfrak{U} telle que pour tout $i \in [0, n-1]$, $a_i = A_{i+1} \setminus A_i$ est un atome de \mathfrak{U} .

Pour la démonstration de ce lemme, le lecteur est renvoyé à [Pie72]. Le théorème 3 est basé sur une classification des formes que peuvent prendre les a_i . Nous n'en donnerons pas de démonstration; néanmoins, nous allons regarder de plus près cette classification qui nous sera utile par la suite.

D'abord, $a_0 = A_1$ est un atome fermé; il est donc compact et d'autre part $a'_0 = \emptyset$ ou bien $a'_0 = a_0$.

Si $a'_0 = \emptyset$, i.e. tout point de a_0 est isolé, alors, comme il est compact, a_0 est un ensemble fini.

Si $a'_0 = a_0$, i.e. a_0 est *parfait*, alors a_0 est homéomorphe à l'espace de Cantor (cf. [HY61]).

Regardons maintenant les a_i pour $i > 0$. Si a_i est un fermé, nous sommes dans le cas précédent. Supposons donc que $a_i \subsetneq \bar{a}_i$; en particulier a_i n'est pas compact.

Si $a'_i = \emptyset$, alors a_i est un ensemble discret dénombrable.

Si $a'_0 = a_0$, alors a_i peut-être décomposé en une union dénombrable d'espaces de Cantor deux à deux disjoints (cf. [Pie72]).

Théorème 3 ([Pie72])

Soient X et Y deux espaces métriques compacts de dimension 0 de types finis. Soient \mathfrak{A} et \mathfrak{B} deux sous-algèbres finies de 2^X et de 2^Y respectivement, satisfaisant les hypothèses du lemme 2.2.3. Soit $\rho : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ un isomorphisme tel que pour tout atome $p \in \mathfrak{A}$ de cardinal fini, $\text{card}(\rho(p)) = \text{card}(p)$. Alors il existe un homéomorphisme $\sigma : X \rightarrow Y$ qui induit ρ .

Espaces de types finis et arbres réguliers

Les résultats de cette partie sont tirés en substance de [Hea86] où ils sont traités dans le contexte des langages reconnaissables de mots infinis; nous les formulons ici en terme d'arbres réguliers. Soit Γ un multi-graphe orienté pointé fini comme celui que nous avons construit dans la preuve de la proposition 2.2.1; Γ code un arbre régulier t . Nous allons voir

dans cette partie que l'espace des bouts de t est de type fini au sens de la définition 7, et que de plus il y existe un moyen effectif de calculer son algèbre topologique booléenne.

Rappelons que l'espace des bouts $B(t)$ de t est canoniquement homéomorphe à l'espace $path(t)$ de ses chemins infinis partant de la racine. On considère l'homomorphisme surjectif canonique¹ $p : t \rightarrow \Gamma$; puis pour tout $v \in V_\Gamma$: $In(v) = \{\alpha \in path(t) \mid \text{card}(V_\alpha \cap p^{-1}(v)) = \aleph_0\}$, i.e. l'ensemble des chemins infinis de t dont les images par p passent infiniment souvent par v . Avant d'aller plus loin, on modifie légèrement Γ afin d'éliminer certains cas pathologiques. Pour cela, on supprime les sommets de Γ distincts de la racine dont les images par In sont vides; de tels sommets n'ont pas d'incidence sur l'ensemble des bouts de t . Lorsqu'on supprime de cette façon un sommet v , on supprime aussi les arcs auquel il appartient; et pour tout couple de tels arcs e, e' où v est à la fois l'extrémité de e et l'origine de e' , on ajoute à Γ un arc dont l'origine est l'origine de e et l'extrémité est l'extrémité de e' . Le graphe obtenu sera noté $\tilde{\Gamma}$ et tous ses sommets sont en quelques sortes significatifs pour comprendre la structure de la frontière idéale de t .

On étend trivialement In aux parties de V_Γ : pour toute partie $Y \subseteq V_\Gamma$, on pose $In(Y) = \bigcup_{v \in Y} In(v)$. On veut que cette opération préserve les opérations booléennes; on a facilement $In(\emptyset) = \emptyset$, $In(V_\Gamma) = path(t)$ et $In(Y_1 \cup Y_2) = In(Y_1) \cup In(Y_2)$; mais on a seulement $In(Y_1 \cap Y_2) \subseteq In(Y_1) \cap In(Y_2)$. On restreint donc In à un certain type de parties de V_Γ appelées parties *cohérentes*, i.e. les $Y \subseteq V_\Gamma$ telles que pour toute paire de sommets de V_Γ mutuellement accessibles $p, q \in V_\Gamma$ on a $p, q \in Y$ ou bien $p, q \notin Y$. Une partie cohérente de Γ est simplement une union de composantes fortement connexes. L'ensemble des parties cohérentes de V_Γ est noté \mathfrak{C}_Γ . Pour toute paire Y_1, Y_2 de parties cohérentes de V_Γ , on a maintenant $In(Y_1 \cap Y_2) = In(Y_1) \cap In(Y_2)$ et $In(Y_1^c) = In(Y_1)^c$. On s'intéresse maintenant aux opérations de dérivée et d'adhérence topologique : on définit deux opérateurs sur l'ensemble des parties cohérentes :

- $Y^K = \{v \in V_\Gamma \mid Y \text{ est accessible à partir de } v\}$.
- $Y^D = \{v \in Y \mid \text{il existe au moins deux circuits distincts dans } Y \text{ accessibles à partir de } v\}$.

On vérifie facilement que $In(Y^K) = \overline{In(Y)}$ et $In(Y^D) = In(Y)'$ (cf. [Hea86]). \mathfrak{C}_Γ , muni des opérations booléennes usuelles et de \cdot^K et \cdot^D , est une algèbre finie. On obtient finalement le résultat suivant :

Lemme 2.2.4 ([Hea86])

$In : (\mathfrak{C}_\Gamma, \cup, \cap, \cdot^c, \emptyset, \cdot^K, \cdot^D) \longrightarrow (2^{path(t)}, \cup, \cap, \cdot^c, \emptyset, \bar{\cdot}, \cdot')$ est un morphisme d'algèbre.

On montre facilement que In est injective sur l'ensemble des parties cohérentes; il s'en suit que $(\mathfrak{C}_\Gamma, \cup, \cap, \cdot^c, \emptyset, \cdot^K, \cdot^D)$ est une copie isomorphe d'une sous-algèbre de $2^{path(t)}$. De plus, elle est de cardinal fini; on a donc le résultat suivant :

Proposition 2.2.2 ([Hea86])

Si t est un arbre régulier alors $path(t)$ et donc $B(t)$ sont des espaces de type fini.

Notons que les opérations \cdot^K et \cdot^D sont calculables; ainsi, l'existence de ce morphisme va nous permettre de calculer des sous-algèbres finies de $path(t)$ et donc de $B(t)$.

1. Le revêtement

2.2.3 Régularité arborescente, algorithme

Soit S une surface sans bord HR-équationnelle. Les démonstrations du lemme 1.2.1 et de la proposition 2.2.1 sont constructives et fournissent une méthode effective pour calculer un multi-graphe Γ_S orienté pointé codant un arbre régulier t_S définissant à son tour une somme connexe arborescente définissant S . Le lemme 2.2.4 montre alors comment calculer des sous-algèbres finies de $path(t_S)$ et donc de $B(S)$. En considérant le théorème 1 de classification des surfaces et le théorème 3, on aboutit alors à un algorithme pour décider si deux surfaces sans bord HR-équationnelles sont homéomorphes ou non.

Rappelons que les sommets de Γ_S sont étiquetés par des classes d'homéomorphisme de surfaces compactes. Soit $N \subseteq V_\Gamma$ (resp. $O \subseteq V_\Gamma$) la plus petite partie cohérente de V_Γ contenant tous les sommets associés à des surfaces non orientables (resp. orientable de genre supérieur à un). Soit $b : (path(t_S), path'(t_S), path''(t_S)) \rightarrow (B(\Sigma(t_S)), B'(\Sigma(t_S)), B''(\Sigma(t_S)))$ comme introduit dans le lemme 2.1.2. On vérifie facilement que $b(In(N)) = B''(\Sigma(t_S))$ et $b(In(N \cup O)) = B'(\Sigma(t_S))$.

Théorème 4

Soit S une surface sans bord. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) S est HR-équationnelle.
- (ii) S est une somme connexe arborescente régulière.
- (iii) La sous-algèbre de $2^{B(S)}$ engendrée par $\{B'(S), B''(S)\}$ est de cardinal fini.

De plus ces équivalences sont constructives.

Preuve. (i) \Leftrightarrow (ii) est simplement la proposition 2.2.1.

(ii) \Rightarrow (iii) : on calcule la sous-algèbre de \mathfrak{C}_Γ engendrée par N et O . Par le lemme 2.2.4, elle est isomorphe à la sous-algèbre de $2^{B(S)}$ engendrée par $\{B'(S), B''(S)\}$, qui donc est de cardinal fini.

(iii) \Rightarrow (ii) : soient $X'' \subset X' \subset X$ des espaces métrique compacts de dimension 0 tels que la sous-algèbre \mathfrak{U} de 2^X engendrée par $\{X', X''\}$ est de cardinal fini. On considère la décomposition de \mathfrak{U} en éléments fermés donnée par le lemme 2.2.3 : $\emptyset = A_0 \subset A_1 \subset \dots \subset A_{n-1} \subset A_n = B(S)$ où pour tout $i \in [0, n-1]$, $a_i = A_{i+1} \setminus A_i$ est un atome de \mathfrak{U} . On montre par récurrence sur n que l'on peut alors calculer un multi-graphe orienté pointé Γ dont les sommets sont étiquetés par des sphères, des tores et des plans projectifs tel que $(path(t_\Gamma), In(N \cup O), In(N))$ soit homéomorphe à (X, X', X'') .

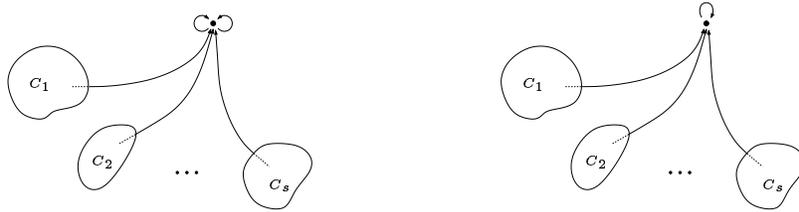
Au rang 1 : supposons que $\mathfrak{U} = \{\emptyset, X\}$. Si X est parfait, i.e. sa dérivée topologique est égale à lui-même, alors, comme il est compact, c'est un espace de Cantor. Γ est alors construit avec un sommet seulement et deux boucles (voir figure). Si au contraire tous les points de $B(S)$ sont isolés, alors c'est un ensemble fini; la construction de Γ pour ce cas est détaillée dans la figure.

Au rang n : la sous-algèbre de $2^{A_{n-1}}$ engendrée par $\{A_{n-1} \cap X', A_{n-1} \cap X''\}$ possède une décomposition de taille $n-1$. Par récurrence, on sait construire un multi-graphe Γ_{n-1} associé



FIG. 2.5: Construction de Γ au rang 1 de la récurrence. La partie gauche représente Γ dans le cas où X est parfait. La partie droite représente Γ dans le cas où X est un ensemble fini; dans ce cas, on accède à partir de la racine à autant de sommets que X a d'éléments; chacun d'eux n'est muni que d'une seule boucle; ainsi, il ne donne naissance qu'à un seul chemin infini.

au triplet $(A_{n-1}, A_{n-1} \cap X', A_{n-1} \cap X'')$. Si $\bar{a}_{n-1} = a_{n-1}$, pour obtenir Γ , on connecte la racine de Γ_{n-1} à une nouvelle composante fortement connexe construite comme pour HR_0 (voir figure); on distingue comme précédemment les cas où a_{n-1} est parfait ou bien fini. Supposons maintenant que $\bar{a}_{n-1} \cap A_{n-1} \neq \emptyset$. Soit la partie cohérente $C = In^{-1}(\bar{a}_{n-1} \cap A_{n-1}) \subseteq V_{\Gamma_{n-1}}$. Soient C_1, \dots, C_s les composantes fortement connexes de C ; on peut vérifier par récurrence que chacune de ces composante n'est en fait formée que d'un seul sommet. Soit v un nouveau sommet que l'on ajoute à Γ_{n-1} . Comme précédemment, on adjoint à ce sommet une ou deux boucles selon respectivement les cas où $a'_{n-1} = \emptyset$ ou bien $a'_{n-1} = a_{n-1}$. On ajoute ensuite s nouveaux arcs connectant les C_i à v (voir figure). Ainsi, lorsque l'on parcourt un chemin infini dans l'une des C_i , on peut bifurquer dans v à tout moment; ainsi, les chemins infinis de $In(C_i)$ sont limites de chemins de $In(\{v\})$. Comme \mathcal{U} est engendrée par $\{X', X''\}$, a_{n-1} est totalement dans X' ou bien dans X'' ou bien en est totalement disjoint. Selon le cas, on associera à a_{n-1} un tore, un plan projectif ou bien une sphère. Cette récurrence étant achevée, on conclut de la même façon que dans la démonstration du théorème 2.



