

# Chapitre 3

## Arborescence et régularité en dimension 3

“Et c’est ainsi que dans l’étroitesse d’un vase, dans son obscurité, ils vivent, chantent, pondent et fixent leurs œufs, meurent. Puisqu’ils perpétuent l’espèce, oui, c’est préférable à les élever en cage et qu’ils ne vivent que l’espace d’un été, mais il reste que c’est une vie au fond d’un vase : pour eux, le vase est l’univers.”

Yasunari Kawabata, “*Kyoto*”, 1971.

Ce chapitre est consacré à l’étude des variétés non compactes de dimension 3. Explorant dans ce contexte l’idée de régularité arborescente, nous fournirons une caractérisation des 3-variétés HR-équationnelles en termes de recollement de 3-variétés à bord compactes. Cela étant, le cas hyperbolique nous conduira à un résultat de rigidité dont la démonstration s’appuie sur les théorèmes de Thurston et de Sullivan, fondamentaux en géométrie hyperbolique.

Forts de ce résultat, nous étudierons la structure des groupes fondamentaux des variétés HR-équationnelles, et particulièrement comment il est possible d’en avoir une vue constructive, et de donner une solution algorithmique au problème du mot.

Par ailleurs, nous verrons que les revêtements réguliers qui possèdent une triangularisation HR-équationnelle se caractérisent fort bien en terme de groupes : ce sont ceux dont le graphe de Schreier est le graphe de Cayley d’un groupe virtuellement libre.

### 3.1 Variétés HR-équationnelles de dimension 3

#### 3.1.1 Arborescence

Le concept de *variété arborescente de dimension 3* est par essence très proche de celui de somme connexe arborescente qui fût introduit dans le chapitre 2, définition 5. Néanmoins, certains arguments nous ont conduit à ne pas unifier ces deux notions. Le concept de somme connexe existe aussi en dimension 3; il consiste à recoller deux 3-variétés *fermées*, i.e. compactes sans bord, en leurs retirant une boule à chacune et en identifiant les bords sphériques

restant. La notion de somme connexe arborescente prend dès lors un sens évident en dimension 3. Mais il n'y a aucun espoir de retrouver des résultats comparables à ceux que nous avons obtenus en dimension 2 dans le cadre des surfaces. Le concept de 3-variété arborescente est plus général que celui de somme connexe arborescente en ceci qu'il autorise le recollement des morceaux sur des bords qui ne sont pas nécessairement des sphères. Mais cette plus grande liberté implique aussi une plus grande complexité des données à considérer pour établir des méthodes de description constructives de ces objets.

Nous introduisons le vocabulaire de base de la topologie des variétés de dimension 3. Soit  $M$  une 3-variété triangularisée; nous appellerons surface *correctement plongée* dans  $M$  tout sous-complexe simplicial de  $M$  qui est la triangularisation d'une surface connexe  $S$  telle que  $S \cap \partial M = \partial S$ . Une telle surface est dite à *deux bords* si la frontière de chacun de ses voisinages réguliers comporte deux composantes connexes; elle est dite *séparante* si  $M \setminus S$  possède exactement deux composantes connexes. Nous dirons que  $M$  est *première* si on ne peut pas la décomposer en somme connexe sur des sphères de deux variétés non-triviales; nous dirons qu'elle est *irréductible* si toute sphère correctement plongée dans  $M$  est la frontière d'une boule. Une surface  $S$  non sphérique, correctement plongée dans  $M$  est dite *incompressible* si pour toute application continue  $f : D^2 \rightarrow M$  du disque  $D^2$  dans  $M$  telle que  $f(\partial D^2) \subset S$ , il existe une application  $f_s : D^2 \rightarrow S$  telle que  $f|_{\partial D^2} = f_s|_{\partial D^2}$  (cf. [Hem76, FM97]).  $M$  est dite *de Haken* si elle possède au moins une surface incompressible.  $M$  est dite *acylindrique* si  $\partial M$  est composée de surfaces incompressibles et si tout cylindre  $S^1 \times [0, 1]$  correctement plongé dans  $M$ , dont les composantes de bord  $S^1 \times \{0\}$  et  $S^1 \times \{1\}$  ne sont pas homotopiquement nulles dans  $\partial M$ , est homotope à une partie du bord de  $M$ , i.e. on peut le déformer continuellement de telle sorte qu'il soit totalement inclus dans  $\partial M$  (cf. [Thu86]).

### Définition 10

Soit  $M$  une variété de dimension 3 sans bord triangularisée, éventuellement non-compacte. Nous dirons que  $M$  est **arborescente** s'il existe une famille  $\{S_u\}_u$  de surfaces séparantes et deux à deux disjointes et qui découpent  $M$  en morceaux simples en ce sens qu'il existe un nombre fini de variétés de dimension 3 à bord compactes triangularisées  $M_1, \dots, M_n$  telles que pour chaque composante connexe  $C$  de  $M \setminus \bigcup_u S_u$ , il existe un homéomorphisme simplicial, i.e un isomorphisme de triangularisation,  $\varphi_C : \overline{C} \rightarrow M_{\iota(C)}$  où  $\iota(C) \in [1, n]$ . La décomposition de  $M$ , i.e. la famille  $\{S_u\}_u$ , est dite **incompressible** si chaque  $S_u$  est incompressible.  $M$  est dite **acylindriquement arborescente** si tous les  $M_i$  sont acylindriques.

La construction qui suit montre dans quelle mesure ce concept se rattache à l'idée d'arborescence développée tout au long des chapitres précédents.

Soit  $M$  une variété de dimension 3 arborescente. On conserve les notations de la définition 10; pour chaque  $i \in [1, n]$ , soit  $\{B_{ij}\}_{1 \leq j \leq b_i}$  les composantes du bord de  $M_i$ . Pour toute composante connexe  $C$  de  $M \setminus \bigcup_u S_u$  et pour tout  $u$  tel que  $S_u \subset \overline{C}$ ,  $\varphi_C|_{S_u}$  définit un isomorphisme entre les triangularisations de  $S_u$  et de l'une des composantes du bord de  $M_{\iota(C)}$ . Il n'y a qu'un nombre fini de  $B_{ij}$ ; par conséquent, le nombre de  $S_u$  est fini à homéomorphisme simplicial près. Soit  $\{T_k\}_{1 \leq k \leq m}$  une famille de représentants des  $S_u$ , donnée avec, pour tout  $u$ , un homéomorphisme simplicial  $\psi_u : S_u \rightarrow T_{\mu(u)}$ , où  $\mu(u) \in [1, m]$ . Soient  $i, j, u$  et  $C$  tels que  $\varphi_C(S_u) = B_{ij}$ ;  $\psi_u \circ \varphi_C^{-1}|_{B_{ij}} : B_{ij} \rightarrow T_{\mu(u)}$  est un homéomorphisme simplicial. Or, le

nombre d'homéomorphismes simpliciaux entre deux surfaces triangularisées est fini à isotopie près. Ainsi, quitte à ajouter de nouveaux représentants pour les composantes connexes de  $M \setminus \bigcup_u S_u$ , i.e. de nouveaux  $M_i$ , on peut supposer que  $\psi_u \circ \varphi_C^{-1}|_{B_{ij}}$  ne dépend ni de  $u$ , ni de  $C$ ; on le note  $g_{ij}$ .

$M$  est alors codé par un arbre  $\tau$  construit de la façon suivante : A chaque composante connexe de  $M \setminus \bigcup_u S_u$  est associé un nœud de  $\tau$ , et à chaque  $S_u$  correspond un arc connectant les nœuds associés aux deux composantes de  $M \setminus \bigcup_u S_u$  dont les adhérences se coupent en  $S_u$ . L'orientation des arcs est en un sens arbitraire, elle est choisie de telle sorte que  $\tau$  soit un arbre orienté après avoir choisi la racine de façon arbitraire. On étiquette maintenant les nœuds et les arcs de  $\tau$ . Pour toute composante  $C$ , le nœud de  $\tau$  qui lui est associé est étiqueté par  $\iota(C)$ , l'indice de son représentant. Chaque arc  $e$  est étiqueté par un couple d'entiers défini comme suit : soient  $C$  et  $C'$  les composantes associées respectivement à l'origine et à l'extrémité de  $e$ ; soit  $S_u$  la surface séparante correspondant à  $e$ ;  $S_u$  correspond, via  $\varphi_C$  (resp.  $\varphi_{C'}$ ), à un  $B_{ij}$  (resp.  $B_{i'j'}$ ) dans  $M_{\iota(C)}$  (resp.  $M_{\iota(C')}$ ); l'étiquette de  $e$  est alors définie comme étant le couple  $(j, j')$ .

La donnée de  $\tau$ , des  $M_i$  et des  $g_{ij}$  suffit alors à reconstruire la triangularisation de  $M$ . En effet, pour ce faire, on associe à chaque nœud  $x$  de  $\tau$  une variété de dimension 3 à bord qui est une copie de  $M_i$  où  $i$  est l'étiquette de  $x$ ; ces variétés sont alors recollées deux à deux le long des arcs de  $\tau$  : soit  $e$  un arc étiqueté par un couple  $(j, j')$ , soit  $i$  et  $i'$  les étiquettes de l'origine et l'extrémité de  $e$ ; on recolle alors les deux variétés liées par  $e$  relativement à l'homéomorphisme défini par  $g_{i'j'}^{-1} \circ g_{ij}$ .

Cette méthode de reconstruction d'une variété de dimension 3 arborescente à partir de  $\tau$ , des  $M_i$  et des  $g_{ij}$  démontre en particulier le résultat suivant :

### Proposition 3.1.1

*La triangularisation d'une 3-variété arborescente est codée par un hypergraphe arborescent, i.e. de largeur arborescente finie.*

La réciproque est vraie en dimension 2 (théorème 2), qu'en est-il ici ?

### 3.1.2 Régularité

Il apparaît maintenant naturel d'introduire le concept de régularité suivant.

#### Définition 11

*On conserve les notations introduites page 71. Une 3-variété arborescente  $M$  sera dite **régulière** si elle possède une décomposition, i.e. une famille  $\{S_u\}_u$  de surfaces séparantes, telle que  $\tau$  soit un arbre régulier.*

Les notions d'arborescence et de régularité arborescente ont donc trouvé des formalisations dans le cadre de la dimension 3. La proposition 3.1.1, ainsi que la suivante qui est similaire à la proposition 2.2.1, les placent dans le contexte de ce mémoire.

### Proposition 3.1.2

*Soit  $M$  une variété de dimension 3 sans bord triangularisée. Alors  $M$  possède une triangularisation HR-équationnelle si et seulement si  $M$  est arborescente régulière.*

*Preuve.* ( $\Leftarrow$ ):

Soit  $M$  une 3-variété arborescente régulière définie par la donnée de  $\tau$ , des  $M_i$  et des  $g_{ij}$  (on conserve les notations introduites page 70). On suppose que  $\tau$  est défini comme développement d'un multi-graphe orienté pointé  $(\Gamma, v_0)$  dont les sommets sont étiquetés par des indices correspondant aux  $M_i$  et les arcs par des couples d'indices correspondants aux  $B_{ij}$ . Quitte à ajouter de nouveaux  $M_i$  pour lesquels on modifie la numérotation des composantes de bord, on peut considérer que les couples d'entiers associés aux arcs de  $\Gamma$  sont tous de la forme  $(j, 0)$ . Cela revient à dire que l'on "entre" dans un  $M_i$  toujours par la même composante de bord. Pour chaque  $v \in V_\Gamma$ , on considère alors un hypergraphe  $H_v$ , codant la triangularisation du  $M_i$  qui associé à  $v$ , i.e.  $M_{lab(v)}$ . Les sources de  $H_v$  sont les sommets de la triangularisation de  $B_{i0}$ , l'"entrée" de  $M_i$ . Les arcs d'origine  $v$  codent les "sorties" de  $M_i$ ; pour chacun d'entre eux, on ajoute un hyperarc non-terminal sur la composante de bord correspondante : à un arc étiqueté par  $(j, 0)$  dont l'extrémité est étiqueté par  $i'$ , on associe un hyperarc non-terminal étiqueté par  $i'$  dont les sommets sont ceux de la copie de  $B_{ij}$  dans  $H_v$ . On obtient finalement une grammaire de remplacement d'hyperarc qui décrit la construction de la triangularisation de  $M$ .