□

2.3 Exemples de surfaces non HR-équationnelles

Nous savons d'après la proposition 1.1.1 que les surfaces compactes sont HR-équationnelles. En fait, d'après le théorème 4, les surfaces pointées, i.e. les surfaces obtenues en retirant un nombre fini de points à une surface compacte, sont aussi HR-équationnelles. Ainsi, la classe des surfaces HR-équationnelles s'insère raisonnablement dans la théorie topologique

des surfaces. Nous allons voir dans cette partie que beaucoup de surfaces non-compactes lui échappent néanmoins.

Le théorème 4 fournit un critère qui va servir ici pour construire des exemples de surfaces non-HR-équationnelles. Pour ce faire, compte tenu de la proposition 2.1.3, il nous suffit de trouver des espaces métriques de dimension 0 qui ne sont pas de type fini au sens de 7. Les résultats développés dans cette partie montrent en fait que l'ensemble des classes d'homéomorphisme de surfaces non-compactes planaires sans bord possède la cardinalité du continu (théorème 5); et en particulier, il n'est pas dénombrable. Ce qui implique trivialement l'existence de surfaces non-HR-équationnelles; cela implique de façon plus profonde qu'établir un algorithme général n'a pas de sens puisque l'ensemble des calculs d'une machine de Turing est toujours dénombrable.

On considère, dans l'intervalle $I = [0, 1]$ de \mathbb{R} , l'ensemble de Cantor défini par :

$$C = \left\{ \sum_{n \geq 1} \frac{x_n}{3^n} : (x_n)_{n \geq 1} \in \{0, 2\}^{\mathbb{N}} \right\}.$$

Soit $K \subset \mathbb{R}$, l'ensemble des milieux des intervalles formant le complémentaire de C :

$$K = \left\{ \sum_{n=0}^N \frac{x_n}{3^n} + \frac{1}{2 \times 3^N} : x_0 = 0 \text{ and } x_1 \dots x_N \in \{0, 2\} \right\}.$$

Nous allons construire par récurrence une suite $(K_n)_n$ de sous-espaces 0-dimensionnels de I . On pose $K_0 = C$ et $K_1 = C \cup K$; supposons construits K_0, K_1, \dots, K_{n-1} . Pour chaque point isolé x de K_{n-1} , choisissons deux points $a < b$ de I tels que $[a, b] \cap K_{n-1} = \{x\}$ et $x = \frac{a+b}{2}$. On considère alors la suite $(y_{k,x})_k$ définie par $y_{k,x} = x + (-1)^k \frac{b-a}{2^k}$. Soit alors $K_n = K_{n-1} \cup \{y_{k,x} \mid x \text{ est isolé dans } K_{n-1} \text{ et } k \geq 1\}$. On peut facilement vérifier que pour tout $n \geq 1$, on a $K'_n = K_{n-1}$. Soit maintenant D_n , l'image de K_n par la bijection affine croissante $\varphi_n : [0, 1] \rightarrow [\frac{1}{n} - \frac{1}{2n(n+1)}, \frac{1}{n} + \frac{1}{2n(n+1)}]$.

Soit Φ l'application définie sur $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ à valeur dans l'ensemble des espaces métriques compacts 0-dimensionnels donnée par : pour $b = (b_n)_n \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, soit

$$\Phi(b) = \{0\} \cup \bigcup \{D_{n+1} : n \geq 0 \text{ and } b_n = 1\}$$

Notons que l'on peut d'ores et déjà construire des exemples de surfaces non HR-équationnelles. En effet, si \mathbb{I} désigne la suite identiquement égale à 1, i.e. $\forall n \geq 0 : \mathbb{I}_n = 1$, on a $\Phi(\mathbb{I})'' \subsetneq \Phi(\mathbb{I})'$. D'autre part $\Phi(\mathbb{I})''$ est homéomorphe à $\Phi(\mathbb{I})'$. Ainsi, la suite des dérivée topologique successives de $\Phi(\mathbb{I})$ est infinie en ce sens qu'elle est strictement décroissante au sens des inclusion d'ensembles. Il s'en suit que $\Phi(\mathbb{I})$ n'est pas de type fini. Une surface ayant une frontière idéale homéomorphe à cet ensemble ne peut donc être HR-équationnelle. Nous allons néanmoins continuer cette construction, elle va nous permettre d'accéder à un résultat plus fort.

Considérons l'application Λ associant une suite de $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ à tout espace métrique compact de dimension 0 défini de la façon suivante : soit X un espace métrique compact de dimension

0; $\Lambda(X)$ est définie en deux temps. On considère d'abord la suite $(X_n)_n$ d'espaces définie à partir de X par le schéma de récurrence suivant :

$$\begin{cases} X_0 = X, \\ X_{n+1} = \overline{X'_n \setminus X''_n}. \end{cases}$$

Pour tout entier naturel n , le n -ième terme de $\Lambda(X) \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ est égal à 1 par définition si et seulement si X'_n est homéomorphe à X_{n+1} ; dans le cas contraire, il vaut 0. Bien sûr, si X et Y sont deux espaces homéomorphes, alors $\Lambda(X) = \Lambda(Y)$.

Lemme 2.3.1

Pour toute suite $b = (b_n)_n$ de $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ non ultimement constante égale à 0, on a $b = \Lambda(\Phi(b))$.

Preuve. Soit δ , l'opérateur de décalage à gauche défini sur les suite par : pour tout $b = (b_n)_n \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, pour tout $n \geq 0$, $\delta(b)_n = b_{n+1}$. $\overline{\Phi(b)' \setminus \Phi(b)''}$ est alors homéomorphe à $\Phi(\delta(b))$.

En effet :

$$\begin{aligned} \Phi(b)' &= \{0\} \cup \bigcup \{D'_{n+1} : n \geq 0 \text{ et } b_n = 1\} \\ &= \{0\} \cup \bigcup \{\varphi_{n+1}(K_{n+1})' : n \geq 0 \text{ et } b_n = 1\} \\ &= \{0\} \cup \bigcup \{\varphi_{n+1}(K'_{n+1}) : n \geq 0 \text{ et } b_n = 1\}. \end{aligned}$$

Notons que $0 \in \Phi(b)'$ car b n'est pas ultimement constante égale à 0. Comme $K'_n = K_{n+1}$, on a ensuite :

$$\begin{aligned} \Phi(b)' &= \{0\} \cup \bigcup \{\varphi_{n+1}(K_n) : n \geq 0 \text{ et } b_n = 1\} \\ \text{et } \Phi(b)'' &= \{0\} \cup \bigcup \{\varphi_{n+1}(K_{n-1}) : n \geq 0 \text{ et } b_n = 1\} \\ &\text{où } K_{-1} = C \text{ l'ensemble de Cantor.} \end{aligned}$$

$$\text{Par conséquent } \Phi(b)' \setminus \Phi(b)'' = \bigcup \{\varphi_{n+1}(K_n \setminus K_{n-1}) : n \geq 0 \text{ et } b_n = 1\}$$

$$\text{et } \overline{\Phi(b)' \setminus \Phi(b)''} = \{0\} \cup \bigcup \{\varphi_{n+1}(\overline{K_n \setminus K_{n-1}}) : n \geq 0 \text{ et } b_n = 1\}.$$

Il est alors facile de voir que :

$$\overline{K_n \setminus K_{n-1}} = \begin{cases} K_n & \text{if } n > 0, \\ \emptyset & \text{if } n = 0; \text{ dans ce cas : } K_n = K_0 = K_{-1} = C. \end{cases}$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned} \overline{\Phi(b)' \setminus \Phi(b)''} &= \{0\} \cup \bigcup \{\varphi_{n+1}(K_n) : n \geq 1 \text{ et } b_n = 1\} \\ &= \{0\} \cup \bigcup \{\varphi_{n+2}(K_{n+1}) : n \geq 0 \text{ et } b_{n+1} = 1\}. \end{aligned}$$

Notons que cet espace est homéomorphe à :

$$\Phi(\delta(b)) = \{0\} \cup \bigcup \{\varphi_{n+1}(K_{n+1}) : n \geq 0 \text{ et } b_{n+1} = 1\}$$

En effet, pour voir cela, on considère pour tout entier n la bijection affine suivante: $\psi_n : \varphi_{n+2}([0, 1]) \longrightarrow \varphi_{n+1}([0, 1])$ définie par $\psi_n = \varphi_{n+1}\varphi_{n+2}^{-1}$.

$$\text{Puis } \psi = \bigcup \{\psi_n : n \geq 0\} : \bigcup \{\varphi_{n+2}([0, 1]) : n \geq 0\} \longrightarrow \bigcup \{\varphi_{n+1}([0, 1]) : n \geq 0\}.$$

On a alors $\Phi(\delta(b)) = \psi(\overline{\Phi(b)' \setminus \Phi(b)''})$. Rappelons que $\Lambda(\Phi(b))$ est définie à partir de la suite d'espaces suivante :

$$\begin{cases} X_0 = \Phi(b) \\ X_{k+1} = \overline{X'_k \setminus X''_k} \end{cases}$$

On tire de la discussion précédente le fait que pour tout $k \geq 0$:

$$X_k = \psi^{-k}(\Phi(\delta^k(b))).$$

Et donc $\Lambda(\Phi(b))_k = 0$ si et seulement si $\Phi(\delta^k(b))'$ est homéomorphe à $\Phi(\delta^{k+1}(b))$.

$$\begin{aligned} \Phi(\delta^k(b))' &= \{0\} \cup \bigcup \{\varphi_{n+1}(K_{n+1})' : n \geq 0 \text{ et } b_{n+k} = 1\} \\ &= \{0\} \cup \bigcup \{\varphi_{n+1}(K_n) : n \geq 0 \text{ et } b_{n+k} = 1\}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Et

$$\begin{aligned} \Phi(\delta^{k+1}(b)) &= \{0\} \cup \bigcup \{\varphi_{n+1}(K_{n+1}) : n \geq 0 \text{ et } b_{n+k+1} = 1\} \\ &= \{0\} \cup \bigcup \{\varphi_n(K_n) : n \geq 1 \text{ et } b_{n+k} = 1\} \end{aligned}$$

Supposons maintenant que dans la formule 2.1, $b_k = 1$; $\Phi(\delta^k(b))'$ contient alors un ensemble de Cantor: $\varphi_1(K_0)$ qui n'est pas dans l'adhérence d'un ensemble de points isolés. Ainsi il contient des points d'accumulation qui ne sont pas points d'accumulation de points isolés. Cela n'est pas vrai pour $\Phi(\delta^{k+1}(b))$; ces espaces ne peuvent donc être homéomorphe.

Par ailleurs, si $b_k = 0$, on obtient

$$\Phi(\delta^k(b))' = \{0\} \cup \bigcup \{\varphi_{n+1}(K_n) : n \geq 1 \text{ et } b_{n+k} = 1\},$$

qui est homéomorphe à

$$\Phi(\delta^{k+1}(b)) = \{0\} \cup \bigcup \{\varphi_n(K_n) : n \geq 1 \text{ et } b_{n+k} = 1\}$$

Finalement on a $\Lambda(\Phi(b))_k = 0$ si et seulement si $b_k = 0$.

□

On tire comme conséquence de ce lemme qu'en particulier Φ est "injective" en ce sens que pour tout $b, b' \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, $\Phi(b)$ et $\Phi(b')$ sont homéomorphes si et seulement si $b = b'$. Par ailleurs, l'ensemble des suites de $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ non ultimement périodiques possède la cardinalité du continu. Tenant compte du lemme 2.1.3, nous avons donc démontré que l'ensemble des classes d'homéomorphisme de surfaces non-compactes planaires sans bord possède au moins la cardinalité du continu. Rappelons que l'on ne considère que les surfaces triangularisées possédant une triangularisation dont le nombre de triangles est au plus dénombrable. En fait, on a le résultat suivant :

Théorème 5

L'ensemble des classes d'homéomorphisme de surfaces non-compactes sans bord possède exactement la cardinalité du continu 2^{\aleph_0} .

Preuve. Nous avons vu que ce cardinal est au moins 2^{\aleph_0} ; pour voir qu'il est aussi inférieur ou égal, on montre qu'il existe une surjection de \mathbb{R} sur l'ensemble des surfaces non-compactes planaires. D'après le théorème 2, on sait que toute surface est somme connexe arborescente de sphères, de tores et de plans projectifs; on en déduit qu'il existe une surjection de l'ensemble des arbres de degré au plus 2, dont les nœuds sont étiquetés sur un alphabet de 3 symboles, sur l'ensemble des surfaces sans bord. En effet, un tel arbre définit trivialement une somme connexe arborescente et le théorème 2 nous dit que toute surface sans bord peut être obtenue de la sorte. Par ailleurs, un tel arbre est codé par un arbre binaire complet étiqueté sur un alphabet à 4 symboles; on introduit un nouveau symbole pour coder l'absence d'un nœud. Ainsi, on a une surjection de l'ensemble des arbres binaires complet sur l'ensemble des surfaces sans bord. Enfin, par un parcours en largeur, on code un arbre binaire étiqueté sur un alphabet donné par un mot infini sur le même alphabet. On a donc une surjection de l'ensemble des mots infinis sur un alphabet à 4 symboles sur l'ensemble des surfaces sans bord; d'autre part l'ensemble des mots infinis sur 4 symboles possède bien évidemment la cardinalité du continu. Ainsi, le cardinal de l'ensemble des surfaces sans bord est au plus 2^{\aleph_0} ; et bien entendu, il est supérieur au cardinal de l'ensemble des classes d'homéomorphisme de surfaces à bord.

□

2.4 Surfaces planaires à bord

Nous proposons dans cette partie une extension du théorème 1 au cas des surfaces planaires à bord. L'étude des surfaces sans bord a mis en évidence le rôle central de l'espace des bouts en tant qu'invariant. Pour le cas des surfaces planaires à bord, il ne suffit pas à caractériser les classes d'homéomorphisme; il est nécessaire d'affiner sa structure. C'est dans ce but que nous introduisons le concept de *fleur*; cela consiste à définir une partition de l'espace des bouts en sous-ensembles que nous appellerons des fleurs; chacun de ces sous-ensembles sera lui-même structuré par un ordre cyclique. Nous verrons que l'espace des bouts, muni de cette structure, caractérise une surface non-compacte planaire à bord (théorème 6). La démonstration de ce fait nécessite plusieurs étapes; nous commencerons par définir formellement le concept de fleur; ensuite, nous développerons des outils permettant de manipuler les

fleurs en termes de courbes plongées dans une surface; enfin, nous aborderons la classification proprement dite.

L'extension de ce résultat au cas des surfaces non-compactes à bord orientables et de genre fini ne semble pas poser trop de difficulté. Par contre, le cas général des surfaces non compactes à bord demeure à nos yeux très mystérieux.

2.4.1 Topologie florale

Fleurs

Tout au long de cette section, S désigne une surface triangularisée *non compacte à bord planaire*. Comme d'habitude, nous ne nous intéressons qu'à la classe d'homéomorphisme de S ; en fait, par abus de notation, il nous arrivera de confondre S avec sa classe d'homéomorphisme.

Les composantes connexes du bord de S sont des variétés de dimension 1 sans bord : des courbes simples fermées homéomorphes au cercle S^1 ou bien des courbes simples non-compactes homéomorphes à \mathbb{R} .

On considère deux surfaces S' et \bar{S} ; S' est obtenue à partir de S en recollant un disque sur chacune de ses composantes compactes de bord; \bar{S} est alors obtenue à partir de S' en recollant un demi-plan sur chacune de ses composantes de bord.

Construction de S' . Par hypothèse, S est planaire, on peut donc supposer $S \subset S^2$. Considérons $\gamma : [0, 1] \rightarrow \partial S$ une paramétrisation d'une composante connexe compacte du bord de S . γ est une courbe de Jordan de S^2 , elle sépare donc S^2 en deux disques, i.e. $S^2 \setminus \gamma$ est formée de deux disques ouverts D_1 et D_2 . D'autre part, on suppose S connexe, et du fait qu'elle est une surface, elle le reste si on lui retire γ ; donc $S \setminus \gamma$ est totalement inclus dans D_1 ou dans D_2 , disons D_1 par exemple. Pour construire S' , on recolle D_2 sur γ ; puis on répète cette opération pour toute les composantes connexes compactes de S , on obtient finalement S' . Notons que l'on a $S \subset S' \subset S^2$; en particulier S' est planaire.

Construction de \bar{S} . Soit $\gamma :]0, 1[\rightarrow \partial S$ paramétrisation d'une composante connexe non compacte du bord de S' . Chaque point $\gamma(x)$ ($x \in]0, 1[$) possède un voisinage ouvert dans S homéomorphe au demi-disque $E = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x_1, x_2)\|_2 < 1 \text{ et } x_2 \geq 0\}$: il existe un plongement $j_x : E \rightarrow S \subset S^2$ tel que $j_x(0, 0) = \gamma(x)$ qui envoie le bord de E sur le bord de S . On considère un plongement $\bar{j}_x : D^2 \rightarrow S^2$ prolongeant j_x . La famille $\{\bar{j}_x(D_\epsilon) \mid D_\epsilon \text{ disque ouvert centré en } 0 \text{ de rayon } \epsilon > 0\}$ constitue une base des voisinages de x dans la topologie de S^2 . Par conséquent, il existe $\epsilon > 0$ tel que $\bar{j}_x(D_\epsilon) \cap S = \bar{j}_x(D_\epsilon) \cap \bar{j}_x(E)$; rappelons que S est munie de la topologie induite par la topologie de S^2 . On pose alors $D_x = \bar{j}_x(D_{\frac{\epsilon}{2}}) \setminus \bar{j}_x(E)$ puis $P = \bigcup_{x \in]0, 1[} D_x$. P est connexe. En effet, soit C une composante connexe de P . On peut lui associer la partie: $C' = \{x \in \gamma \mid D_x \subset C\}$ de γ^2 . Il est clair que C' est ouverte. On peut aussi montrer qu'elle est fermée; en effet, soit $(x_n)_{n \geq 1}$ une suite de C' convergente vers $x_0 \in \gamma$, D_{x_0} intercepte une infinité de D_{x_n} , donc par construction de C , $D_{x_0} \subset C$ et $x_0 \in C'$. D'autre part, γ est connexe et C' est non vide, donc $\gamma = C'$ et par suite $P = C$.

2. Pour simplifier les notations, $\gamma(]0, 1[)$ est notée γ .

P n'est pas encore homéomorphe à un plan, il peut subsister des "trous". Soit α un lacet de P , les composantes connexes de $S^2 \setminus \alpha$ sont toutes homéomorphes à des disques ouverts, l'une d'elles contient S . On considère alors T_α la réunion des composantes connexes de $S^2 \setminus \alpha$ qui ne contiennent pas S . On pose alors $P' = P \cup \bigcup_\alpha T_\alpha$. On peut montrer que P' est simplement connexe, et donc, homéomorphe à un plan. D'autre part, on peut voir que $\overline{P'} \cap S = \gamma$, $P' \cup \gamma$ est un demi-plan fermé. Par conséquent $S \cup P$ représente le recollement d'un demi-plan sur γ , du fait que $S \cup P \subset S^2$, la variété obtenue est planaire. L'ensemble des composantes du bord est dénombrable: $\{\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_k, \dots\}$. En itérant ce procédé de recollement de plans, on construit une suite croissante de surfaces $S' = S_0 \subset S_1 \subset \dots \subset S_k \subset \dots$ où S_k est obtenu en recollant un demi-plan sur γ_{k-1} dans S_{k-1} et toutes ces surfaces sont des parties de S^2 . Finalement on obtient \overline{S} comme union de tous les S_k . On a alors $S \subset S' \subset \overline{S} \subset S^2$, en particulier \overline{S} est planaire.

\overline{S} est donc une surface planaire sans bord non compacte. Cela va nous permettre de considérer un plongement agréable de S dans la sphère S^2 . $B(\overline{S})$ est un espace métrique compact de dimension zéro, on peut donc le plonger dans l'espace de Cantor et donc dans la sphère S^2 (cf. [HY61]). Choisissons un tel plongement, son image sera encore notée $B(\overline{S})$. D'après le théorème de Kerékjártó-Richards, le complémentaire de $B(\overline{S})$ dans S^2 est une surface planaire homéomorphe à \overline{S} ; soit $\varphi : \overline{S} \rightarrow S^2 \setminus B(\overline{S})$ un homéomorphisme. Rappelons que seules les classes d'homéomorphisme nous intéressent, on peut donc remplacer \overline{S} par $\varphi(\overline{S})$. Par ailleurs, S et S' sont des sous-surfaces de \overline{S} , ce qui nous autorise à considérer $\varphi(S)$ et $\varphi(S')$ au lieu d'elles, ce que nous ferons dans la suite.

Remarquons que le compactifié de \overline{S} est exactement S^2 ; on peut choisir comme représentant d'un bout $p \in B(\overline{S})$ une suite emboîtée de voisinages du point de S^2 associé à p ; on peut choisir tous ces voisinages homéomorphes à des disques fermés privés d'ensembles de dimension zéro.

Considérons la partie Φ de $B(S) \times B(\overline{S})$ définie par :

$$((P_k)_k, [(\overline{P}_n)_n]) \in \Phi \text{ si et seulement si } \forall n \exists k P_k \subset \overline{P}_n \quad (2.2)$$

On vérifie facilement que cette définition ne dépend pas des représentants des bouts.

Lemme 2.4.1

Φ est le graphe d'une application continue, surjective, encore notée Φ , de $B(S)$ sur $B(\overline{S})$.

Preuve. (i) Chaque bout $(P_k)_{k \geq 0} \in B(S)$ possède au plus une image par Φ

Soient $(\overline{P}_n)_{n \geq 0}$ et $(\overline{P}'_n)_{n \geq 0}$ deux représentants de bouts de \overline{S} satisfaisant la condition (2.2). Si nous avons affaire à deux bouts distincts, il existerait n_0 tel que \overline{P}_{n_0} et \overline{P}'_{n_0} soient disjoints. Or par (2.2), il existe k_0 tel que $P_{k_0} \subset \overline{P}_{n_0}$ et k'_0 tel que $P_{k'_0} \subset \overline{P}'_{n_0}$. On a alors $P_{\max\{k_0, k'_0\}} \subset \overline{P}_{n_0} \cap \overline{P}'_{n_0}$, contradiction.

(ii) Tout élément de $B(S)$ possède une image par Φ

Supposons au contraire qu'il existe un bout de S représenté par une suite de régions emboîtées $(P_k)_k$ qui n'a pas d'image, i.e. tel que pour tout bout de \overline{S} représenté par $(\overline{P}_n)_n$, il existe N tel qu'il existe des entiers k aussi grands que l'on veut avec $P_k \not\subset \overline{P}_N$.