( $\Rightarrow$ ):

Soit  $M$  une 3-variété HR-équationnelle sans bord définie par une grammaire  $\Theta = (b_0, \{H_b\}_{b \in B})$ . On peut supposer que  $\Theta$  satisfait les conditions du lemme 1.2.1.

• On peut transformer  $\Theta$  de telle sorte que chaque  $\tilde{H}_b$  soit la triangularisation d'une 3-variété à bord. Rappelons que  $\tilde{H}_b$  est l'hypergraphe obtenu à partir de  $H_b$  en supprimant tous les hyperarcs non-terminaux.

On commence par remplacer la triangularisation de  $M$  par sa double subdivision barycentrique, cela facilite les découpages. On note encore  $\Theta$  la grammaire associée. Il faut transformer  $\Theta$  de telle sorte que chacun des sommets de chaque  $\tilde{H}_b$  possède un voisinage homéomorphe à une boule  $B^3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid \|(x_1, x_2, x_3)\|_2 \leq 1\}$  ou bien une demi-boule  $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid \|(x_1, x_2, x_3)\|_2 \leq 1 \text{ et } x_3 \geq 0\}$ .

Considérons donc un  $H_b$  ainsi qu'un de ses sommets  $x$ .

Si  $x$  n'appartient pas à un hyperarc non-terminal et n'est pas une source, alors tous les hyperarcs terminaux contenant  $x$  qui lui forment un voisinage dans  $M$  sont déjà dans  $H_b$ . Comme  $M$  est une 3-variété sans bord, ce voisinage est homéomorphe à une boule.

Si  $x$  est une source, alors il doit être recollé sur un sommet  $x'$  appartenant à un hyperarc non-terminal dans un autre  $H_b$ . Si  $x$  ne possède pas de voisinage homéomorphe à une boule ou bien une demi-boule, alors il en est de même pour  $x'$ . C'est le cas suivant.

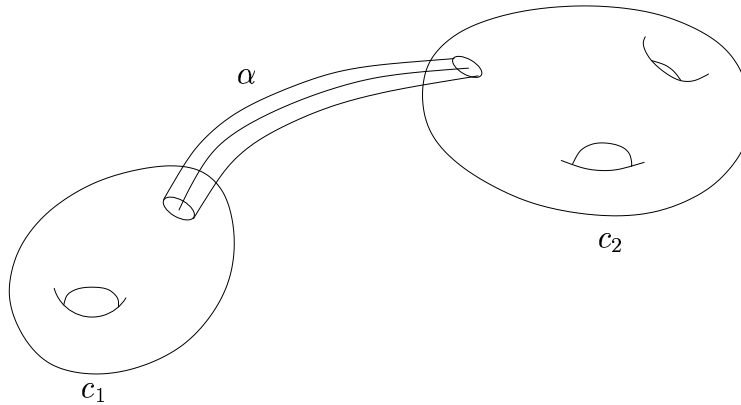
Supposons donc que  $x$  appartient à un hyperarc non-terminal de  $H_b$  et qu'il ne possède pas de voisinage homéomorphe à une boule ou bien une demi-boule. Par le lemme 1.2.1, il n'y a qu'un seul  $H_{b'}$  qui doit être recollé sur  $x$ . Soit  $s'$  la source de  $H_{b'}$  qui doit être identifiée à  $x$ . Considérons les tétraèdres, i.e. les hyperarc terminaux d'arité 4, de  $H_{b'}$  contenant  $s'$ . Nous allons les retirer de  $H_{b'}$  et les recoller autour de  $x$  dans  $H_b$ , ainsi que dans tout autre  $H_{b'}$  contenant un hyperarc non-terminal étiqueté par  $b'$ . Ensuite, on supprimera  $s'$ . Après cette opération,  $x$  aura un voisinage homéomorphe à une boule dans  $\tilde{H}_b$ . Soit  $T'$  un de ces tétraèdres; rappelons que nous considérons la double subdivision barycentrique de la triangularisation originale de  $M$ . Les sommets créés durant le processus de subdivision ont

tous des bons voisinages,  $s'$  n'en fait donc pas partie. C'est par contre le cas des trois autres sommets  $a'$ ,  $b'$  et  $c'$  de  $T'$ . Après la suppression de  $T'$ , pour ajuster le recollement de  $H_{b'}$ , ils deviennent des sources de  $H_b$ . Notons que deux d'entre eux pouvait déjà en être. On vérifie qu'ils ont des bons voisinages dans  $\tilde{H}_b \setminus T'$ , i.e. homéomorphes à une demi-boule. Le détail de cette opération étant plus complexe que difficile, il est omis ici.

Notons que l'aspect effectif de cette démonstration repose en partie sur la reconnaissance algorithmique de la boule  $B^3$ , qui, en toute généralité, est un problème difficile [FM97, Mat]; néanmoins, dans notre cas, nous n'avons à considérer que des voisinages de sommets, i.e. de forme  $St(v)$  et donc, il suffit d'en regarder les liens, i.e. les  $Lk(v)$ . Or décider de la forme de l'étoile d'un sommet en dimension 3 se réduit à un problème de classification de surfaces compactes.

• On peut transformer  $\Theta$  de telle sorte que les sources d'un  $H_b$  sont les sommets d'au plus une composante du bord de  $\tilde{H}_b$ .

Considérons le sous-hypergraphe  $F_b$  de  $H_b$  formé par les sources de  $H_b$  et les hyperarcs d'arité 3 les connectant entre elles, i.e. les triangles dont tous les sommets sont des sources. Notons d'abord que le point précédent implique que  $|F_b|$  est une union de surfaces compactes sans bord deux à deux disjointes. Notre but ici consiste à transformer  $\Theta$  de telle sorte que chaque  $F_b$  ne comporte qu'une seule surface. Supposons donc que  $F_b$  contient au moins deux surfaces disjointes  $c_1$  et  $c_2$ . Grâce au lemme 1.2.1, on peut supposer que chaque  $\tilde{H}_b$  est connexe; soit  $\alpha$  un chemin de  $\tilde{H}_b$  connectant  $c_1$  et  $c_2$  (cf. figure). Soit  $K$  un voisinage régulier de  $c_1 \cup \alpha \cup c_2$



dans  $\tilde{H}_b$ .  $K$  est une 3-variété à bord avec trois composantes de bord;  $c_1$  et  $c_2$  en sont deux, la troisième, qui est plongée dans  $H_b$ , est homéomorphe à leur somme connexe, notons-la  $c$ . L'idée consiste à retirer  $K$  de  $H_b$ , remplacer les sommets de  $c_1$  et  $c_2$  par les sommets de  $c$  dans la liste des sources de  $H_b$ , et enfin, recoller  $K$  sur  $c_1$  et  $c_2$  à la place de chaque hyperarc étiqueté par  $b$  dans  $\Theta$ . A chaque recollement de  $K$ , on adjoint un nouvel hyperarc étiqueté par  $b$  qui code le recollement du nouvel  $H_b$  sur  $c$ . Nous ne développerons pas le détail de ces opérations ici. Finalement, nous avons fait décroître le nombre de composantes de  $F_b$ , on conclut par récurrence.

On construit maintenant un multi-graphe orienté pointé  $\Gamma$  codant l'arbre régulier définissant  $M$  comme 3-variété arborescente régulière. Pour chaque  $b \in B$ , on ordonne linéairement les hyperarcs non-terminaux de  $H_b$ . L'ensemble des sommets de  $\Gamma$  est  $B$ , l'ensemble des indices

des  $H_b$ . La racine de  $\Gamma$  est  $b_0$ . L'ensemble des arcs de  $\Gamma$  est en bijection avec l'union des ensembles d'hyperarcs non-terminaux des  $H_b$ , il est défini comme suit : pour chaque  $b \in B$  et chaque hyperarc non-terminal  $e$  de  $H_b$ , disons que  $e$  est le  $j$ -ième hyperarc non terminal de  $H_b$ , on définit un arc dans  $\Gamma$ , étiqueté par le couple  $(j, 0)$ , d'origine  $b$  et d'extrémité  $b'$ , où  $b'$  est l'étiquette de  $e$ . A chaque sommet  $v$  de  $\Gamma$  est associé la 3-variété à bord dont  $\tilde{H}_b$  est une triangularisation, où  $b$  est l'étiquette de  $v$ . On vérifie que  $\Gamma$  définit un arbre régulier qui définit à son tour  $M$  comme 3-variété arborescente régulière.

□

En reprenant les méthodes développées dans le chapitre 2, on montre que l'ensemble des bouts d'une 3-variété arborescente  $M$  est homéomorphe à celui de  $\tau$  (on conserve les notations définies page 71). On obtient alors le résultat suivant :

**Proposition 3.1.3**

*L'espace des bouts d'une variété de dimension 3 arborescente régulière est un espace de type fini au sens de la définition 7.*

La réciproque semble fautive, comme le laisse présager l'exemple qui suit.

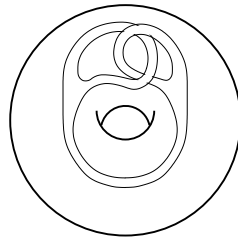


FIG. 3.1:  $N_1$  est une 3-variété à bord; son bord comporte 2 composantes, l'une de genre 1, l'autre de genre 2. Elle est obtenue en découpant une surface de genre 2 à l'intérieur d'un tore plein.

On considère la suite  $(N_k)_{k \geq 1}$  de 3-variétés à bord dont les premiers éléments sont représentés dans les figures 3.1, 3.2 et 3.3;  $N_k$  est obtenue à partir d'un corps à poignées de genre  $2^{k-1}$  (en anglais: "handlebody", cf. [Hem76, Jac77, Joh95], il s'agit d'une surface orientable de genre  $k$  "remplie" de matière) en creusant dans son intérieur une surface de genre  $2^k$ ; la surface de genre  $2^k$ , notée  $S'_k$ , est nouée comme l'indiquent les figures; on note  $S_k$  la composante de bord de genre  $2^{k-1}$  de  $N_k$ .

On fabrique alors une variété non compacte  $N$  en considérant l'union de tous les  $N_k$ , et en recollant  $S'_k$  sur  $S_{k+1}$  pour tout  $k$ . On montre aisément que  $N$  n'a qu'un seul bout; ainsi, son espace de bouts, réduit à un seul point est de type fini. Cependant, nous conjecturons que  $N$  n'est pas arborescente.

Nous avons vu dans le chapitre 2 que les surfaces pointées sont HR-équationnelles; en dimension 3, nous pensons que ce fait se généralise de la façon suivante :

**Conjecture 1** *Les 3-variétés possédant un cœur compact au sens de [Sco73] sont HR-équationnelles, de même que celles qui possèdent une structure hyperbolique de volume fini (voir plus loin).*

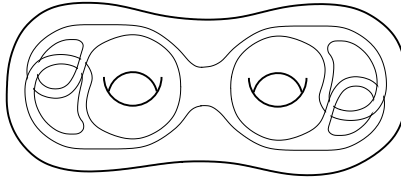


FIG. 3.2:  $N_2$  est obtenue à partir d'un corps à poignées de genre 2 en creusant à l'intérieur une surface de genre 4. Elle possède donc deux composantes de bord, l'une de genre 2, la surface extérieure, et l'autre de genre 4, la surface intérieure.