On montre d'abord que cela implique que quelque soit le bout de \overline{S} représenté par une suite $(\overline{P})_n$, on a en fait $P_k \cap \overline{P}_n = \emptyset$ pour k et n suffisamment grands. Soit donc un bout de \overline{S} représenté par une suite de régions emboîtées $(\overline{P}_n)_n$. Si pour tout k et n , on a $P_k \cap \overline{P}_n = \emptyset$, c'est fini. Sinon il existe k et n tel que $P_k \cap \overline{P}_n \neq \emptyset$. Comme $(\overline{P}_n)_n$ est une suite emboîtée d'intersection vide, il existe $n' \geq N$ tel que $P_k \not\subseteq \overline{P}_{n'}$. Le choix de $n' \geq N$ implique qu'il existe des entiers k'' aussi grand que l'on veut avec $P_{k''} \not\subseteq \overline{P}_{n'}$. Or la frontière $Fr \overline{P}_{n'}$ est compacte. Par conséquent il existe $k' > k$ tel que $P_{k'} \cap Fr \overline{P}_{n'} = \emptyset$. On a alors $P_{k'} \cap \overline{P}_{n'} = \emptyset$ ou bien $P_{k'} \subset \overline{P}_{n'}$; mais $P_{k'} \subset \overline{P}_{n'}$ implique que $\forall k'' \geq k' : P_{k''} \subset \overline{P}_{n'}$, ce qui contredit l'hypothèse sur le choix de n' . On a donc $P_{k'} \cap \overline{P}_{n'} = \emptyset$.

Considérons maintenant une suite $(x_k)_{k \geq 0}$ de points de S tels que $x_k \in P_k$. Nous allons voir que cette suite ne possède pas de point d'adhérence dans $\overline{S} \cup B(\overline{S})$, ce qui constituera une contradiction, ce dernier ensemble étant compact. D'abord, S ne peut pas comporter de point d'adhérence de $(x_k)_{k \geq 0}$ car sinon ce point appartiendrait à l'intersection des adhérences des P_k , qui est vide. $(x_k)_k$ ne possède pas non plus de point d'adhérence dans \overline{S} . C'est évident si l'on remarque que chaque point de $\overline{S} \setminus S$ possède un voisinage entièrement contenu dans $\overline{S} \setminus S$; rappelons que $x_k \in S$. Supposons donc que $(x_k)_k$ a pour valeur d'adhérence un bout $p \in B(\overline{S})$ représenté par une suite $(\overline{P}_n)_n$; la famille $\{\overline{P}_n \cup \overline{P}_n^*\}_n$ constitue une base des voisinages de p dans la topologie de $\overline{S} \cup B(\overline{S})$. Nous avons vu qu'il existe k' et n' tels que $P_{k'} \cap \overline{P}_{n'} = \emptyset$; en particulier pour tout $k \geq k'$, $x_k \notin \overline{P}_{n'} \cup \overline{P}_{n'}^*$, ce qui contredit le fait que p est un point adhérent à $(x_k)_k$. Nous avons donc prouvé que Φ est bien une application.

(iii) Φ est continue

On montre que l'image réciproque de tout ouvert est un ouvert. Rappelons que la topologie de $B(\overline{S})$ est définie par la base d'ouverts $\{\overline{U}^* \mid \overline{U} \text{ région de } \overline{S} \text{ de frontière compacte}\}$; on montre que pour toute région \overline{U} de \overline{S} , $\Phi^{-1}(\overline{U}^*)$ est un ouvert. Pour ce faire, on vérifie que $\Phi^{-1}(\overline{U}^*) = \bigcup U^*$ où l'union est prise sur toute les régions U de S contenues dans \overline{U} . Chaque U^* étant un ouvert, nous avons écrit $\Phi^{-1}(\overline{U}^*)$ comme union d'ouvert, c'est donc un ouvert.

(iv) Φ est surjective

Supposons qu'il existe un bout de \overline{S} représenté par $(\overline{P}_n)_n$ qui ne possède pas d'antécédent par Φ . Pour tout n , \overline{P}_n intercepte S ; sinon, \overline{P}_n serait contenu dans un demi-plan P pour n assez grand, ce qui conduirait à une contradiction sachant que $Fr \overline{P}_n$ est compacte. Soit donc pour tout n , un élément x_n de $\overline{P}_n \cap S$. On montre de façon similaire à **(ii)** que la suite $(x_n)_n$ ne possède aucune valeur d'adhérence dans $S \cup B(S)$. Or ce dernier est compact : contradiction.

□

Définition 8 (Fleur)

Nous appellerons **fleur** toute partie de $B(S)$ de la forme $\Phi^{-1}(\{p\})$ avec $p \in B(\overline{S})$.

Les fleurs sont simplement les classes d'équivalence relatives à la relation \sim_Φ définie par $p \sim_\Phi p'$ ssi $\Phi(p) = \Phi(p')$. Notons que Φ induit un homéomorphisme $\overline{\Phi}$ entre l'ensemble des fleurs muni de la topologie quotient et $B(\overline{S})$ ($\overline{\Phi}$ est une bijection continue sur un compact).

On note i le plongement canonique de S dans \overline{S} ; le résultat suivant est une conséquence directe du lemme 2.4.1.

Lemme 2.4.2 $i \cup \Phi : S \cup B(S) \rightarrow \overline{S} \cup B(\overline{S})$ est une application continue.

Nous construisons maintenant un homéomorphisme entre $S' \setminus \partial S'$ et \overline{S} .

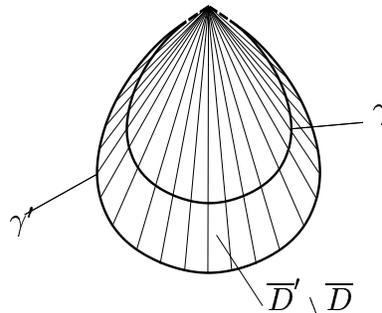
On considère une composante connexe non compacte γ du bord de S' . Nous dirons qu'un bout p de S' est *limite* de γ si et seulement si il existe une suite $(P_n)_n \in p$ tel que $\forall n : P_n \cap \gamma \neq \emptyset$; on montre que γ possède deux bouts limites $p_1, p_2 \in B(S')$, et que $\Phi(p_1) = \Phi(p_2)$, on note $\bar{p} = \Phi(p_1) = \Phi(p_2) \in B(\overline{S})$. Rappelons que $B(\overline{S})$ est identifié à un sous-espace de dimension 0 de S^2 ; ainsi, on considère que \bar{p} est un point de S^2 ; γ est une courbe simple fermée de S^2 privée d'un point qui est exactement \bar{p} . Ainsi, $\overline{\gamma} = \gamma \cup \{\bar{p}\}$ est une courbe de Jordan et partage donc S^2 en deux disques ouverts. L'un de ces disques contient S' , soit D le second. Remarquons que $D \cup \gamma$ est exactement le demi-plan recollé sur γ dans la construction de \overline{S} . On considère γ' la frontière d'un voisinage régulier de γ dans S au sens de la page 39. Un tel voisinage est homéomorphe à une bande $[0, 1] \times \mathbb{R}$ ou, de façon plus imagée, à une plage bordant γ dans S' ; en fait, γ' est une courbe non compacte sans bord longeant γ dont les extrémités convergent aussi vers \bar{p} . $\overline{\gamma'}$ est aussi une courbe de Jordan de S^2 , elle sépare S^2 en deux disques dont l'un contient D , notons le D' . Il est maintenant facile de se convaincre qu'il existe une homotopie

$$H_\gamma : (\overline{D'} \setminus \overline{D}) \times [0, 1] \rightarrow \overline{D'} \setminus \{\bar{p}\}$$

telle que

- $\forall t \in [0, 1], H_\gamma(., t) : (\overline{D'} \setminus \overline{D}) \rightarrow \overline{D'} \setminus \{\bar{p}\}$ est un plongement, et $H_\gamma(., t)|_{\gamma'}$ est l'identité;
- $H_\gamma(., 0) : (\overline{D'} \setminus \overline{D}) \rightarrow \overline{D'} \setminus \{\bar{p}\}$ est l'identité;
- $H_\gamma(., 1) : \overline{D'} \setminus \overline{D} \rightarrow \overline{D'} \setminus \{\bar{p}\}$ est un homéomorphisme.

On peut considérer D comme l'union disjointe de segments dont une extrémité est \bar{p} et l'autre appartient à γ' (voir figure page 54).



Pour deux courbes distinctes du bord γ_1 et γ_2 , notons que l'on peut choisir H_{γ_1} et H_{γ_2} avec des domaines disjoints. Ainsi, la famille des H_γ permet de définir une homotopie

$$H : S' \setminus \partial S' \times [0, 1] \rightarrow \overline{S}$$

qui satisfait les propriétés suivantes :

- $\forall t \in [0, 1]$, $H(\cdot, t)$ est un plongement et $H(\cdot, t)|_{S' \setminus (\cup D')}$ est l'identité;
- $H(\cdot, 0)$ est l'identité;
- $H(\cdot, 1) : S' \setminus \partial S' \rightarrow \bar{S}$ est un homéomorphisme.

Pour simplifier les notations, on note η l'application $H(\cdot, 1)$. Relevons le résultat suivant :

Lemme 2.4.3 $\eta : S' \setminus \partial S' \rightarrow \bar{S}$ est un homéomorphisme.

Courbes et fleurs

Nous allons voir dans cette partie comment l'appartenance de deux bouts à la même fleur peut être caractérisée en terme de séparations par des courbes plongées dans la surface, i.e. des *immersions* du segment fermé $[0, 1]$, ou bien du segment ouvert $]0, 1[$, ou bien du cercle S^1 dans S (cf. [BG87]). Par *courbe* nous entendons en fait *courbes simpliciales*, i.e. des courbes n'empruntant que les arêtes de la triangulation de S dont on considère la double subdivision barycentrique; cette restriction est raisonnable du fait que toute courbe plongée dans S est isotope à une courbe simpliciale (cf. [RS72]). Une telle courbe sera dite *correctement plongée* si elle est *simple*, i.e. injective, si son intérieur est inclus dans l'intérieur de S , et si son bord, dans le cas d'un segment fermé, est inclus dans le bord de S . Une courbe correctement plongée γ sera dite *essentielle* dans les cas suivants: γ est un segment qui connecte deux composantes distinctes du bord de S , ou bien γ est non compacte et converge vers deux bouts de S , ou bien γ est fermée, non homotopiquement nulle dans S .

Lemme 2.4.4

Deux bouts de S appartiennent à la même fleur si et seulement si il n'existe pas de courbe simple fermée de S les séparant dans $S \cup B(S)$.

Preuve. (i) : (\Rightarrow)

Soient deux bouts p, p' de S représentés respectivement par $(P_n)_n$ et $(P'_n)_n$, et $\gamma : S^2 \rightarrow S$ une courbe simple fermée telle que p et p' n'appartiennent pas à la même composante connexe de $S \cup B(S) \setminus \gamma$. Soient C_1 et C_2 les composantes connexes de $S \setminus \gamma$; comme γ est compacte, on peut supposer que pour n assez grand, $P_n \subset C_1$ et $P'_n \subset C_2$; $\bar{S} \setminus \gamma$ est constituée de deux composantes connexes C'_1 et C'_2 telles que $C_i \subset C'_i$ ($i = 1, 2$). Supposons que p et p' appartiennent à la même fleur: il existe un bout $\bar{p} \in B(\bar{S})$ tel que $\Phi(p) = \Phi(p') = \bar{p}$. Soit $(\bar{P}_n)_n$ une suite de régions emboîtées de \bar{S} qui représente \bar{p} . Il existe N_0 tel que $\bar{P}_{N_0} \cap \gamma = \emptyset$, donc \bar{P}_{N_0} est inclus dans C'_1 ou bien dans C'_2 , disons C'_1 ; mais alors, pour n assez grand, $P'_n \cap \bar{P}_{N_0} = \emptyset$, c'est une contradiction.

(ii) : (\Leftarrow)

Soient deux bouts p, p' de S n'appartenant pas à la même fleur, $(P_n)_n$ et $(P'_n)_n$, des représentants respectifs de p et p' . Soient $\bar{p} = \Phi(p)$, $\bar{p}' = \Phi(p')$. Par hypothèse, \bar{p} et \bar{p}' sont deux bouts distincts de \bar{S} qui est une surface sans bord; on peut montrer qu'ils sont alors séparés par une courbe simple fermée $c : S^1 \rightarrow \bar{S}$; pour voir cela, on peut par exemple regarder \bar{S} comme une somme connexe arborescente. On considère alors la courbe $c' = \eta^{-1}(c)$;

comme elle est homotope à c , il est clair qu'elle sépare aussi \bar{p} et \bar{p}' . Mais alors, par définition de Φ , elle sépare aussi p et p' .

□

Lemme 2.4.5

Soient p_1 et p_2 deux bouts de S ; alors p_1 et p_2 appartiennent à la même fleur si et seulement si toute courbe γ ayant p_1 et p_2 pour limites partage S en deux parties.

Idée de preuve. Supposons (\Rightarrow) faux, i.e. il existe une courbe γ qui ne sépare pas S et qui a pour limites p_1 et p_2 et p_1 et p_2 appartiennent à la même fleur; soit $x \in \gamma$; un voisinage suffisamment petit de x dans S , homéomorphe à un disque, est partagé en deux par γ ; cependant, comme γ est supposée ne pas séparer S , ces deux parties sont connectées dans $S \setminus \gamma$ par une courbe simple que l'on note α ; maintenant, il est facile de prolonger α des deux côtés vers x pour finalement fabriquer une courbe simple fermée qui sépare p_1 et p_2 ; c'est une contradiction en vertu du lemme 2.4.4.

(\Leftarrow) : soit γ une courbe joignant p_1 et p_2 qui partage S en deux parties; si p_1 et p_2 ne sont pas dans la même fleur, alors on peut les séparer par une courbe simple fermée que l'on note α ; on montre par récurrence sur le nombre de points d'intersection de γ avec α que α peut être modifiée de façon à connecter les deux parties de S séparées par γ .

□

Lemme 2.4.6

Un arc essentiel sépare S en deux parties si et seulement si il connecte deux composantes du bord non compactes associées à la même fleur.

Notons qu'une composante non compacte du bord de S est canoniquement associée à une fleur, puisque les deux bouts de S vers lesquels elle converge appartiennent toujours à la même fleur.

Idée de preuve. Soient γ_1 et γ_2 les deux composantes du bord de S connectées par un arc essentiel α ; rappelons que par définition des arcs essentiels, $\gamma_1 \neq \gamma_2$. Si l'une au moins de ces deux courbes est compacte, clairement, α ne peut séparer S ; on les suppose donc toutes les deux non-compactes. On considère alors un voisinage régulier V dans S de $\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \alpha$. La frontière de V est constituée de deux courbes non-compactes; soit γ l'une d'entre elles. On voit facilement que γ sépare S si et seulement si α la sépare aussi; par ailleurs, les limites de γ sont deux bouts p_1 et p_2 appartenant respectivement aux deux fleurs associées à γ_1 et γ_2 . On conclut en appliquant le lemme 2.4.5.

□

Notons qu'une courbe simple partitionne au plus une fleur.

Lemme 2.4.7

Soit $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ un ensemble fini de courbes compactes essentielles telles que :

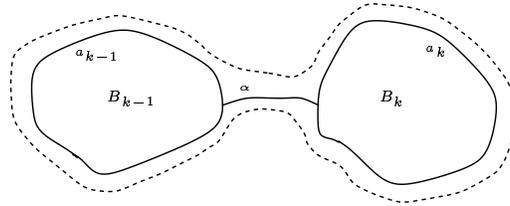
- *chaque a_i sépare S en deux parties, A_i qui contient toutes les autres courbes et B_i , qui n'en contient aucune;*

- pour tout i , la partition de $B(S)$ définie par les deux ensembles $\bigcap A_i^*$ et $\bigcup B_i^*$ est saturée pour la relation d'appartenance à la même fleur.

Il existe alors une courbe simple fermée correctement plongée dans S induisant la partition de $B(S)$ constituée des deux sous-ensembles $\bigcap A_i^*$ et $\bigcup B_i^*$.

Idée de preuve. La preuve se fait par récurrence sur k , si $k = 1$, c'est fini. Supposons donc $k \geq 2$.

cas 1 : il existe parmi les a_i deux courbes simples fermées, disons a_{k-1} et a_k on les connecte alors par un arc α et on les remplace par la composante de la frontière d'un voisinage régulier de $a_{k-1} \cup a_k \cup \alpha$ qui est incluse dans $\bigcap A_i$.



cas 2 : Au plus l'un des a_i est une courbe simple fermée

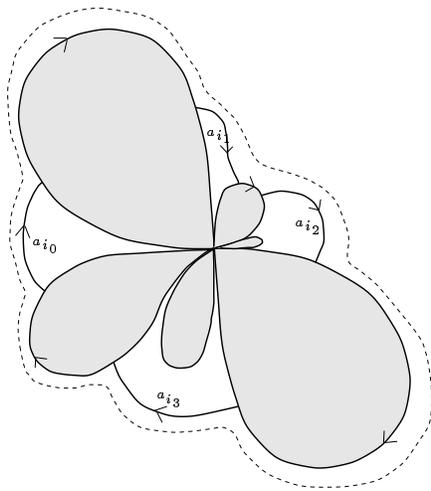
Choisissons donc un arc parmi les a_i , disons a_{i_0} . Par hypothèse, cet arc sépare S , et par le lemme 2.4.6, les limites des courbes du bord qu'il connecte appartiennent à une même fleur f totalement incluse dans $\bigcup B_i^*$; si l'on parcourt l'une de ces courbes à partir d'une des extrémité de a_{i_0} tout en restant dans A_{i_0} , on rencontre un arc a_{i_1} , car à l'infini, on rencontre un bout qui par hypothèse appartient à $\bigcup B_i^*$; en continuant ce processus, on construit par induction une liste d'arcs $a_{i_0}, a_{i_1}, \dots, a_{i_n}$ qui doit forcément retomber sur a_{i_0} puisque la collection initiale de courbes est finie. En empruntant alternativement ces arcs et les courbes du bord, on a décrit une courbe simple fermée; on remplace alors tous ces arcs par la composante intérieure de la frontière d'un voisinage régulier de cette courbe (voir figure page 58).

Nous avons augmenté le nombre de courbes simples fermées sans augmenter k , le cas 1 permet donc de conclure.

□

Lemme 2.4.8 Soit S une surface plane à bord. Il existe une suite $(B_n)_n$ de régions de S satisfaisant les conditions suivantes :

- pour tout n , $B_n \subset S$ est un compact connexe d'intérieur non vide avec $B_n \subset \overset{\circ}{B}_{n+1}$ et $\bigcup_n B_n = S$;
- pour tout n , B_n est homéomorphe à une surface plane à bord;
- B_n est homéomorphe à un disque, ou bien $Fr B_n = B_n \cap \overline{B_n^c}$ est une union de courbes compactes correctement plongées dans S deux à deux disjointes, non homotopiquement nulle dans le cas d'une courbe fermée;



- soit U , l'adhérence d'une composante connexe de $S \setminus B_n$, alors U est non compacte et $Fr(U) = U \cap \overline{B}_n$ est connexe, elle est composée d'une seule courbe. De plus, si U contient une composante compacte de ∂S , alors elle en contient une infinité.

Preuve. L'existence d'une suite de régions $(B_n)_n$ satisfaisant le premier point est classique (cf. [AS60]); on se donne une triangularisation de S , que l'on suppose comme toujours dénombrable. On commence par choisir un triangle pour B_0 , puis on ajoute tous les triangles voisins pour B_1 , etc.

B_n est ainsi un polyèdre connexe de dimension 2, qui est planaire. Il se peut que son bord ne soit pas une variété de dimension 1 et présente des singularités, i.e. des points qui ne possèdent aucun voisinage homéomorphe à un disque ou un demi-disque dans B_n . On palie à ce problème de la façon suivante : soit s une singularité du bord de B_n ; s est aussi un sommet de la triangularisation de S ; soit V , l'étoile de s dans S (voir page 28) dont on considère la double subdivision barycentrique. On ajoute alors à B_n tous les triangles de cette subdivision qui contiennent s ; s devient un point intérieur à B_n ; par ailleurs, aucune singularité n'a été créée. En procédant de la sorte pour toutes les singularités de B_n , on transforme ce dernier en surface à bord.

Le bord de B_n , que l'on note comme d'habitude ∂B_n ne doit pas être confondu avec sa frontière $Fr B_n$ dans S . On a seulement $Fr B_n \subset \partial B_n$. Considérons donc une composante connexe α de $Fr B_n$.

Si α est une courbe simple fermée, alors c'est une composante connexe de ∂B_n . Il est facile de voir que l'on peut déformer légèrement α de telle sorte qu'elle ne touche pas ∂S ; ainsi, on peut considérer qu'elle est correctement plongée dans S ; par ailleurs, si elle est homotopiquement nulle, alors c'est la frontière d'un disque D plongé dans S ; si $D \neq B_n$, on ajoute alors D à B_n . On peut donc supposer α essentielle.

Supposons que α soit un arc. Une analyse simple des différents cas de figure montre que ses extrémités appartiennent toutes les deux à ∂S ; de fait, si un tel point appartenait à l'intérieur de S , alors il aurait dans S un voisinage homéomorphe à un disque ouvert; mais alors, on montre qu'il serait un point intérieur de $Fr B_n$ en tant que sous-espace de ∂B_n , ce qui n'est pas le cas. Par ailleurs, si l'intérieur de α coupe ∂S , ce ne peut être qu'en un point isolé, sans

quoi il n'appartiendrait pas à $Fr B_n$; ce cas peut donc être éliminé en déformant légèrement α vers l'intérieur de S . Ainsi, on peut supposer que α est correctement plongé dans S .

Soit maintenant U , l'adhérence d'une composante connexe de $S \setminus B_n$. Premièrement, si U est compacte, on l'ajoute purement et simplement à B_n . Ensuite, si U contient une composante compacte c de ∂S , mais n'en contient pas une infinité, on procède comme suit : on considère un chemin β connectant $Fr U$ à c ; puis on ajoute un voisinage régulier de $\beta \cup c$ à B_n ; ce faisant, on retire c de U et on l'ajoute à B_n ; notons que le nombre de composantes de $Fr U$ n'a pas augmenté.

Supposons justement que $Fr U$ possède plusieurs composantes connexes; on peut supposer que l'on a choisi U de telle sorte que le nombre de composantes connexes de sa frontière soit maximal. Soient α_1 et α_2 deux d'entre elles. Notons que, comme U est connexe, $Fr U$ est totalement incluse dans une seule composante du bord de B_n ; ainsi, α_1 et α_2 sont des arcs et non des courbes fermées. Soit β un chemin correctement plongé dans U connectant les milieux de α_1 et α_2 . On adjoint alors à B_n un voisinage régulier N de β . Notons que β partitionne U en deux parties; en effet, les extrémités de β coupent la composante connexe de ∂B_n en deux parties; et l'union de l'une de ces parties avec β est une courbe simple fermée, une courbe de Jordan de S^2 , qui découpe S^2 en deux disques disjoints ayant tout deux une intersection non nulle avec U . Ainsi, les deux composantes de la frontière de N dans U sont séparées par β . Finalement, après l'ajout de N à B_n , U donne naissance à deux nouvelles composantes U_1 et U_2 de $S \setminus B_n$ qui sont telles que la somme des composantes connexes de $Fr U_1 \cup Fr U_2$ est égale au nombre de composantes connexes de $Fr U$; par ailleurs, $Fr U_1$ et $Fr U_2$ ne sont pas vides et contiennent donc chacune au moins une composante. Par voie de conséquence, $Fr U_1$ et $Fr U_2$ comportent toutes les deux strictement moins de composantes que $Fr U$; nous avons donc fait décroître le nombre maximal de composantes connexes de la frontière d'une composante de $S \setminus B_n$. Si U_1 ou bien U_2 est compacte, alors on l'adjoint à B_n .