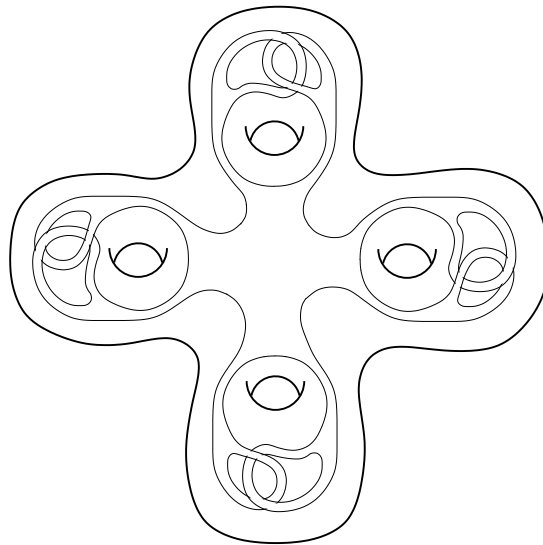


FIG. 3.3:  $N_3$  est obtenue à partir d'un corps à poignées de genre 4 en creusant à l'intérieur une surface de genre 8. Elle possède donc deux composantes de bord, l'une de genre 4 et l'autre de genre 8.

## 3.2 Rigidité des 3-variétés arborescentes

### 3.2.1 Groupe fondamental, revêtements

Pour une introduction à la théorie du groupe fondamental ainsi qu'à la théorie des revêtements, cf. [Mas67, Rot88]; pour un traitement approfondi, cf. [Spa66]. Pour ce qui concerne la théorie combinatoire des groupes, le lecteur est renvoyé à [MKS66, LS77].

Soit  $K$  un polyèdre connexe et  $x_0$  un point de  $K$ . Un *lacet* de point de base  $x_0$  est une application continue  $\alpha : [0, 1] \rightarrow K$  telle que  $\alpha(0) = \alpha(1) = x_0$ . On définit le *produit*  $\alpha.\alpha'$  de deux lacets  $\alpha$  et  $\alpha'$  par  $\alpha.\alpha'(t) = \alpha(2t)$  pour  $t \in [0, \frac{1}{2}]$  et  $\alpha.\alpha'(t) = \alpha'(2t - 1)$  pour  $t \in [\frac{1}{2}, 1]$ . Notons que cette opération n'est pas même associative. On considère sur l'ensemble des lacets la relation d'équivalence définie comme suit. Deux lacets  $\alpha$  et  $\alpha'$  sont dit équivalents s'ils sont homotopes, i.e. s'il existe une application continue  $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow K$  telle que pour tout  $s \in [0, 1]$ ,  $H(s, 0) = H(s, 1) = x_0$ ;  $H(0, \cdot) \equiv \alpha$  et  $H(1, \cdot) \equiv \alpha'$ . On interprète souvent l'équivalence de deux lacets comme la possibilité de déformer l'un pour obtenir l'autre et *vice versa*. On montre alors que si  $\alpha_1 \sim \alpha_2$  et  $\alpha'_1 \sim \alpha'_2$  alors  $\alpha_1.\alpha'_1 \sim \alpha_2.\alpha'_2$ ; ainsi, la loi de composition sur les lacets est aussi définie sur les classes d'équivalence de lacets. Sur ce dernier ensemble, elle devient associative; en fait, l'ensemble des classes d'équivalence de lacet muni de cette loi forme un groupe appelé le *groupe fondamental* de  $K$  de point de base  $x_0$ , on le note  $\pi_1(K, x_0)$ . On montre que la classe d'isomorphisme de  $\pi_1(K, x_0)$  ne dépend pas du choix de  $x_0$ : si  $x_1$  est un autre point de  $K$ , alors  $\pi_1(K, x_0)$  et  $\pi_1(K, x_1)$  sont isomorphes.

Le groupe fondamental d'un polyèdre est un *invariant* de sa structure topologique: on montre que si deux polyèdres sont homéomorphes alors leurs groupes fondamentaux sont isomorphes. Cette correspondance entre les structures de groupe et d'espace topologique est en fait plus profonde: une application continue  $\varphi : K \rightarrow K'$  induit canoniquement un homomorphisme  $\varphi_* : \pi_1(K, x_0) \rightarrow \pi_1(K', \varphi(x_0))$ . Formellement, cela définit un foncteur de la catégorie des espaces topologiques pointés dans celle des groupes (cf. [Spa66]).

Le concept de groupe fondamental est usuellement défini dans le cadre des espaces de Hausdorff connexes. On ne possède alors en général aucun moyen constructif de le définir. Dans le cas des polyèdres, la situation est plus favorable; on peut construire une présentation de  $\pi_1(K)$  de façon effective à partir d'une triangularisation de  $K$ . La méthode est la suivante: on commence par considérer le 1-squelette  $K^1$  d'une triangularisation de  $K$ , i.e. le sous-complexe simplicial formé des simplexes de dimension inférieure ou égale à 1. Il définit lui-même un polyèdre, en fait un graphe, dont le groupe fondamental s'applique de façon surjective sur celui de  $K$ ; cela provient du fait que tout lacet de  $K$  est homotope à un lacet simplicial (cf. e.g. [Mas67]). Par ailleurs le groupe fondamental de  $K^1$ , et d'un graphe en général, est facile à appréhender, c'est un groupe libre. On calcule un ensemble de générateurs à partir d'un arbre couvrant de  $K^1$  dont la racine est  $x_0$ , son point de base; chaque arête n'en faisant pas partie définit un élément de la partie génératrice de  $\pi(K^1, x_0)$  associée à l'arbre couvrant en question; cet élément est la classe d'équivalence du lacet défini comme suit: à partir du point de base  $x_0$ , on joint l'une des extrémités de l'arête en question en empruntant l'unique plus court chemin de l'arbre couvrant, on parcourt l'arête en question, puis on retourne au point de base  $x_0$  en suivant l'unique plus court chemin dans l'arbre couvrant; notons que ce procédé permet en fait d'associer à toute arête de  $K^1$  un élément



de  $\pi_1(K^1, x_0)$ , celles de l'arbre couvrant de  $K^1$  étant toutes associées à l'élément neutre. On obtient finalement un ensemble de générateur de  $\pi_1(K^1, x_0)$  qui définit de façon canonique un ensemble de générateurs de  $\pi_1(K, x_0)$ . Pour définir une présentation de  $\pi_1(K, x_0)$ , il nous reste à déterminer les relateurs. Ceux-ci sont définis par les simplexes de dimension 2, i.e. les triangles; le bord de chacun d'eux est formé de 3 arêtes, en le parcourant dans un sens (ou dans l'autre, peu importe), il définit un mot sur l'ensemble de générateurs construit précédemment; l'ensemble des mots construits de cette façon est l'ensemble des relateurs de notre présentation. Pour la validité de cette construction, le lecteur est renvoyé à [Mas67].

Soit  $K$  un polyèdre connexe; un *revêtement* de  $K$  consiste en une paire  $(\tilde{K}, p)$  où  $\tilde{K}$  est un polyèdre connexe et  $p : \tilde{K} \rightarrow K$  est une application continue surjective telle que tout point  $x$  de  $K$  possède un voisinage  $U$  tel que chaque composante connexe  $V$  de  $p^{-1}(U)$  est homéomorphe à  $U$  et  $p|_V : V \rightarrow U$  est un homéomorphisme; un tel voisinage est appelé un *voisinage élémentaire* de  $x$  et  $p$  est appelée la *projection* relative à  $(\tilde{K}, p)$ .  $(\tilde{K}, p)$  est appelé le revêtement universel de  $K$  si le groupe fondamental de  $\tilde{K}$  est trivial.

On énumère ici quelques propriétés fondamentales des revêtements; le lecteur est renvoyé pour les preuves à [Mas67, Rot88, Spa66]. Soit  $x_0 \in K$  et  $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$ ,  $p^{-1}(x_0)$  est appelée la *fibres* de  $x_0$ , on montre que  $p_* : \pi_1(\tilde{K}, \tilde{x}_0) \rightarrow \pi_1(K, x_0)$  est un homomorphisme injectif. Pour tout autre élément  $\tilde{x}'_0$  de la fibres de  $x_0$ , on montre que  $p_*(\pi_1(\tilde{K}, \tilde{x}'_0))$  est un sous-groupe de  $\pi_1(K, x_0)$  conjugué à  $p_*(\pi_1(\tilde{K}, \tilde{x}_0))$ ; en particulier, il lui est isomorphe; si ce dernier est un sous-groupe normal de  $\pi_1(K, x_0)$ , on dit que  $(\tilde{K}, p)$  est un revêtement *régulier* de  $K$ .

Soit  $f : Y \rightarrow K$  et  $y_0 \in f^{-1}(x_0)$ ; alors il existe un *relèvement*  $\tilde{f} : Y \rightarrow \tilde{K}$ , i.e. une application telle que  $f = p\tilde{f}$  avec  $\tilde{f}(y_0) = \tilde{x}_0$ , si et seulement si  $f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subset p_*(\pi_1(\tilde{K}, \tilde{x}_0))$ .

Soient  $(\tilde{K}_1, p_1)$  et  $(\tilde{K}_2, p_2)$  deux revêtements de  $K$ ; on appelle *homomorphisme de revêtement* entre  $(\tilde{K}_1, p_1)$  et  $(\tilde{K}_2, p_2)$  toute application continue  $\varphi : \tilde{K}_1 \rightarrow \tilde{K}_2$  telle que  $p_1 = p_2\varphi$ . Soient  $\tilde{x}_1 \in p_1^{-1}(x_0)$  et  $\tilde{x}_2 \in p_2^{-1}(x_0)$ ; il existe alors un homomorphisme  $\varphi : \tilde{K}_1 \rightarrow \tilde{K}_2$  qui échange  $\tilde{x}_1$  et  $\tilde{x}_2$  si et seulement si  $p_{1*}(\pi_1(\tilde{K}_1, \tilde{x}_1)) \subseteq p_{2*}(\pi_1(\tilde{K}_2, \tilde{x}_2))$ ; et cet homomorphisme est un isomorphisme si  $p_{1*}(\pi_1(\tilde{K}_1, \tilde{x}_1)) = p_{2*}(\pi_1(\tilde{K}_2, \tilde{x}_2))$ .

## 3.2.2 Variétés hyperboliques de dimension 3 arborescentes

### Variétés hyperboliques

L'introduction à la géométrie hyperbolique qui est donnée ici est somme toute un peu minimaliste; nous avons jugé qu'un développement pédagogique de ce sujet serait, de par la taille qu'il nécessiterait, hors de propos ici. Ainsi, nous nous sommes limités ici aux définitions de base. Les concepts et les résultats que nous utilisons par la suite seront donnés dans le texte au fur et à mesure, avec bien entendu les références appropriées. Pour des approches plus complètes mais rapides du sujet, cf. [Mil82, Can84, Sco83], pour un traitement approfondi, cf. [Bea83, MT98, Mas87, Rat94, Thu97]; [Mil82, Can84, Bea83, Mas87, Rat94] concernent la géométrie hyperbolique en général, tandis que [Sco83, MT98, Thu97] sont plus particulièrement dédiés aux problèmes de la dimension 3 et aux travaux de Thurston sur le sujet.

Pour l'espace hyperbolique, nous considérons ici le modèle de la boule unité de Poincaré : on définit  $\mathbb{H}^3$  comme étant la boule unité  $B^3 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\|_2 < 1\}$  de  $\mathbb{R}^3$  munie de la métrique riemannienne hyperbolique  $ds^2$  donnée en fonction de la métrique euclidienne  $dx^2$  par

$$ds^2 = \frac{4dx^2}{(1-r^2)^2}$$

en un point de  $B^n$  situé à distance  $r \in [0, 1[$  de l'origine,  $ds^2$  vaut  $\frac{4}{(1-r^2)^2}$  fois  $dx^2$ . La longueur d'un chemin  $\gamma$  rectifiable de  $B^3$  est alors donnée par

$$\ell(\gamma) = \int_{\gamma} ds$$

et la distance séparant deux points de  $\mathbb{H}^3$  est définie comme étant le minimum des longueurs des chemins allant de l'un à l'autre.

On montre que les géodésiques de  $\mathbb{H}^3$  sont les arcs de cercles coupant  $S^n$  perpendiculairement. On note  $Isom \mathbb{H}^3$  le groupe des isométries de  $\mathbb{H}^3$ ; et  $Isom^+ \mathbb{H}^3$  le sous-groupe de  $Isom \mathbb{H}^3$  constitué des isométries qui préservent l'orientation.

### Définition 12

Une **variété hyperbolique orientable de dimension 3** est une 3-variété  $M$ , orientable, munie d'un **atlas**  $\{U_j, \varphi_j\}_{j \in J}$  où

- $U_j$  est un ouvert de  $M$  et  $M = \bigcup_j U_j$ ;
- $\varphi_j : U_j \rightarrow \mathbb{H}^3$  est un homéomorphisme de  $U_j$  sur  $\varphi_j(U_j)$  que l'on appelle usuellement une **carte**;
- Si  $U_{j_1} \cap U_{j_2} \neq \emptyset$ , alors  $U_{j_1} \cap U_{j_2}$  est connexe et  $f_{j_1}|_{U_{j_1} \cap U_{j_2}} \circ f_{j_2}^{-1}|_{f_{j_2}(U_{j_1} \cap U_{j_2})}$  est un homéomorphisme de  $f_{j_2}(U_{j_1} \cap U_{j_2})$  sur  $f_{j_1}(U_{j_1} \cap U_{j_2})$  qui préserve la métrique hyperbolique; on montre que c'est la restriction d'un élément de  $Isom^+ \mathbb{H}^3$ .

### Arborescence et hyperbolicité

Une sous-variété d'une variété hyperbolique est dite *totale-ment géodésique* si elle contient toutes les géodésiques qui lui sont tangentes. L'idée de largeur arborescente finie nous conduit à proposer la définition suivante.

### Définition 13

Nous dirons qu'une variété de dimension 3 hyperbolique complète  $M$  est **arborescente** si elle possède une triangularisation géodésique<sup>1</sup>, i.e. chacun de ses simplexes est totale-ment géodésiques, dont les arcs ont des longueurs uniformément bornées inférieurement et supérieurement, relativement à laquelle  $M$  est arborescente et possède une décomposition incompressible au sens de la définition 10.

1. notons qu'une triangularisation rectifiable pourrait être une hypothèse suffisante

Notons qu'une 3-variété hyperbolique compacte est arborescente; mais les 3-variétés hyperboliques complètes arborescentes sont en général de volume infini.

Le résultat suivant permet la construction d'exemples de 3-variétés hyperboliques arborescentes. Les principales idées de la preuve sont apparues lors d'une conversation avec D. Epstein et I. Rivin.

Une 3-variété compacte  $N$  est dite *atoroïdale* si tout sous-groupe de  $\pi_1(N)$  isomorphe à  $\mathbb{Z}^2$  est conjugué à un sous-groupe de  $\pi_1(\partial N)$  (cf. [Thu82]).

On définit les *variétés hyperboliques à bords totalement géodésiques* en remplaçant dans la définition 12 l'espace hyperbolique  $\mathbb{H}^3$  par le *demi-espace* hyperbolique  $\mathbb{H}_+^3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{B}^3 \mid x_3 \geq 0\}$  et  $Isom^+ \mathbb{H}^3$  par le sous-groupe des isométries de  $Isom^+ \mathbb{H}^3$  qui conservent  $\mathbb{H}_+^3$ .

### Lemme 3.2.1

*Soit  $N$  une variété compacte de dimension 3 première, acylindrique et atoroïdale dont les composantes du bord sont des surfaces incompressibles de genres supérieurs ou égaux à 2. Alors on peut munir  $N$  d'une structure hyperbolique complète à bord totalement géodésique.*

*Preuve.* Soit  $\bar{N}$  la 3-variété fermée obtenue en recollant deux copies disjointes de  $N$  par identification de leurs bords. Les bords identifiés de ces deux copies forment dans  $\bar{N}$  une surface incompressible;  $\bar{N}$  est une variété de Haken. Par ailleurs, elle est atoroïdale; par le théorème d'uniformisation de Thurston [Thu79], elle peut être munie d'une structure hyperbolique complète. On montre que cette structure se transmet à son revêtement universel, qui devient alors isométrique à  $\mathbb{H}^3$ ; ainsi on peut supposer que le revêtement universel de  $\bar{N}$  est  $\mathbb{H}^3$ ; soit  $p : \mathbb{H}^3 \rightarrow \bar{N}$  une projection; on montre que  $(\mathbb{H}^3, p)$  permet la définition d'une *représentation fidèle* de  $\pi_1(\bar{N})$  dans  $Isom^+ \mathbb{H}^3$ , i.e. un homomorphisme  $\rho : \pi_1(\bar{N}) \rightarrow \Gamma \subset Isom^+ \mathbb{H}^3$  injectif dont l'image est un sous-groupe discret, de telle sorte que l'on a  $\bar{N} \simeq \mathbb{H}^3 / \Gamma$ ; notons que ces propriétés valent pour toute variété hyperbolique complète (cf. [Thu97, MT98]).

Soit  $\tau : \bar{N} \rightarrow \bar{N}$  l'homéomorphisme échangeant les deux copies de  $N$ . Soit  $B \subset \bar{N}$  une composante connexe du bord des copies de  $N$  dans  $\bar{N}$ ; notons que  $B$  est fixé point par point par  $\tau$ .  $B$  se relève par  $p$  en un plan  $P$  plongé dans  $\mathbb{H}^3$ . Notons que, de même que  $B$ ,  $P$  n'est *a priori* pas totalement géodésique. Soit  $\tilde{\tau} : \mathbb{H}^3 \rightarrow \mathbb{H}^3$  le relèvement de  $\tau$  qui fixe  $P$  point par point. Par le théorème 11.6.1 de [Rat94],  $\tilde{\tau}$  est une pseudo-isométrie. Notons que  $\tilde{\tau}^2 = \text{Id}_{\mathbb{H}^3}$ .

Par le théorème de Mostow [Mos68],  $\tilde{\tau}$  induit une transformation de Möbius de la sphère à l'infini que l'on note  $\tilde{\tau}^\infty : S_\infty^2 \rightarrow S_\infty^2$ . Comme  $\tilde{\tau}$  est d'ordre deux, il en est de même de  $\tilde{\tau}^\infty$  qui est donc une symétrie. Comme  $\tilde{\tau}$  fixe  $P$  point par point,  $\tilde{\tau}^\infty$  fixe la courbe limite de  $P$  qui est donc un cercle de  $S_\infty^2$ . Ce cercle à l'infini définit un plan hyperbolique  $P'$  dans  $\mathbb{H}^3$ . Nous allons construire une déformation  $\Gamma$ -équivariante de  $P$  en  $P'$  qui induira, via  $p$ , une déformation de  $B$  en une surface totalement géodésique.

En premier lieu,  $p(P')$  est une surface compacte. Pour voir cela, on considère  $H \subset \Gamma$ , le stabilisateur de  $P$  et on montre d'abord que l'action de  $H$  sur  $P'$  est cocompacte. Pour ce faire, on montre qu'il existe  $K_1 > 0$  tel que pour tout  $x \in P$ ,  $d_{\mathbb{H}^3}(x, P') \leq K_1$  et pour tout  $x' \in P'$ ,  $d_{\mathbb{H}^3}(x', P) \leq K_1$ . Notons que  $H$  stabilise aussi  $P'$ . Soit  $x_0 \in P$ ; choisissons  $x'_0 \in P'$  tel que  $d_{\mathbb{H}^3}(x_0, x'_0)$  soit minimal. Comme  $B$  est compacte et  $B = P/H$ , il existe  $R > 0$  tel

que pour tout  $x \in P$ , il existe  $h \in H$  tel que  $d_{\mathbb{H}^3}(x_0, h(x)) \leq R$ . On a alors :

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{H}^3}(x, h^{-1}(x'_0)) &= d_{\mathbb{H}^3}(h(x), x'_0) \\ &\leq d_{\mathbb{H}^3}(h(x), x_0) + d_{\mathbb{H}^3}(x_0, x'_0) \\ &\leq R + d_{\mathbb{H}^3}(x_0, x'_0). \end{aligned}$$

On pose  $K_1 = R + d_{\mathbb{H}^3}(x_0, x'_0)$ . Soit  $x' \in P'$ . Soit  $\gamma$  une géodésique de  $\mathbb{H}^3$  coupant  $P'$  perpendiculairement en  $x'$ . Notons que  $\gamma \cap P \neq \emptyset$ ; soit  $x \in \gamma \cap P$ . On a alors

$$d_{\mathbb{H}^3}(x', P) \leq d_{\mathbb{H}^3}(x', x) = d_{\mathbb{H}^3}(P', x) \leq K_1.$$

On en déduit que l'action de  $H$  sur  $P'$  est cocompacte. On montre en effet qu'il existe  $K_2 > 0$  tel que pour tout  $x'_1, x'_2 \in P'$ , il existe  $h \in H$  tel que  $d_{\mathbb{H}^3}(h(x'_1), x'_2) < K_2$ . Soient  $x'_1, x'_2 \in P'$ ; Soient  $x_1, x_2 \in P$  tels que  $d_{\mathbb{H}^3}(x_i, x'_i)$  est minimal. Soit  $h \in H$  tel que  $d_{\mathbb{H}^3}(h(x_1), x_2) \leq R$ . On a alors :

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{H}^3}(h(x'_1), x'_2) &\leq d_{\mathbb{H}^3}(h(x'_1), h(x_1)) + d_{\mathbb{H}^3}(h(x_1), x_2) + d_{\mathbb{H}^3}(x_2, x'_2) \\ &\leq d_{\mathbb{H}^3}(x'_1, x_1) + R + K_1 \\ &\leq 2K_1 + R. \end{aligned}$$

On choisit  $K_2 = 2K_1 + R$ . Ainsi,  $p(P')$  est compacte.

Il reste à prouver que  $p(P')$  est bien une surface, i.e. chacun de ses points possède un voisinage homéomorphe à un disque; rappelons que  $p(P')$  hérite sa topologie de  $\overline{N}$ . Soit  $x' \in \overline{N} \cap p(P')$  et  $\tilde{x}' \in p^{-1}(x') \cap P'$ . Soit  $D$  un disque ouvert de  $P'$  contenant  $\tilde{x}'$ . Supposons que pour tout voisinage élémentaire  $V$  de  $x'$ , il existe un point  $z_V \in p(P') \cap V$  qui n'est pas dans  $p(D)$ . Considérons  $\tilde{V}$  la composante de  $p^{-1}(V)$  contenant  $\tilde{x}'$ ; et  $\tilde{z}_V \in p^{-1}(z_V) \cap \tilde{V}$ . Pour  $V$  suffisamment petit,  $\tilde{V} \cap P' = \tilde{V} \cap D$ ; et donc  $\tilde{z}_V \notin P'$ . Ainsi donc, il existe  $\gamma_V \in \Gamma \setminus H$  tel que  $\tilde{z}_V \in \gamma_V(P')$ . Considérons la famille  $\mathcal{P}$  de tous les plans hyperboliques obtenus comme images de  $P'$  par un  $\gamma_V$ .

Si  $\mathcal{P}$  est de cardinal fini, alors il existe  $\gamma \in \Gamma$  tel que  $\gamma(P') = \gamma_V(P')$  pour tout voisinage  $V$  d'une base de voisinages élémentaires de  $x'$ . Dans ce cas,  $\gamma(P')$  intercepte  $P'$ . Mais alors, en regardant l'action de  $\gamma$  sur la sphère à l'infini, on en déduit que  $\gamma(P)$  intercepte  $P$ ; ce qui est impossible car  $B$  est une surface.