□

$Fr(B_n)$ est donc composée d'un nombre fini k_n de courbes; ces courbes délimitent $k_n + 1$ régions $U_{n,0}, U_{n,1}, \dots, U_{n,k_n-1}$ et B_n . Pour tout couple n, k d'entiers tel que $0 \leq k \leq k_n - 1$, on note $\beta_{n,k} = U_{n,k}^*$. On obtient alors le résultat suivant :

Lemme 2.4.9

$\beta_{n,k}$ est un ouvert fermé, en particulier, c'est un compact. $\{\beta_{n,k} \mid n \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq k_n - 1\}$ constitue une base pour la topologie de $B(S)$.

Lemme 2.4.10

Soit $A_1, A_2 \subset B(S)$ deux sous-espaces de $B(S)$ avec A_1 compact, qui réalisent une partition de $B(S)$ saturée pour la relation d'appartenance à la même fleur, i.e. si p_1 et p_2 sont deux bouts de S appartenant à la même fleur, alors $p_1, p_2 \in A_1$ ou bien $p_1, p_2 \in A_2$; $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ et $A_1 \cup A_2 = B(S)$; il existe alors une courbe simple fermée c correctement plongée dans S qui induit cette partition, en ce sens que $S \setminus c$ possède deux composantes connexes U_1 et U_2 avec $U_1^ = A_1$ et $U_2^* = A_2$.*

Réciproquement, toute courbe simple fermée correctement plongée dans S partitionne $B(S)$ en deux compacts saturés pour la relation d'appartenance à la même fleur.

Preuve. On conserve les notations du lemme 2.4.9. Considérons $N = \{(n, k) \in \mathbb{N}^2 \mid \beta_{n,k} \in A_1\}$; la famille $\{\beta_{n,k} \mid (n, k) \in N\}$ est un recouvrement d'ouverts de A_1 . Comme A_1 est

supposé compact, il existe une partie finie $\tilde{N} \subset N$ telle que $\{\beta_{n,k} \mid (n,k) \in \tilde{N}\}$ recouvre déjà A_1 . Dans \tilde{N} , certain éléments sont inutiles : si $(n_1, k_1) \in \tilde{N}$ est tel qu'il existe $(n_2, k_2) \in \tilde{N}$ tel que $U_{n_1, k_1} \subset U_{n_2, k_2}$, alors on élimine (n_1, k_1) . Par ailleurs, notons que deux parties U_{n_1, k_1} et U_{n_2, k_2} de S sont soit disjointes, soit incluses l'une dans l'autre; il s'en suit que la famille de courbes $\{Fr U_{n,k} \mid (n,k) \in \tilde{N}\}$ satisfait les conditions du lemme 2.4.7; ce qui nous permet de conclure.

La réciproque est une conséquence directe du lemme 2.4.4.

□

Lemme 2.4.11

Soit p un bout appartenant à une fleur de cardinal strictement supérieur à 1. Alors il existe une suite de régions emboîtées $(P_n)_n$ représentant p telle que :

- *Pour tout n , $Fr P_n$ est formé d'un unique arc correctement plongé dans S .*
- *$\forall n, n' : Fr P_n$ et $Fr P_{n'}$ ne peuvent pas être séparées par une courbe simple fermée.*

Preuve. Soit $(B_n)_n$ une suite de partie de S satisfaisant les conditions du lemme 2.4.8.

On choisit comme représentant de p une suite de régions emboîtées $(P_n)_n$, où pour tout n , $P_n = U_{n,k}$ où k est l'unique entier tel que $p \in \beta_{n,k}$. On sait par le lemme 2.4.8, que $Fr P_n$ n'est formée que d'une seule courbe correctement plongée.

Il existe alors un entier n_0 tel que $\forall n, n' \geq n_0 : Fr P_n$ et $Fr P_{n'}$ ne peuvent pas être séparées par une courbe simple fermée. Sinon, en appliquant le lemme 2.4.4 on montre que $|\Phi^{-1}(\Phi(p))| = 1$; effet, on pourrait alors construire une suite de régions emboîtées de S dont les frontières seraient des courbes simples fermées; et dans ce cas, p serait séparé de tout autre bout par une courbe simple fermée, ce qui impliquerait que la fleur de p serait réduite à lui-même. On élimine tous les P_n pour $n < n_0$.

Nous avons le second point. Et pour tout n , $Fr P_n$ est maintenant formée d'un unique arc correctement plongé dans S .

□

Proposition 2.4.1

Soit f une fleur de cardinal strictement supérieur à 1. L'ensemble des bouts de f , limites de composantes du bord, est au plus dénombrable et dense dans f .

Preuve. D'abord, comme on ne considère que des triangularisations dénombrables, le nombre de composantes connexes du bord est nécessairement dénombrable.

Soit p un bout appartenant à une fleur infinie, $(P_n)_n$ un représentant de p donné par le lemme 2.4.11.

Soit γ' et γ'' les composantes du bord de S contenant les extrémités de $Fr P_n$ qui est réduite à un arc correctement plongé. Si $\gamma' \neq \gamma''$, une analyse simple des différents cas de figure montre qu'aucune des deux ne peut être compacte, sans quoi $Fr P_n$ ne séparerait pas S . Par ailleurs, si $\gamma' = \gamma''$ est une courbe fermée compacte, on montre que la partition de $B(S)$ qui est induite par $Fr P_n$ peut être aussi induite par une courbe simple fermée correctement plongée dans S ; ce qui est contradictoire avec les conditions du lemme 2.4.11. On peut donc supposer que γ' et γ'' sont des courbes non compactes.

L'un des deux côtés de γ' (resp. γ'') appartient à P_n . On considère p' (resp. p'') le bout limite de γ' (resp. γ'') dans P_n , il appartient à la fleur de p . Sinon, il existe une courbe simple fermée c correctement plongé dans S qui sépare p de p' et p'' qui eux, appartiennent à la même fleur par le lemme 2.4.6. Choisissons n' tel que $P_{n'} \cap c = \emptyset$. c sépare alors $Fr P_n$ et $Fr P_{n'}$, ce qui contredit le choix de $(P_n)_n$. p' et p'' appartiennent donc à f , on choisit un tel p' pour chaque P_n , on le note p'_n . Comme P_n^* est une base de voisinage de p , la suite $(p'_n)_n$ converge vers p .

□

Un ordre cyclique dans les fleurs

S est planaire et donc *orientable* (cf. [Mas67, HY61]); on la suppose donc orientée. Cette orientation permet de définir rigoureusement l'idée de gauche et de droite pour un observateur se déplaçant sur une courbe. Soit γ une courbe simple orientée partageant S en deux parties S_1 et S_2 ; ces deux surfaces héritent chacune d'une orientation de S , mais seule l'une des deux est compatible avec celle de γ , disons S_1 . Nous dirons alors qu'une partie connexe par arc $A \subset S \setminus \gamma$ est à *gauche* de γ si et seulement si $A \subset S_1$; dans le cas contraire, nous dirons que A est à *droite* de γ .

Lemme 2.4.12 *Soient p_1, p_2, p_3 trois bouts appartenant à la même fleur. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

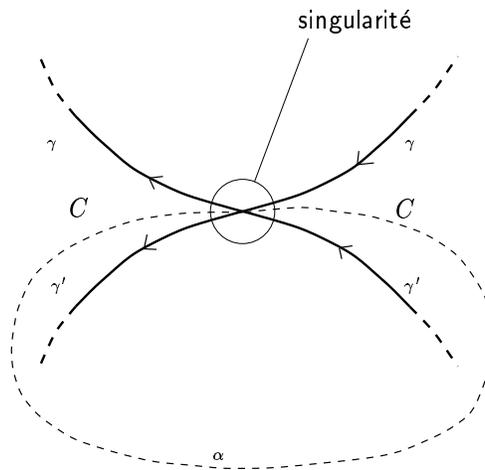
- *il existe une courbe γ ayant pour limites p_1 et p_2 , orientée de p_1 à p_2 , qui laisse p_3 sur sa gauche, i.e. $\forall (P_n^3)_n \in p_3, \exists n_0 \geq 0$ tel que $P_{n_0}^3$ est à gauche de γ ;*
- *toute courbe γ ayant pour limites p_1 et p_2 , orientée de p_1 à p_2 , laisse p_3 sur sa gauche.*

Preuve. Il faut montrer que la première condition implique la seconde. Supposons donc qu'il existe une courbe γ ayant pour limites p_1 et p_2 , orientée de p_1 à p_2 , qui laisse p_3 sur sa gauche et soit γ' une autre courbe ayant pour limites p_1 et p_2 , orientée de p_1 à p_2 . Comme précédemment, on considère les parties S_1, S_2, S'_1, S'_2 de S où S_1 et S'_1 (resp. S_2 et S'_2) sont respectivement les parties gauches (resp. droites) de γ et de γ' . Nous allons voir que, ni $S_1 \cap S'_2$, ni $S'_1 \cap S_2$ ne peuvent contenir p_3 .

Quitte à déformer légèrement γ ou γ' on peut supposer que leur intersection est formée de point isolés. Supposons donc qu'il existe une composante connexe C de l'intérieur de $S_1 \cap S'_2$ qui contienne p_3 . La frontière de C est contenue dans $\gamma \cup \gamma'$; c'est en fait une 1-variété. En effet, les seules singularités possibles sont des points de croisements de γ et γ' ; et lorsque l'on énumère tous les cas de figures, seul l'un d'entre eux semble problématique, il est représenté dans la figure 2.4.1. On montre cependant que ce cas est absurde; en effet, les deux parties qui se font face sont connectées par un arc α de C (voir figure); la planarité implique alors que cet arc sépare γ et γ' qui pourtant se rejoignent en p_1 et p_2 ; ces derniers appartiendraient alors à α , ce qui est absurde.

$Fr C$ est donc composée de courbes simples, les cas envisageables sont alors les suivants :

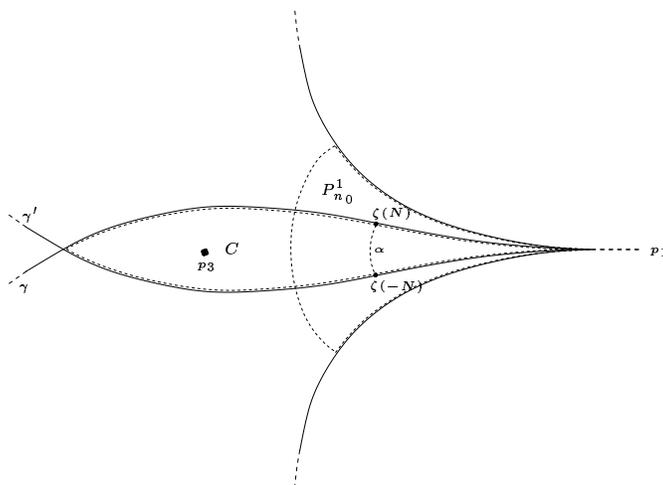
- Supposons que $Fr C$ contienne une courbe simple fermée, la connexité de γ et de γ' ainsi que la planarité de S implique que $Fr C$ ne peut contenir d'autre composante; il s'en suit que p_3



est séparé de p_1 et de p_2 par une courbe simple fermée; par le lemme 2.4.4, c'est contradictoire avec le fait qu'ils appartiennent tous les trois à la même fleur.

- $Fr C$ est donc composée de courbes simples non compactes; soit ζ l'une d'elle. Comme $\zeta \subset \gamma \cup \gamma'$, on peut montrer que ses limites existent et sont dans $\{p_1, p_2\}$. Par ailleurs, de chaque côté, au bout d'un certain temps, ζ est confondue avec γ , ou bien γ' . Il s'en suit que le nombre de composantes de $Fr C$ n'exède pas 2.