Supposons donc que  $\mathcal{P}$  est infinie. L'argument précédent montre que les images de  $P'$  par deux isométries de  $\Gamma$  sont soit disjointes, soit confondues. Ainsi donc, il existe une infinité de plans hyperboliques deux à deux disjoints de la forme  $\gamma_V(P')$ . Comme l'action de  $H$  sur  $P$  est cocompacte, pour  $V$  suffisamment petit, il existe  $\gamma'_V \in \Gamma$  tel que  $\gamma'_V(\tilde{x}') \in \gamma_V(P')$  et  $d_{\mathbb{H}^3}(\gamma'_V(\tilde{x}'), \tilde{z}_V) \leq K_2$ . Ainsi, en choisissant  $V$  suffisamment petit,  $\gamma'_V(\tilde{x}')$  reste dans un voisinage borné de  $\tilde{x}'$ . Par compacité, on peut donc extraire une base dénombrable  $(V_k)_k$  de voisinages élémentaires tel que pour toute paire  $k_1, k_2$ ,  $\gamma_{V_{k_1}}(\tilde{x}')$  et  $\gamma_{V_{k_2}}(\tilde{x}')$  soient distincts et la suite  $(\gamma'_{V_k}(\tilde{x}'))_k$  converge; ce qui contredit le fait que l'action de  $\Gamma$  sur  $\mathbb{H}^3$  est discrète.

$p(P')$  est donc une surface totalement géodésique plongée dans  $\overline{N}$ .

Par ailleurs, quitte à déformer légèrement  $B$ , il existe une triangularisation géodésique de  $\overline{N}$  pour laquelle  $B$  et  $p(P')$  sont simpliciales. Cette triangularisation se relève en une triangularisation  $\Gamma$ -équivariante de  $\mathbb{H}^3$  dans laquelle  $P$  et  $P'$  sont simpliciaux. Cela permet de définir, tétraèdre par tétraèdre, une isotopie de  $\overline{N}$  déformant  $B$  en  $p(P')$ .

On déforme ainsi chaque composante du bord des deux copies de  $N$  qui forment  $\overline{N}$ . Finalement, en découpant le long des surfaces géodésiques obtenues de la sorte, on obtient deux morceaux homéomorphes à  $N$  ayant la structure hyperbolique requise.

□

Notons que l'hypothèse d'acylindricité est essentielle dans ce lemme. On obtient un contre-exemple en considérant une variété de la forme  $S \times I$  où  $S$  est une surface.  $S \times I$  n'est pas acylindrique. Par ailleurs elle ne peut pas être équipée d'une structure hyperbolique complète à bord totalement géodésique. Si c'était le cas, en considérant deux copies de cette variété que l'on recollerait sur leurs bords, on obtiendrait une variété compacte sans bord, hyperbolique complète dont le groupe fondamental comporterait un sous-groupe isomorphe à  $\mathbb{Z}^2$ . C'est impossible.

On peut maintenant construire une variété de dimension 3 hyperbolique arborescente de la façon suivante. On se donne une 3-variété à bord atoroidale  $N$  dont les bords sont des surfaces de genre supérieur à 2. Soit  $n$  le nombre de composantes connexes du bord de  $N$ ; on les suppose numérotées de 1 à  $n$ . Par le lemme 3.2.1, on peut équiper  $N$  d'une structure hyperbolique complète rendant ses bords totalement géodésiques. On considère maintenant l'arbre non-orienté infini  $t$ , régulier, de degré uniformément égal à  $n$ , dont les arêtes sont étiquetées par des entiers entre 1 et  $n$  tels que chaque nœud appartient à une arête étiquetée par  $i$  et une seule, pour tout  $i \in [1, n]$ . A chaque nœud de  $t$ , on associe une copie de  $N$ . On recolle alors toutes ces copies de  $N$  selon les arêtes de  $t$ ; une arête étiquetée par un entier  $i$  indique que l'on recolle les deux copies de  $N$  qu'elle relie en identifiant leurs  $i$ -ièmes composantes de bords. On vérifie aisément que l'on obtient une 3-variété hyperbolique complète arborescente. Notons que cette 3-variété est un revêtement régulier de la 3-variété fermée obtenue à partir de deux copies de  $N$  en identifiant leurs bords; parallèlement,  $t$  est un revêtement du graphe comprenant un seul sommet et  $n$  boucles étiquetées de 1 à  $n$ ; nous développerons cette idée dans la section 3.3.2.

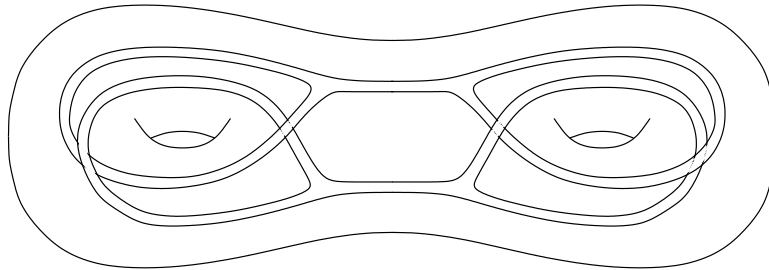


FIG. 3.4: Exemple de 3-variété à bord acylindrique et atoroidale dont les composantes connexes de bord, au nombre de 3, sont des surfaces de genre 2.

### 3.2.3 Rigidité

Le résultat suivant est fondamental pour ce qui nous intéresse : il réduit le problème de l'homéomorphisme à un problème d'isomorphisme de groupes.

#### Théorème 7

*Deux variétés de dimension 3 hyperboliques complètes acylindriquement arborescentes sont isométriques si et seulement si leurs groupes fondamentaux sont isomorphes.*

La démonstration de ce résultat se compose de plusieurs parties. Avant tout, il nous faut fixer quelques notations. Soient donc  $M$  et  $M'$  deux 3-variétés hyperboliques complètes, acylindriquement arborescentes. Soient  $x_0 \in M$ ,  $x'_0 \in M'$  et  $\Phi : \pi_1(M, x_0) \rightarrow \pi_1(M', x'_0)$  un isomorphisme.

On conserve pour  $M$  les notations introduites page 71. Pour chaque  $k \in [1, m]$ , on distingue un sommet  $x_k$  de la triangulation de  $T_k$ ; pour chaque paire  $i, j$ , soit  $k \in [1, m]$  tel que  $B_{ij}$  est envoyé sur  $T_k$  par  $g_{ij}$ ; soit alors  $x_{ij} = g_{ij}^{-1}(x_k)$ . Soit  $t_i$  un arbre simplicial dans  $M_i$  de racine  $x_{i0}$  connectant  $x_{i0}$  aux autres  $x_{ij}$ ; quitte à subdiviser la triangulation de  $M_i$ , on construit  $t_i$  en forme d'étoile centrée en  $x_{i0}$  de telle sorte que les seuls points de contact de  $t$  avec le bord de  $M_i$  soient les  $x_{ij}$ . Fixons maintenant pour tout  $k$  un arbre couvrant du 1-squelette de  $T_k$ ; il définit, via  $g_{ij}^{-1}$ , un arbre couvrant de  $B_{ij}$ ; Soit  $s_i$  un arbre couvrant de  $M_i$  contenant cet arbre pour tout  $j$ , ainsi que  $t_i$ . En utilisant  $\varphi_C^{-1}$  pour chaque composante  $C$  de  $M \setminus \bigcup_u S_u$ , la famille  $\{s_i\}_i$  définit un arbre couvrant  $s$  du 1-squelette de  $M$ ; pour chaque  $C$ , notons  $x_C = \varphi_C^{-1}(x_{i(c)0})$ ; quitte à ajouter de nouveaux représentants pour les composantes de  $M \setminus \bigcup_u S_u$ , on peut supposer que quelque soit  $C_1 \neq C_2$ , on a  $x_{C_1} \neq x_{C_2}$ . Quitte à subdiviser la triangulation de  $M$  ainsi qu'à déformer une surface  $S_u$  de sa décomposition arborescente, on peut supposer que  $x_0$  est égal à  $x_{C_0}$  pour une composante  $C_0$  de  $M \setminus \bigcup_u S_u$  que l'on appellera *composante racine* de  $M$ . L'arbre  $t$  formé de l'union des  $\{\varphi_C^{-1}(t_i)\}_C$  est appelée la *colonne vertébrale* de  $M$ . Notons que la construction de  $t$  n'est pas canonique pour  $M$  et loin s'en faut; néanmoins, deux colonnes vertébrales de  $M$  ont des espaces de bouts homéomorphes.

Comme  $t$  est un arbre contenant  $x_{C_0}$ ,  $\pi_1(M, t)$  est canoniquement isomorphe à  $\pi_1(M, x_{C_0})$  (cf. [Spa66]). D'autre part, pour chaque composante  $C$ ,  $\varphi_C^{-1}$  induit un homomorphisme de  $\pi_1(M_{i(c)}, x_{i(c)0})$  dans  $\pi_1(M, t)$ ; notons pour tout  $i$ ,  $\Gamma_i = \pi_1(M_i, x_{i0})$ . On considère alors l'homomorphisme résultant  $j_C : \Gamma_{i(c)} \rightarrow \pi_1(M, x_{C_0})$ . Comme les surfaces séparantes  $S_u$  sont supposées incompressibles, on obtient le résultat suivant :

**Lemme 3.2.2**  *$j_C$  est injectif.*

#### Construction d'une équivalence d'homotopie $k$ -lipschitzienne entre $M$ et $M'$ .

On conserve les notations précédentes à propos de  $M$ . Soit  $A_i$  le sous-ensemble fini de générateurs de  $\Gamma_i$  défini, à partir de  $s_i$  comme arbre couvrant du 1-squelette de  $M_i$ , par les arêtes de  $M_i$  qui n'appartiennent pas à  $s_i$ .

Considérons la fonction  $m_i$  qui associe à toute représentation fidèle  $\rho$  de  $\Gamma_i$  dans  $Isom^+ \mathbb{H}^3$ , le point  $m_i(\rho) \in \mathbb{H}^3$  qui minimise la fonction suivante :

$$d_\rho(x) = \sum_{\alpha \in A_i} d_{\mathbb{H}^3}(x, \rho(\alpha)(x))$$

**Lemme 3.2.3**

$m_i$  est bien définie et est continue relativement à la topologie dite algébrique de l'espace des représentations fidèles de  $\Gamma_i$ .

Pour la définition de la topologie algébrique sur l'espace des représentations fidèles d'un groupe, le lecteur est renvoyé à [Thu86, MT98].

*Preuve.* Remarquons en guise de préliminaire que les éléments d'une représentation fidèle de  $\Gamma_i$  dans  $Isom \mathbb{H}^3$  ne peuvent être que loxodromiques (cf. [Mas87]), et non paraboliques ou elliptiques; ceci est dû au fait que  $M_i$  est une 3-variété hyperbolique.

Pour l'existence d'un minimum, on remarque que  $d_\rho(x)$  tend vers l'infini quand  $x$  tend vers l'infini. En effet, un point de  $\partial\mathbb{H}^3$  au voisinage duquel  $d_\rho$  resterait bornée serait nécessairement un point fixe de tous les éléments de  $\rho(\Gamma_i)$ ; cela impliquerait que  $\rho(\Gamma_i)$  soit un groupe de similarités euclidiennes. D'autre part, remarquons que l'on peut supposer que  $\partial M_i \neq \emptyset$ , car sinon,  $M$  serait en fait égale à  $M_i$ , une variété hyperbolique compacte; dans ce cas, le théorème 7 se ramène au théorème de Mostow. Maintenant, comme les composante du bord de  $M_i$  sont des surfaces de genres supérieur à deux, leurs groupes fondamentaux ne peuvent pas être représentés par des similarités euclidiennes, c'est une contradiction. L'unicité provient du fait que  $d_\rho$  est strictement convexe.  $m_i(\rho)$  est donc bien définie.

On démontre maintenant la continuité. Fixons une représentation fidèle  $\rho_0$  de  $\Gamma_i$ . Dans l'espace des représentations fidèles de  $\Gamma_i$ , muni de la topologie algébrique, il existe un voisinage  $V$  de  $\rho_0$  dans lequel  $m_i(V)$  est totalement inclus dans un compact de  $\mathbb{H}^3$ . Pour voir cela, remarquons que pour un élément  $\alpha \in A_i$  fixé, l'axe de  $\rho(\alpha)$  est fonction continue de  $\rho$  relativement à la topologie de Hausdorff sur les parties de  $\mathbb{H}^3 \cup S_\infty^2$ ; de même, la longueur de translation de  $\rho(\alpha)$  le long de son axe est aussi une fonction continue de  $\rho$ . Ainsi, en choisissant  $V$  suffisamment petit, pour tout couple  $\alpha \neq \alpha'$  d'éléments distincts de  $A_i$ , les points fixes de  $\rho(\alpha)$  et  $\rho(\alpha')$  restent éloignés les uns des autres dans  $S_\infty^2$ , i.e. leurs distances respectives sont uniformément bornées inférieurement; et les distances de translations le long des axes restent assez grandes. Ainsi, pour tout  $D > 0$ , un point  $x$  de  $\mathbb{H}^3$ , suffisamment éloigné de  $m_i(\rho_0)$ , se trouve à une distance supérieure à  $D$  de l'axe de  $\rho(\alpha)$  pour tout  $\rho \in V$  et au moins l'un des  $\alpha$ ; tenant compte du fait que les longueurs de translation des  $\rho(\alpha)$  sont uniformément bornées inférieurement pour  $\rho \in V$  et  $\alpha \in A_i$ , en choisissant  $D$  suffisamment grand, on peut ainsi rendre  $d_\rho(x) = \sum_{\alpha \in A_i} d_{\mathbb{H}^3}(x, \rho(\alpha)(x))$  aussi grand que l'on veut. Ainsi,

$m_i(\rho)$  pour  $\rho \in V$  reste à une distance bornée de  $m_i(\rho_0)$ ; soit  $W$  l'adhérence de  $V$ ; c'est un fermé que l'on peut en fait choisir compact dans l'espace des représentations fidèles de  $\Gamma_i$ . Observons maintenant que la variation relativement à  $\rho$  de  $d_\rho|_W$  est continue pour la topologie de la convergence uniforme; il s'en suit aisément que la variation du point réalisant le minimum de  $d_\rho$  est aussi continue relativement à  $\rho$ , i.e.  $m_i$  est continue; cela termine la preuve.

□

$M$  et  $M'$  sont munies de structures hyperboliques complètes; cela nous autorise à considérer leurs revêtements universels  $p : \mathbb{H}^3 \rightarrow M$  et  $p' : \mathbb{H}^3 \rightarrow M'$ . Choisissons un élément  $\tilde{x}_{c_0} \in p^{-1}(x_{c_0})$  (respectivement  $\tilde{x}'_{c_0}$ ) dans la fibre de  $x_{c_0}$  (respectivement  $x'_{c_0}$ ); avec le revêtement évoqué plus haut, le choix de  $\tilde{x}_{c_0}$  fixe une représentation fidèle  $\Gamma \subset Isom \mathbb{H}^3$  de  $\pi_1(M, x_{c_0})$  dans  $Isom \mathbb{H}^3$ , ainsi qu'un isomorphisme appelé *application d'holonomie*  $H :$

$\pi_1(M, x_{C_0}) \rightarrow \Gamma$  (cf. [Thu97]). On construit de même une représentation fidèle  $\Gamma' \subset \text{Isom } \mathbb{H}^3$  de  $\pi_1(M')$ . On montre que  $M \simeq \mathbb{H}^3/\Gamma$  et  $M' \simeq \mathbb{H}^3/\Gamma'$  (cf. [Thu97, MT98]). L'isomorphisme  $\Phi : \pi_1(M, x_0) \rightarrow \pi_1(M', x'_0)$  induit alors un isomorphisme encore noté  $\Phi$  entre  $\Gamma$  et  $\Gamma'$ .

Pour toute composante connexe  $C$  de  $M \setminus \bigcup_u S_u$ , on note  $\rho_C = \Phi \circ H \circ j_C$ ; c'est une représentation fidèle de  $\Gamma_{\iota(C)}$  dans  $\text{Isom } \mathbb{H}^3$ ; pour toute composante  $C$  de  $M \setminus \bigcup_u S_u$  distincte de  $C_0$ , on pose  $\tilde{x}'_C = m_{\iota(C)}(\rho_C)$  ( $\tilde{x}'_{C_0}$  a déjà été défini plus haut).

### Lemme 3.2.4

*Il existe  $k_1 > 0$  tel que pour toute paire de composantes voisines  $C_1$  et  $C_2$  de  $M \setminus \bigcup_u S_u$ , i.e.  $\overline{C_1} \cap \overline{C_2} \neq \emptyset$ , on a*

$$d_{\mathbb{H}^3}(\tilde{x}'_{C_1}, \tilde{x}'_{C_2}) < k_1.$$

*Preuve.* Considérons donc deux telles composantes  $C_1$  et  $C_2$  avec  $\overline{C_1} \cap \overline{C_2} \neq \emptyset$ . On suppose  $C_1$  et  $C_2$  distinctes de  $C_0$ ; dans ce cas, la constante recherchée existe trivialement étant donné que le nombre de composantes voisines de  $C_0$  est fini. Soit donc  $K = \pi_1(\overline{C_1} \cup \overline{C_2}, x_{C_1})$ ;  $\overline{C_1} \cup \overline{C_2} \subset M$  et  $x_{C_1} \in t$ ; par conséquent,  $K$  se plonge dans  $\pi_1(M, x_{C_0})$  par un homomorphisme injectif canonique  $j_K : K \rightarrow \pi_1(M, x_{C_0})$ . Par ailleurs, pour  $i = 1, 2$ ,  $\varphi_{C_i}^{-1}$  induit une injection de  $j'_{C_i} : \Gamma_{\iota(C_i)} \rightarrow K$ ; notons que l'on a  $j_{C_i} = j_K \circ j'_{C_i}$ .

D'autre part, la fonction à valeurs réelles positives définie sur l'espace des représentations fidèles de  $K$  par

$$\rho \mapsto d_{\mathbb{H}^3}(m_{\iota(C_1)}(\rho \circ j'_{C_1}), m_{\iota(C_2)}(\rho \circ j'_{C_2}))$$

est continue par le lemme 3.2.3. On montre qu'elle est invariante par conjugaison; elle définit donc une application continue

$$\bar{d}_{K, j'_{C_1}, j'_{C_2}} : \text{AH}(K) \rightarrow \mathbb{R}_+$$

où l'on note  $\text{AH}(K)$  l'espace de Teichmüller de  $K$  muni de la topologie algébrique, i.e. le quotient de l'espace des représentations fidèles de  $K$  par la relation de conjugaison. Notons que  $\overline{C_1} \cup \overline{C_2}$  est une variété à bord acylindrique; d'après le théorème de Thurston (cf. [Thu86]),  $\text{AH}(K)$  est donc compact. Et par conséquent,  $\bar{d}_{K, j'_{C_1}, j'_{C_2}}$  est bornée comme fonction continue sur un compact.

A isomorphisme près, il n'y a qu'un nombre fini de triplets de la forme  $(K, j'_{C_1}, j'_{C_2})$ ; ainsi, il existe une borne  $k_1$  telle que quelque soit le choix de  $C_1$  et  $C_2$ ,  $\bar{d}_{K, j'_{C_1}, j'_{C_2}}$  est bornée par  $k_1$ .

Etant donnée une paire de composante  $C_1$  et  $C_2$ ,  $\Phi \circ H$  donne naissance à une représentation fidèle  $\rho_K = \Phi \circ H \circ j_K$  de  $K$ ; on a d'autre part

$$\bar{d}_{K, j'_{C_1}, j'_{C_2}}([\rho_K]) = d_{\mathbb{H}^3}(m_{\iota(C_1)}(\rho_K \circ j'_{C_1}), m_{\iota(C_2)}(\rho_K \circ j'_{C_2}));$$

or pour  $i = 1, 2$ ,  $m_{\iota(C_i)}(\rho_K \circ j'_{C_i}) = m_{\iota(C_i)}(\Phi \circ H \circ j_K \circ j'_{C_i}) = m_{\iota(C_i)}(\rho_{C_i}) = x'_{C_i}$ ; ainsi, on a

$$\bar{d}_{K, j'_{C_1}, j'_{C_2}}([\rho_K]) = d_{\mathbb{H}^3}(\tilde{x}'_{C_1}, \tilde{x}'_{C_2}).$$

Finalement  $d_{\mathbb{H}^3}(\tilde{x}'_{C_1}, \tilde{x}'_{C_2}) < k_1$ .



□

**Lemme 3.2.5**

Il existe  $k_2 > 0$  tel que pour toute composante  $C$  de  $M \setminus \bigcup_u S_u$  et pour tout  $\alpha \in A_{\iota(C)}$  :

$$d_{\mathbb{H}^3}(\tilde{x}'_C, \rho_C(\alpha)(\tilde{x}'_C)) < k_2.$$

*Preuve.* L'idée directrice est similaire à celle de la preuve du lemme 3.2.4. Pour tout  $i \in [1, n]$ , on considère la fonction

$$\rho \mapsto d_{\mathbb{H}^3}(m_i(\rho), \rho(\alpha)(m_i(\rho)))$$

de l'espace des représentations fidèles de  $\Gamma_i$  dans  $\mathbb{R}_+$ ; par le lemme 3.2.3, elle est continue; elle est aussi invariante par conjugaison. On applique alors le théorème de Thurston suivant la même démarche que précédemment.

□

On construit maintenant une équivalence d'homotopie  $k$ -lipschitzienne  $f : M \rightarrow M'$ . On commence par définir  $f$  sur le 1-squelette  $M^{(1)}$  de  $M$ .

**Image des nœuds de la colonne vertébrale de  $M$ .** Soit  $p' : \mathbb{H}^3 \rightarrow M'$  le revêtement associé à la structure hyperbolique de  $M'$ ; il s'agit en fait de la surjection canonique de  $\mathbb{H}^3 \rightarrow \mathbb{H}^3/\Gamma'$ . Pour toute composante  $C$  de  $M \setminus \bigcup_u S_u$ , on pose  $f(x_C) = p'(\tilde{x}'_C)$ .

**Image de la colonne vertébrale  $t$  de  $M$ .** Soit  $e$  un chemin simplicial simple de  $t$  connectant deux nœuds  $x_{C_1}$  et  $x_{C_2}$  avec  $\overline{C_1} \cap \overline{C_2} \neq \emptyset$ .  $e$  correspond à un chemin simplicial dans l'un des  $M_i$  qui joint deux composantes de son bord. On peut donc borner inférieurement, indépendamment de  $C_1$  et de  $C_2$ , le nombre d'arêtes qui le constitue. Par hypothèse sur la structure hyperbolique de  $M$ , la longueur des arêtes de la triangularisation de  $M$  est bornée inférieurement; ainsi, la longueur de  $e$  est aussi bornée inférieurement et ce, indépendamment de  $C_1$  et de  $C_2$ . Par ailleurs, le lemme 3.2.4 nous dit que la distance entre  $\tilde{x}'_{C_1}$  et  $\tilde{x}'_{C_2}$  est bornée. On choisit  $p'([\tilde{x}'_{C_1}, \tilde{x}'_{C_2}])$  pour l'image de  $e$ , où  $[\tilde{x}'_{C_1}, \tilde{x}'_{C_2}]$  désigne le segment géodésique de  $\mathbb{H}^3$  joignant  $\tilde{x}'_{C_1}$  et  $\tilde{x}'_{C_2}$ . Le contrôle que nous avons établi précédemment sur les longueurs de  $e$  et de  $[\tilde{x}'_{C_1}, \tilde{x}'_{C_2}]$  garantit que l'on peut choisir  $f|_e$  lipschitzienne avec une constante ne dépendant pas de  $e$ .