Supposons que les deux limites de ζ soient égales au même bout, par exemple p_1 . Plongée dans S^2 , $\bar{\zeta}$ est alors une courbe simple fermée; elle divise S^2 en deux disques D_1 et D_2 , l'un d'eux contenant p_2 , disons D_2 ; C est alors contenue dans D_1 . Mais revenons à S , soit $(P_n^1)_n$ un représentant de p_1 ; il existe $n_0 \geq 0$ tel que $P_{n_0}^1$ n'intercepte pas p_3 ; ensuite, il existe $L > 0$ tel que $\zeta(]-\infty, -L] \cup [L, \infty[) \subset P_{n_0}^1$, et ce dernier est connexe; il existe donc un arc α connectant $\zeta(-L)$ et $\zeta(L)$ dans $P_{n_0}^1$. Nous avons fabriqué une courbe simple fermée : $\zeta([-L, L]) \cup \alpha$ qui sépare p_1 et p_2 de p_3 (cf figure), c'est une contradiction.



Ainsi ζ a pour limite p_1 et p_2 . Mais alors, ζ est confondue avec γ ou bien γ' ; pour voir cela, on se sert de l'orientation de C par rapport à celle de γ et γ' . Trois cas se présentent alors: (i) $FrC = \gamma \cup \gamma'$ avec $\gamma \cap \gamma' = \emptyset$, (ii) $FrC = \gamma$ ou bien (iii) $FrC = \gamma'$; les deux derniers cas étant symétriques. Pour (i), on applique la méthode précédente des deux côtés; (ii) veut dire que γ est à droite de γ' et par voie de conséquence, que γ' est à droite de γ , car C et S_1 ont la même frontière dans S . Il existe alors un chemin α dans $S_2 \cap S'_2$ connectant γ et γ' ; ce chemin arrive sur γ et sur γ' par la droite. D'autre part, γ et γ' sont disjointes mais ont les mêmes limites: dans S^2 , $\overline{\gamma \cup \gamma'}$ est une courbe simple fermée, les orientations de γ et de γ' montrent que α connecte les deux disques séparés par $\overline{\gamma \cup \gamma'}$; c'est une contradiction.

Le lemme est démontré.

□

Le lemme précédent démontre la validité de la définition suivante:

Définition 9

Soient f une fleur de $B(S)$. On définit une relation G d'arité 3 sur f par $\forall p_1, p_2, p_3 \in f$, $G(p_1, p_2, p_3)$ si et seulement si il existe une courbe γ ayant pour limite p_1 et p_2 , orientée de p_1 à p_2 , qui laisse p_3 sur sa gauche.

Lorsqu'une courbe simple joint deux bouts p_1 et p_2 de la même fleur f , elle partage S en deux parties S_1 et S_2 (cf. lemme 2.4.5), ce qui induit une partition de f en deux ensembles qui correspondent aux bouts p tels que $G(p_1, p_2, p)$ est vraie d'une part et d'autre part ceux pour lesquels $G(p_1, p_2, p)$ est fausse. Notons que $G(p_1, p_2, p_3) \Leftrightarrow \neg G(p_1, p_3, p_2)$.

Lemme 2.4.13

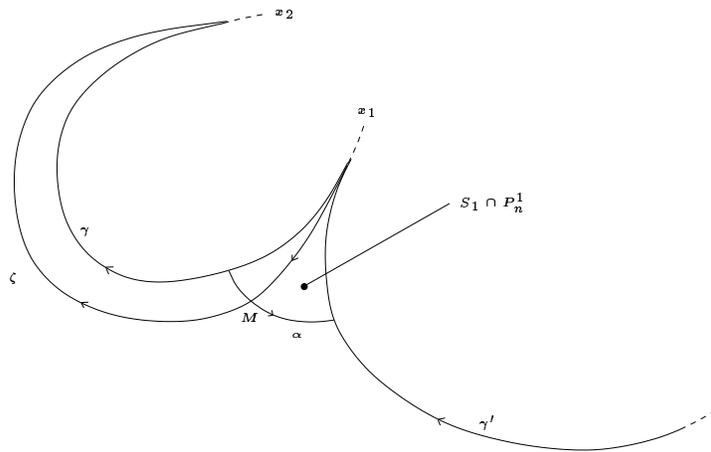
Soient $x_1, x_2 \in B(S)$, alors x_1 et x_2 sont les limites d'une même composante non compacte γ du bord de S si et seulement si ils appartiennent à la même fleur f et on a: soit $G(x_1, x_2, x)$ pour tout $x \in f$, soit $\neg G(x_1, x_2, x)$ pour tout $x \in f$.

Preuve. (\Rightarrow) est facile. On démontre (\Leftarrow).

Soient donc x_1 et x_2 , deux bouts de S appartenant à la même fleur f , tels que pour tout autre bout x de f , $G(x_1, x_2, x)$ soit vraie.

Soit α un segment correctement plongé dans S séparant x_1 de x_2 ; pour construire α , on considère une suite de parties emboîtées $(P_n^1)_n$ représentant p_1 donnée par le lemme 2.4.11; pour n suffisamment grand, P_n^1 ne contient pas p_2 ; on définit alors α comme étant la frontière de P_n^1 . Comme précédemment, on montre que les deux courbes γ et γ' du bord de S qui sont connectées par α sont toutes les deux non compactes; et l'une d'elle, γ par exemple, est orientée en direction opposée de P_n^1 ; γ' est alors orienté en direction de P_n^1 (on peut voir cela en regardant l'orientation de $\gamma \cup \alpha \cup \gamma'$ induite par l'orientation de P_n^1 ; d'ailleurs, nous supposons dans la suite que α est orienté de la sorte, i.e. de γ à γ' . Nous allons voir que γ est notre candidat. Par le lemme 2.4.6, on peut d'ores et déjà dire que les limites de γ sont des bouts de la même fleur, qui est en fait f .

Soit ζ une courbe allant de x_1 à x_2 , ne coupant α qu'en un seul point M . γ est alors située à droite de ζ ; en effet, soit S_1 la partie gauche de ζ ; par définition, c'est elle qui lui induit son orientation; cette orientation est déjà induite par $S_1 \cap P_n^1$, or $\zeta \cap P_n^1 \cup \alpha \cap S_1$



appartient à la frontière de $S_1 \cap P_n^1$; d'autre part, les orientations de $\zeta \cap P_n^1$ et de $\alpha \cap S_1$ sont compatibles avec celle de $S_1 \cap P_n^1$. Mais $\zeta \cap P_n^1$ est orientée en direction de M , donc $\alpha \cap S_1$ est orientée dans la direction opposée à M ; ce qui prouve que l'extrémité de α appartient à S_1 , et par voie de conséquence, que son origine est à droite de ζ ; par ailleurs, cette dernière appartient à γ : γ est donc située à droite de ζ . Donc les limites de γ sont à droite de ζ . Ainsi, les bouts limites de γ , qui appartiennent à f , ne sont pas à gauche de ζ ; et par hypothèse, les seuls bouts de f qui ne sont pas à gauche de ζ sont x_1 et x_2 . Les limites de γ sont donc x_1 et x_2 .

□

2.4.2 Classification des surfaces à bord planaires

Le lemme suivant fait partie du folklore de la théorie des surfaces (cf. [Mas67]). En un certain sens, le théorème 6 en constitue l'extension au cas des surfaces non-compactes.

Lemme 2.4.14

Soient S_1 et S_2 deux surfaces à bord compactes planaires orientées, $f : \partial S_1 \rightarrow \partial S_2$ un homéomorphisme conservant l'orientation. Alors f est prolongeable en un homéomorphisme entre S_1 et S_2 .

Idée de preuve. On se ramène au cas du disque en découpant le long d'arcs essentiels.

□

Nous énonçons maintenant le résultat principal de cette partie. Nous dirons qu'un bout d'une surface S est *limite de composantes compactes du bord* si pour toute suite de régions $(P_n)_n$ le représentant, chaque P_n contient au moins une composante compacte de ∂S .

Théorème 6

Soient S et S' deux surfaces orientées ayant même nombre, éventuellement infini, de composantes compactes de bord; $\sigma : B(S) \rightarrow B(S')$ un homéomorphisme échangeant les fleurs, conservant l'ordre cyclique interne à chaque fleur et échangeant les bouts limites de composantes compactes de bord. Alors S et S' sont homéomorphes; de façon plus précise, σ se prolonge en un homéomorphisme entre les compactifications $(S, S \cup B(S))$ et $(S', S' \cup B(S'))$.

Preuve. Soient $(B_n)_n$ (resp. $(B'_n)_n$) une suite de régions de S (resp. S') satisfaisant les conditions du lemme 2.4.8. On suppose que $B_0 = B'_0 = \emptyset$. Nous allons construire par récurrence une suite d'homéomorphismes f_n entre des compacts d'intérieurs non vides $A_n \subset S$ et $A'_n \subset S'$ telle que :

- (i) $(A_n)_n$ et $(A'_n)_n$ remplissent les conditions du lemme 2.4.8;
- (ii) pour tout entier k , $B_{2k} \subset A_{2k}$ et $B'_{2k+1} \subset A'_{2k+1}$;
- (iii) pour tout n , f_{n+1} prolonge f_n ;
- (iv) si U est l'adhérence d'une composante connexe de $S \setminus A_n$, alors $Fr U$ est connexe et $f_n(Fr U)$ est la frontière d'une composante connexe U' de $S' \setminus A'_n$ avec $\sigma(U^*) = U'^*$;
- (v) U contient une composante compacte du bord de S si et seulement si U' en contient une de S' ; et dans ce cas, elles en contiennent une infinité.

Si S et S' ne contiennent qu'un nombre fini de composantes compactes de bord, on choisit pour A_0 et A'_0 des disques troués englobant toutes les composantes compactes du bord de S et de S' ; dans le cas contraire, on pose $A_0 = A'_0 = \emptyset$.

On construit les f_n alternativement; pour les rangs pairs, on définit d'abord A_n comme partie de S contenant A_{n-1} remplissant les bonnes propriétés, i.e. (i) et (ii); on construit alors f_n et A'_n de telle sorte que A'_n remplisse les propriétés voulues et soit homéomorphe à A_n . Pour les rangs impairs, on se donne d'abord A_n et on procède symétriquement; nous ne décrirons la construction que pour le cas des rangs impairs.

Supposons construits les f_n jusqu'au rang $N - 1$ pour N impair. On pose $A'_N = B'_m$ où $m = \min\{n \in \mathbb{N} \mid n \geq N \text{ et } A'_{N-1} \subset \overset{\circ}{B}'_n\}$. Nous allons construire f_N et A_N petit à petit en considérant chaque composante connexe de $A'_N \setminus A'_{N-1}$ l'une après l'autre.

Considérons C' , l'adhérence d'une telle composante; c'est une surface compacte plane à bord. Le but est de lui associer dans S une sous-surface C contigüe à A_{N-1} ainsi qu'un homéomorphisme $f : (C, Fr C) \rightarrow (C', Fr C')$ tel que $f^{-1}(C' \cap A'_{N-1}) = C \cap A_{N-1}$ et que $f|_{C \cap A_{N-1}} = f_{N-1}|_{C \cap A_{N-1}}$. La méthode que nous allons adopter pour ce faire, consiste à assigner une courbe de S à chaque composante de la frontière de C' , ainsi qu'un homéomorphisme entre cette courbe et la composante en question, de telle sorte que l'ensemble de ces courbes délimitera exactement C ; on étendra ensuite ces homéomorphismes en un homéomorphisme entre C et C' au vu du lemme 2.4.14.

Il nous faut auparavant fixer quelques notations; soient c'_0, c'_1, \dots, c'_k les courbes simples fermées du bord de C' ; on suppose que c'_0 intercepte A'_{N-1} ; c'est d'ailleurs la seule car A'_{N-1} et C' sont planaires et connexes et ne se rencontrent que sur leurs bords. L'orientation de S' induit une orientation pour C' , qui à son tour oriente les c'_i ; on les considère orientées de la sorte. Il se peut que certaines des c'_i aient des parties communes avec le bord de S' ; notons $I = \{i \in [0, k] \mid c'_i \cap \partial S' \neq \emptyset\}$, l'ensemble d'indices correspondant. Pour $i \in I$, c'_i est formée alternativement de morceaux du bord de S' et d'arcs correctement plongés, composantes connexes de $Fr C'$; choisissons l'un d'eux: α'_{i0} , pour $i = 0$, on choisit $C' \cap A'_{N-1}$; puis numérotons les autres dans leur ordre d'apparition en suivant l'orientation de c'_i : $\alpha'_{i1}, \alpha'_{i2}, \dots, \alpha'_{ik_i}$; pour tout $i \notin I$, on pose $\alpha'_{i0} = c'_i$ et $k_i = 0$. On regroupe la suite des c'_i

pour $i \notin I$ et les suites des α'_{ij} en une notation uniforme : d'_0, d'_1, \dots, d'_m dans l'ordre évoqué précédemment. Enfin, pour tout $h \in [1, m]$, on considère Y'_h , adhérence de l'intersection des parties gauches des d'_i pour $i \in [1, h]$. Notons que $C' = Y'_m$.