**Image de  $s$ .** Soit  $x$  un point de  $s$ . Comme  $t$  est un sous-arbre de  $s$ , il existe un chemin sans boucle unique connectant  $x$  à  $t$ . Soit  $y \in t$  l'autre extrémité de ce chemin; l'image de  $y$  a été définie dans le point précédent; on pose  $f(x) = f(y)$ : on rétracte  $s$  sur  $t$ . Trivialement,  $f$  reste lipschitzienne.

**Image de  $M^{(1)}$ .** Considérons maintenant une arête  $e$  de  $M^{(1)}$  n'appartenant pas à  $s$ . Soit  $z_1$  et  $z_2$  ses extrémités; soit  $C$  la composante de  $M \setminus \bigcup_u S_u$  telle  $e \in \overline{C}$ . Par définition,  $A_{\iota(C)}$  est l'ensemble des générateurs de  $\Gamma_{\iota(C)}$  définis par les arêtes de la triangularisation de  $M_{\iota(C)}$

n'appartenant pas à  $s_{\iota(C)}$ ;  $\varphi_C(e)$  est donc associée à l'un d'eux, notons-le  $\alpha$ . Notons  $\tilde{e}'$  le segment géodésique  $[\tilde{x}'_C, \rho_C(\alpha)(\tilde{x}'_C)]$ . L'image de  $e$  est définie comme étant la concaténation des segments géodésiques  $[f(z_1), f(x_C)]$ ,  $p'(\tilde{e}')$  et  $[f(x_C), f(z_2)]$ . Le lemme 3.2.5 garantit que  $f|_e$  peut être construite lipschitzienne.

**Image de  $M^{(2)}$ .** Considérons un 2-simplexe  $s$  de la triangularisation de  $M$ ; les hypothèses sur la structure hyperbolique de  $M$  implique que la longueur du bord  $\partial s$  de  $s$  est bornée tant supérieurement qu'inférieurement. Cela implique que son image  $f(\partial s)$  dans  $M'$  est une courbe fermée géodésique par morceaux de longueur bornée. Cette courbe est homotopiquement nulle, elle se relève donc dans  $\mathbb{H}^3$  par  $p'$  en une courbe fermée géodésique par morceaux  $\tilde{c}$  de même longueur. Soit  $\tilde{D}$  un disque immergé dans  $\mathbb{H}^3$  de frontière  $\tilde{c}$ ; on peut construire  $\tilde{D}$  en choisissant un point  $O$  de  $\mathbb{H}^3$  n'appartenant pas à  $\tilde{c}$  et en considérant les triangles géodésiques de  $\mathbb{H}^3$  dont  $O$  est un sommet et dont le côté opposé à  $O$  est une partie géodésique maximale de  $\tilde{c}$ . Notons que la longueur de  $\tilde{c}$  est bornée indépendamment de  $s$ ; on peut donc choisir  $\tilde{D}$  de taille bornée indépendamment de  $s$ . On définit  $f(s)$  comme étant l'image  $p'(\tilde{D})$  de  $\tilde{D}$  par  $p'$ . Comme la taille de  $s$  est bornée inférieurement, on peut construire  $f|_s$  de façon à ce qu'elle soit lipschitzienne.

L'extension de  $f$  à  $M^{(3)} = M$  suit les mêmes idées, nous ne la détaillerons pas ici.

On vérifie que  $f$  est une équivalence d'homotopie en contrôlant la validité du diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 \Gamma & \xrightarrow{\Phi} & \Gamma' \\
 \uparrow H & & \uparrow H' \\
 \pi_1(M, x_{C_0}) & & \pi_1(M', x_{C_0}) \\
 \uparrow (i_{M^{(1)}})_* & \nearrow (f|_{M^{(1)}})_* & \\
 \pi_1(M^{(1)}, x_{C_0}) & & 
 \end{array}$$

Pour ce faire, on remarque d'abord que  $\pi_1(M, x_{C_0})$  est engendré par la famille

$$\{j_C(A_{\iota(C)}) \mid C \text{ composante connexe de } M \setminus \bigcup_u S_u\}.$$

A cette famille est canoniquement associée une famille de générateurs de  $\pi_1(M^{(1)}, x_{C_0})$ . On pourra vérifier que les images par  $(f|_{M^{(1)}})_*$  de ces générateurs correspondent aux images par  $f$  des arêtes de  $M^{(1)}$  qui n'appartiennent pas à  $s$ . On s'aperçoit alors que le point numéro 4 de la construction de  $f$  est fait pour que le diagramme de la page 86 commute.

Ensuite, on sait que  $\text{Ker}(i|_{M^{(1)}})_*$  est le sous-groupe normal engendré par les éléments de  $\pi_1(M^{(1)}, x_{C_0})$  associé aux simplexes de dimension 2 de la triangularisation de  $M$  (cf. e.g. [Mas67]). La construction de  $f$  montre donc que  $f_*$  factorise le diagramme de la page 86 en le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 \Gamma & \xrightarrow{\Phi} & \Gamma' \\
 \uparrow H & & \uparrow H' \\
 \pi_1(M, x_{C_0}) & \xrightarrow{f_*} & \pi_1(M', x_{C_0}) \\
 \uparrow (i_{M^{(1)}})_* & \nearrow (f|_{M^{(1)}})_* & \\
 \pi_1(M^{(1)}, x_{C_0}) & & 
 \end{array}$$

$f_*$  est l'isomorphisme associé à  $\Phi$ .

Nous avons construit  $f$  de telle sorte que sa restriction sur chacun des simplexes de la triangularisation de  $M$  soit  $k$ -lipschitzienne. Il nous reste à vérifier que  $f$  est globalement  $k$ -lipschitzienne. Soient  $x, y \in M$ ; soit  $\gamma$  un segment géodésique de  $M$  d'extrémités  $x$  et  $y$ . Soient  $z_0 = x, z_1, \dots, z_\ell = y$  une décomposition de  $\gamma$  telle que chaque segment  $[z_i, z_{i+1}]$  appartienne à un simplexe de  $M$ ; on a  $d_M(x, y) = \sum d_M(z_i, z_{i+1})$ . Comme  $f$  est  $k$ -lipschitzienne sur chaque simplexe, on obtient

$$d_M(x, y) > \sum \frac{1}{k} d_{M'}(f(z_i), f(z_{i+1}))$$

et donc, par l'inégalité triangulaire :

$$d_M(x, y) > \frac{1}{k} d_{M'}(f(x), f(y))$$

$f$  est  $k$ -lipschitzienne.

Nous avons finalement démontré le résultat suivant :

### Lemme 3.2.6

*Soient  $(M, x_0)$  et  $(M', x'_0)$  deux 3-variétés pointées hyperboliques complètes sans bord. Si  $M$  est acylindriquement arborescente, alors tout isomorphisme entre  $\pi_1(M, x_0)$  et  $\pi_1(M', x'_0)$  est induit par une équivalence d'homotopie  $f : M \rightarrow M'$   **$k$ -lipschitzienne**.*

**Lemme 3.2.7**

Soient  $M$  et  $M'$  deux 3-variétés hyperboliques complètes sans bord; on suppose que  $M$  est acylindriquement arborescente. Soient  $f : M \rightarrow M'$  et  $g : M' \rightarrow M$  des équivalences d'homotopie  $k$ -lipschitziennes pour  $k > 0$  telles que  $g \circ f$  induise l'identité sur le groupe fondamental de  $M$ . Alors il existe  $\ell > 0$  tel que pour tout point  $x$  de  $M$  :  $d_M(x, g \circ f(x)) < \ell$ .

*Preuve.* Soit  $x \in M$ ; soit  $\gamma$  un lacet non homotopiquement nul passant par  $x$ . Notons que, du fait que  $M$  est arborescente, il existe  $\ell_1 > 0$ , indépendant de  $x$ , tel que l'on peut toujours choisir  $\gamma$  de longueur inférieure à  $\ell_1$ .

$g \circ f(x)$  appartient à  $g \circ f(\gamma)$ . Par hypothèse,  $g \circ f(\gamma)$  est librement homotope à  $\gamma$ ; soit  $H : [0, 1]^2 \rightarrow M$  une homotopie libre entre  $g \circ f(\gamma)$  et  $\gamma$ .

Supposons que  $g \circ f(\gamma)$  et  $\gamma$  soient séparés par plusieurs surfaces de la décomposition de  $M$ . Sur chacune d'entre elles,  $H$  définit un lacet librement homotope à  $\gamma$ . Or chaque  $M_i$  est acylindrique et  $\gamma$  n'est pas homotopiquement nulle; par conséquent,  $g \circ f(\gamma)$  et  $\gamma$  ne peuvent en fait être séparés que par au plus une surface de la décomposition de  $M$ .

Ainsi, il existe deux composantes  $C_1$  et  $C_2$  de  $M \setminus \bigcup S_u$  avec  $\overline{C_1} \cap \overline{C_2} \neq \emptyset$  telle que  $\gamma \cap (\overline{C_1} \cup \overline{C_2}) \neq \emptyset$  et  $g \circ f(\gamma) \cap (\overline{C_1} \cup \overline{C_2}) \neq \emptyset$ . Mais, les hypothèses sur la structure hyperbolique de  $M$  impliquent que le diamètre des composantes de  $M \setminus \bigcup S_u$  est borné. Il existe donc un nombre  $\ell_2 > 0$ , indépendant de  $x$ , tel que  $d_M(\gamma, g \circ f(\gamma)) < \ell_2$ . Par ailleurs, rappelons que  $\gamma$  a été choisi de longueur inférieure à  $\ell_1$ ;  $g \circ f(\gamma)$  est donc de longueur inférieure à  $k^2\ell_1$ . Finalement on obtient :

$$d_M(x, g \circ f(x)) < \frac{\ell_1}{2} + \frac{k^2\ell_1}{2} + \ell_2$$

On choisit donc  $\ell = \frac{\ell_1}{2} + \frac{k^2\ell_1}{2} + \ell_2$ .

□

**Construction de la pseudo-isométrie**

Soit  $X$  un espace métrique. Une application  $f : X \rightarrow X$  est appelée une *pseudo-isométrie* s'il existe deux nombres  $k$  et  $\ell$  tels que pour tout  $x, y \in X$ ,  $k^{-1}d_X(x, y) - \ell \leq d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y)$ .

**Lemme 3.2.8**

Soient  $M = \mathbb{H}^3/\Gamma$  et  $M' = \mathbb{H}^3/\Gamma'$  deux variétés de dimension 3 hyperboliques complètes sans bord acylindriquement arborescentes. Supposons qu'il existe un isomorphisme  $\Phi : \pi_1(M) \rightarrow \pi_1(M')$ . Il existe alors une équivalence d'homotopie  $f$  entre  $M$  et  $M'$  qui induit  $\Phi$  et qui se relève en une **pseudo-isométrie** de  $\mathbb{H}^3$ .

La preuve est inspirée de [Rat94].

*Preuve.* Soient  $f : M \rightarrow M'$  et  $g : M' \rightarrow M$  deux équivalences d'homotopie  $k$ -lipschitziennes comme construites dans le lemme 3.2.6 telles que  $g \circ f$  induise l'identité sur le groupe fondamental de  $M$ . Soit  $F : M \times [0, 1] \rightarrow M$  une homotopie déformant  $g \circ f$  en  $\text{Id}_M$ , i.e.  $F$  est

continue,  $F(.0) = g \circ f$  et  $F(., 1) = \text{Id}_M$ . Soient  $\tilde{f}$  et  $\tilde{g}$  des relèvements de  $f$  et de  $g$ . Par le théorème du relèvement des homotopies  $F$  se relève en une application  $\tilde{F} : \mathbb{H}^3 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}^3$  telle que  $\tilde{F}_0 = \tilde{g}\tilde{f}$ ; si  $p : \mathbb{H}^3 \rightarrow M$  désigne le revêtement universel de  $M$ , on a  $p\tilde{F}_1 = F_1p = p$ . On en déduit que  $\tilde{F}_1 \in \Gamma$ . Quitte à remplacer  $\tilde{g}$  par  $\tilde{F}_1^{-1}\tilde{g}$  et  $\tilde{F}$  par  $\tilde{F}_1^{-1}\tilde{F}$ , on peut supposer que  $\tilde{F}_1 = \text{id}_{\mathbb{H}^3}$ . D'autre part,  $\tilde{F}$  est  $\Gamma$ -équivariante : en effet, soit  $\sigma \in \Gamma$ ;

$$\begin{aligned} p\tilde{F}(\sigma \times \text{id}) &= F(p \times \text{id})(\sigma \times \text{id}) \\ &= F(p\sigma \times \text{id}) \\ &= F(p \times \text{id}) \\ &= p\tilde{F} \end{aligned}$$

Il existe donc  $\sigma' \in \Gamma$  tel que  $\tilde{F}(\sigma \times \text{id}) = \sigma'\tilde{F}$ . Comme  $\tilde{F}_1 = \text{id}_{\mathbb{H}^3}$ , on a  $\sigma = \sigma'$ .