La méthode de preuve consiste alors à construire par induction une suite de courbes orientées d_0, d_1, \dots, d_m dans S , puis considérer les parties Y_h , pour $h \in [1, m]$, obtenues de façon similaire aux Y'_h mais à partir des d_h , et une liste d'homéomorphismes $g_h : d_0 \cup d_1 \cup \dots \cup d_h \rightarrow d'_0 \cup d'_1 \cup \dots \cup d'_h$ de telle sorte que :

- (1) g_h prolonge g_{h-1} .
- (2) g_h conserve l'orientation des courbes.
- (3) Y_h , l'adhérence de l'intersection des parties gauches des d_i pour $i \in [1, h]$, est telle que $Y_h^* = \sigma^{-1}(Y_h'^*)$.
- (4) $d_0 = f_{N-1}^{-1}(d'_0)$ laisse A_{N-1} sur sa droite.

Le premier pas de cette induction est donné par $f_{N-1} : d_0 = f_{N-1}^{-1}(d'_0)$ et $g_0 \equiv f_{N-1}|_{d_0}$; on choisit l'orientation de d_0 pour que le point (4) soit satisfait; le point (3), pour $h = 0$, est satisfait quant à lui grâce à la condition (iv) de l'hypothèse de récurrence sur f_{N-1} .

Supposons donc construits d_0, \dots, d_{h-1} ; plusieurs cas se présentent alors :

Cas 1 : d'_h est une courbe simple fermée

$Y_{h-1}'^* \setminus Y_h'^*$ est un ouvert fermé de $B(S')$, et en particulier, un compact. Par ailleurs, la partition entre $Y_{h-1}'^* \setminus Y_h'^*$ et son complémentaire dans $Y_{h-1}'^*$ est réalisée par d'_h qui est une courbe simple fermée correctement plongée dans Y_h' ; cette partition est donc saturée pour la relation d'appartenance à la même fleur. Il en est donc de même dans Y_{h-1} pour $\sigma^{-1}(Y_{h-1}'^* \setminus Y_h'^*) = Y_{h-1}^* \setminus \sigma^{-1}(Y_h'^*)$. Par le lemme 2.4.10, il existe donc une courbe simple fermée correctement plongée dans Y_{h-1} qui réalise cette partition; c'est par définition d_h . On oriente cette courbe de telle sorte qu'elle laisse $Y_{h-1}^* \setminus \sigma^{-1}(Y_h'^*)$ sur sa droite. On a ainsi $Y_h^* = Y_{h-1}^* \setminus \sigma^{-1}(Y_h'^* \setminus Y_h'^*) = \sigma^{-1}(Y_h'^*)$. On construit alors g_h prolongeant g_{h-1} par un homéomorphisme entre d'_h et d_h .

Cas 2 : d'_h est un arc correctement plongé.

Soient γ'_0 et γ'_1 les composantes du bord de S' connectées par d'_h ; on suppose que d'_h est orienté par Y_h' de γ'_0 à γ'_1 , notons $m'_i = \gamma'_i \cap d'_h$ ($i = 0, 1$). Notons que γ'_0 et γ'_1 ne peuvent être compactes du fait que d'_h est une courbe séparant S' . On considère le bout p'_i de $B(S')$ limite de celle des deux parties de γ'_i séparées par m'_i n'interceptant pas Y_h' ; notons que comme d'_h est séparante, par le lemme 2.4.6, p'_1 et p'_2 appartiennent à la même fleur. Remarquons que γ'_0 est orientée vers p'_0 alors que γ'_1 est orientée dans la direction opposée à celle de p'_1 .

Soient maintenant $p_i = \sigma^{-1}(p'_i)$; en considérant l'autre limite de γ'_i , le lemme 2.4.13 montre p_i est limite d'une composante du bord de S , notons la γ_i ; notons que p_0 et p_1 appartiennent à la même fleur $f = \sigma^{-1}(f')$ où f' est la fleur de p'_0 et p'_1 . L'orientation des γ_i relativement à p_i est la même que celle de γ'_i relativement à p'_i . d_h devra joindre γ_0 à γ_1 .

Soit $m_i \in \gamma_i \cap Y_{h-1}$ ($i = 0, 1$); $\gamma_i \cap Y_{h-1}$ est non vide car $p_0, p_1 \in Y_{h-1}^* = \sigma^{-1}(Y_{h-1}'^*)$. Le but est de les connecter par un arc d_h correctement plongé dans Y_{h-1} , orienté de m_0 à m_1 , qui réalise la partition de Y_{h-1} en $Y_{h-1}^* \setminus \sigma^{-1}(Y_h'^*)$ et son complémentaire. Notons que $Y_{h-1}^* \setminus \sigma^{-1}(Y_h'^*)$ sera alors nécessairement à droite de d_h . Soit d'abord un arc α connectant

m_0 et m_1 dans Y_{h-1} , orienté vers m_1 , ne coupant aucun des d_i déjà construit ($i = 1 \dots h-1$). Comme p_0 et p_1 appartiennent à la même fleur, par le lemme 2.4.6, α sépare S en deux parties. Notons que cet arc ne sépare pas p_0 de p_1 . Soit ζ la courbe non compacte partant de p_0 , empruntant γ_0 en sens inverse jusqu'à m_0 , suivant ensuite α et revenant enfin vers p_1 en empruntant γ_1 . ζ est orientée de p_0 vers p_1 et les bouts de f qui sont sur sa droite sont ceux qui sont dans la partie droite de α ; or, comme σ conserve l'ordre circulaire, ces bouts sont bien les images réciproque par σ des bouts de f' qui sont à droite de d'_h . Soit U la partie droite de α , on a $U^* \cap f = \sigma^{-1}((Y'_{h-1} \setminus Y'_h) \cap f')$.

Il reste à arranger α pour ajouter ce qui manque à U^* c'est-à-dire $\sigma^{-1}(Y'_{h-1} \setminus Y'_h) \setminus U^*$ et retirer ce qu'il y a en trop : $U^* \setminus \sigma^{-1}(Y'_{h-1} \setminus Y'_h)$. Pour cela remarquons que $\sigma^{-1}(Y'_{h-1} \setminus Y'_h) \setminus U^*$ est un ouvert fermé, saturé pour la relation d'appartenance à la même fleur; en effet, la seule fleur susceptible d'être coupée en deux est f . Par un procédé similaire au cas 1, on peut construire une courbe simple fermée ε qui isole $U^* \setminus \sigma^{-1}(Y'_{h-1} \setminus Y'_h)$. On connecte maintenant α à ε par un arc puis on prend la frontière d'un voisinage régulier du tout. On utilise la même méthode pour retirer $U^* \setminus \sigma^{-1}(Y'_{h-1} \setminus Y'_h)$ de U^* . Nous avons finalement construit un arc qui laisse A_{N-1} sur sa gauche et qui réalise la partition en $\sigma^{-1}(Y'_{h-1} \setminus Y'_h)$ et son complémentaire. On le note d_h , et on établit un homéomorphisme $f_h : d_h \rightarrow d'_h$ respectant l'orientation.

Finalement, on définit C comme étant l'intersection des parties gauches des d_h , i.e. Y_m . Il faut encore s'occuper des composantes compactes du bord de S et de S' . On suppose que si C' contient une telle composante, alors l'un des Y'_h en contient une infinité et donc l'un des bouts de Y'_h est limite de composante compacte du bord. Par hypothèse sur σ , Y_h en contient donc un aussi. Il reste à modifier d_h pour qu'il aille chercher une composante compacte de ∂S dans Y_{h-1} . Ce qui se fait en considérant le voisinage régulier de l'union de d_h , d'un chemin conduisant à une telle composante et de la composante elle-même. Finalement, C est une surface planaire compacte car $Y_m^* = \sigma^{-1}(Y'_m) = \emptyset$.

Pour finir, par le lemme 2.4.14, on étend g_m en un homéomorphisme entre C et C' ; cet homéomorphisme prolonge bien f_{N-1} . On opère de même pour chaque composante de $A'_N \setminus A'_{N-1}$. On laisse au lecteur le soin de vérifier que la construction de f_N satisfait les hypothèses de récurrence. Le cas N pair est totalement symétrique, il ne sera pas traité ici. \square

2.4.3 Considérations algorithmiques

Nous avons vu dans la section 2.4 que l'ensemble des bouts d'une surface planaire à bord est structuré en fleurs de façon canonique, chacune d'entre elles étant munie d'un ordre cyclique. En matière d'algorithme, nous n'avons pas atteint de résultat concernant cette classification; néanmoins nous donnons dans cette partie les points nous paraissant essentiels pour la mise au point d'un algorithme de décision pour le problème de l'homéomorphisme des surfaces planaires HR-équationnelles.

Soit S une surface planaire à bord HR-équationnelle. On suppose que toutes les surfaces considérées ici ne possèdent dans leurs bords aucune composante compacte.

Conjecture : *S ne possède qu'un nombre fini de fleurs à isomorphisme près³.*

En ce sens, on peut associer à chaque fleur de S son type d'isomorphisme. L'espace des fleurs de S que l'on note $\mathcal{F}(S)$, i.e. le quotient de sa frontière idéale par la relation d'appartenance à la même fleur, est ainsi partitionné en plusieurs types d'isomorphisme de fleur : $\mathcal{F}(S) = \bigsqcup_{i \in I} \mathcal{F}_i$.

Conjecture : *La sous-algèbre topologique de $2^{\mathcal{F}(S)}$, engendrée par les \mathcal{F}_i , est de cardinal fini. En particulier $\mathcal{F}(S)$ est de type fini au sens de la définition 7.*

Une preuve constructive de cette dernière conjecture donnerait un algorithme pour résoudre notre problème. Néanmoins, nous n'avons pas réussi à mettre en évidence un invariant qui nous permettrait de caractériser la classe d'isomorphisme d'une fleur.

Le premier cas à explorer est celui des surfaces planaires HR-équationnelles à une seule fleur, i.e. les surfaces planaires simplement connexes⁴.

On peut coder une telle surface à l'aide d'un graphe pointé de degré sortant au plus 2 dont les arcs sortants d'un même sommet sont ordonnés. Soit G un tel graphe. On obtient la surface S_G codée par G de la façon suivante : on considère le développement T_G de G , i.e. l'arbre des chemins orientés dans G partant de la racine. On plonge cet arbre dans le plan de telle sorte que, lorsque l'on tourne autour d'un sommet donné à partir de son arc entrant en suivant l'orientation du plan, le premier fils vient en premier. S_G est alors définie comme étant le voisinage régulier de T_G .

On montre qu'un tel graphe est calculable pour une surface HR-équationnelle donnée; néanmoins, il ne constitue pas, et loin s'en faut, un invariant. Cependant, en suivant des idées similaires à celles développées dans la section 2.1, il permet de calculer l'algèbre de Pierce de la fleur; cette dernière est un invariant, mais pas suffisant.

Question : *Quel sont les invariants de S situés “entre” G et l'algèbre de Pierce de sa frontière idéale⁵.*

A cet égard, un objet probablement important à considérer est le graphe des composantes fortement connexes de G .

3. De façon naturelle on considère que deux fleurs sont isomorphes si elle sont liée par un homéomorphisme conservant l'ordre cyclique.

4. Rappelons que l'on ne considère que des surfaces qui ne possèdent pas de composante de bord compacte.

5. le terme “entre” fait référence à l'existence de deux morphismes surjectifs, l'un de G sur le graphe de ses composantes fortement connexes, l'autre du graphe des composantes connexes sur le graphe des atomes de l'algèbre de Pierce.