Par l'inégalité triangulaire, on a pour tout  $x, y \in \mathbb{H}^3$  :

$$d(x, y) \leq d(x, \tilde{g}\tilde{f}(x)) + d(\tilde{g}\tilde{f}(x), \tilde{g}\tilde{f}(y)) + d(\tilde{g}\tilde{f}(y), y)$$

Comme  $f$  et  $g$  sont  $k$ -lipschitzienne,  $\tilde{f}$  et  $\tilde{g}$  le sont aussi. Par le lemme 3.2.7, il existe un majorant  $\ell > 0$  de  $d(x, \tilde{g}\tilde{f}(x))$  et de  $d(y, \tilde{g}\tilde{f}(y))$  indépendant de  $x$  et de  $y$ . Ainsi, on a :

$$d(x, y) \leq \ell + kd(\tilde{f}(x), \tilde{f}(y)) + \ell$$

Et donc :

$$k^{-1}d(x, y) - \frac{2\ell}{k} \leq d(\tilde{f}(x), \tilde{f}(y)) \leq kd(x, y)$$

□

## Conclusion

On sait d'après le théorème de Sullivan [Sul79, Sul81] que si l'action d'un sous-groupe discret  $\Gamma$  de  $\text{Isom } \mathbb{H}^3$  sur la sphère à l'infini  $S_\infty^2$  est conservative (cf. [MT98, Sul79, Sul81]), alors toute pseudo-isométrie  $\Gamma$ -équivariante de  $\mathbb{H}^3$  est homotope à une isométrie  $\Gamma$ -équivariante et ce, par une homotopie elle-même  $\Gamma$ -équivariante. Par ailleurs, par le théorème 5.11 de [MT98] (cf. [McM96]), l'action de  $\Gamma$  sur  $S_\infty^2$  est conservative si et seulement si le rayon injectif de  $\mathbb{H}^3/\Gamma$  est uniformément borné, i.e. il existe  $r > 0$  tel que pour tout  $x \in \mathbb{H}^3/\Gamma$ , la boule de  $\mathbb{H}^3/\Gamma$  centrée en  $x$  de rayon  $r$  est isométrique à une boule de rayon  $r$  de  $\mathbb{H}^3$ ; on montre que cette dernière condition est satisfaite par les variétés de dimension 3 hyperboliques complète acylindriquement arborescentes. Le théorème 7 est démontré.

□

Remarquons que le fait de considérer le théorème 7 comme un théorème de *rigidité* est en réalité un abus étant donné que nous n'avons pas su définir de topologie raisonnable sur l'espace de Teichmüller d'une variété de dimension 3 arborescente, i.e. l'espace des représentations de son groupe fondamental dans  $\text{Isom } \mathbb{H}^3$ , à conjugaison près. Les difficultés que nous avons rencontrées sont principalement liées au fait que ce dernier n'est pas finiment engendré en général (cf. section 3.3).

**Question:** [Rigidité des variétés arborescentes]

Le théorème 7 reste-t-il vrai si l'on suppose que seulement l'une des deux variétés hyperboliques est acylindriquement arborescente ?

Dans la définition 10, si l'on suppose les  $M_i$  non pas compacts mais de volume (hyperbolique) fini, le théorème 7 reste-t-il valide ?

Existe-t-il une topologie raisonnable sur l'espace de Teichmüller d'une variété de dimension 3 arborescente ?

Le théorème de Mostow (cf. [Mos68]) et le théorème de Sullivan (cf. [Sul79, Sul81]) sont valides en dimensions supérieures ou égales à 3; qu'en est-il du théorème 7 ?

## 3.3 Arborescence, régularité et groupes fondamentaux

### 3.3.1 Groupes fondamentaux de 3-variétés arborescentes

Nous avons vu dans la section précédente qu'une variété de dimension 3 hyperbolique complète et acylindriquement arborescente est caractérisée par son groupe fondamental. La question de savoir si deux telles variétés sont homéomorphes se ramène donc à la comparaison de leurs groupes fondamentaux. L'étude de ces groupes s'impose donc naturellement, c'est l'objet de cette partie.

Premièrement, nous allons voir que la donnée d'une décomposition arborescente pour une variété de dimension 3 permet de construire une présentation de son groupe fondamental en termes de générateurs et de relations; pour ce faire, nous verrons que ce dernier peut être défini au moyen du concept de graphe de groupe (cf. [DD89]); nous verrons ensuite que cette présentation, qui est *a priori* infinie tant du point de vue du nombre de générateurs que du nombre de relations, prendra un caractère constructif dès lors que la décomposition arborescente sera supposée régulière. Enfin, nous considérerons le cas particulièrement agréable des 3-variétés arborescentes régulières qui sont des revêtements réguliers de 3-variétés compactes fermées.

#### Présentation

Une variété arborescente est construite de façon arborescente, nous allons voir qu'il en est en quelques sortes de même de son groupe fondamental. Lorsque l'on recolle deux 3-variétés l'une sur l'autre le long de deux composantes incompressibles de leurs bords, le groupe fondamental de la variété que l'on obtient est le produit amalgamé de leurs groupes fondamentaux sur le groupe fondamental de la surface commune (cf. [Hem76, Jac77, Joh95, LS77], voir aussi [Hem76, Feu73] pour une étude de la réciproque). Le cas des 3-variétés arborescentes généralise ce phénomène; la description de leurs groupes fondamentaux nécessite le concept de graphe de groupes, qui généralise les produits amalgamés et les HNN-extensions; la référence principale à ce propos est [DD89].

Un *graphe de groupes* est un graphe  $Y = (V, E, A, \text{vert}, \text{lab}, \text{src})$  de type 0 dont chaque sommet  $v \in V$  est étiqueté par un groupe que l'on note  $\text{lab}(v)$ , on suppose les  $\text{lab}(v)$  deux à deux disjoints, chaque arc  $e$  est étiqueté par un couple  $(G(e), t_e)$  où  $G(e)$  est un sous-groupe

du groupe  $lab(v_1)$  associé à l'origine  $v_1$  de  $e$ , et  $t_e : G(e) \rightarrow lab(v_2)$  est un homomorphisme injectif,  $v_2$  désigne l'extrémité de  $e$ .

Considérons un graphe de groupes  $Y$  ainsi qu'un arbre couvrant  $Y_0$  de  $Y$ . La donnée du couple  $(Y, Y_0)$  permet de définir un groupe appelé le *groupe fondamental* de  $Y$  relatif à  $Y_0$  et noté  $\pi_1(Y, Y_0)$  qui est construit de la façon suivante : l'ensemble des générateurs de  $\pi_1(Y, Y_0)$  est par définition  $\{t_e \mid e \in E\} \cup \bigcup_{v \in V} lab(v)$ ; en plus des relations définissant les  $lab(v)$ , on considère deux types de relations :

- $t_e^{-1}gt_e = t_e(g)$  pour tout  $e \in E, g \in G(e)$ ;
- $t_e = 1$  pour tout  $e \in E_{Y_0}$ .

Soit donc  $M$  une variété de dimension 3 arborescente donnée avec une décomposition arborescente; on conserve les notations de la partie précédente. Nous allons décrire le groupe fondamental de  $M$  comme groupe fondamental d'un graphe infini de groupes. Le graphe support de ce graphe de groupe est l'arbre infini  $\tau$  défini page 71. Par construction, à chaque nœud  $\mu$  de  $\tau$  correspond une composante connexe  $C$  de  $M \setminus \bigcup S_u$ ; on associe alors à  $\mu$  le groupe  $\Gamma_C = \pi_1(\overline{C}, x_C)$ . Notons que  $\varphi_C$  induit un isomorphisme  $\varphi_{C^*} : \Gamma_C \rightarrow \Gamma_{\iota(C)}$ ; rappelons que  $\Gamma_i = \pi_1(M_i, x_{i0})$ . Par ailleurs, chaque  $\Gamma_C$  s'injecte dans  $\pi_1(M, x_{C_0})$  par l'application  $j_C$  définie page 82; ainsi donc, même si  $\tau$  est infini, les groupes attachés à ses nœuds sont en nombre fini à isomorphisme près. Par construction, à chaque arc  $e$  de  $\tau$  est associé une surface  $S_u$  de la décomposition; soient  $C_1$  et  $C_2$  les composantes de  $M \setminus \bigcup S_u$  qui sont contiguës à  $S_u$ , i.e.  $\overline{C}_1 \cap \overline{C}_2 = S_u$ ; on considère le groupe  $\Gamma_u = \pi_1(S_u, \psi_u^{-1}(x_{\mu(u)}))$ ; rappelons que  $\psi_u$  est une carte de  $S_u$  sur  $T_{\mu(u)}$  et que  $x_{\mu(u)}$  est un sommet distingué choisi une fois pour toute dans la triangularisation de  $T_{\mu(u)}$ . En considérant l'arbre simplicial  $\varphi_{C_i}^{-1}(t_{\iota(C_i)})$  ( $i = 1, 2$ ), on obtient un homomorphisme de  $\Gamma_u$  dans  $\Gamma_{C_i}$ ; en effet,  $\varphi_{C_i}^{-1}(t_{\iota(C_i)})$  comporte un chemin unique entre  $x_{C_i}$  et  $\psi_u^{-1}(x_{\mu(u)})$ , dont on se sert pour transformer un lacet de  $S_u$  basé en  $\psi_u^{-1}(x_{\mu(u)})$  en un lacet de  $\overline{C}_i$  basé en  $x_{C_i}$ ; de fait, cet homomorphisme est injectif car  $S_u$  est supposée incompressible. On note  $\Gamma_{C_i u}$  l'image de  $\Gamma_u$  dans  $\Gamma_{C_i}$ . Comme  $S_u = \overline{C}_1 \cap \overline{C}_2$ , on obtient un isomorphisme  $t_e : \Gamma_{C_1 u} \rightarrow \Gamma_{C_2 u}$  que l'on associe à  $e$ . Remarquons que cet isomorphisme ne dépend en fait que de  $\iota(C_1)$ , de  $\iota(C_2)$  et de  $j_1$  et  $j_2$ , les indices tels que  $\varphi_{\overline{C}_i}|_{S_u}$  a pour image  $B_{\iota(C_i)j_i}$  pour  $i = 1, 2$ ; de même que précédemment,  $\pi_1(B_{ij}, x_{ij})$  se plonge dans  $\pi_1(M_i, x_{i0})$  en utilisant l'arbre étoilé  $t_i$ . Par un léger abus de notation, on a alors  $\Gamma_{C_i u} = \varphi_{C_i}^{-1}(\pi_1(B_{ij}, x_{ij}))$ ; et on vérifie que

$$t_e = \varphi_{C_2^*}|_{\Gamma_{C_2 u}}^{-1} \circ g_{\iota(C_2)j_2}^{-1} \circ g_{\iota(C_1)j_1} \circ \varphi_{C_1^*}|_{\Gamma_{C_1 u}}.$$

Finalement, la donnée de  $\tau$  et des groupes associés à ses nœuds et à ses arêtes définit un graphe de groupe dont on montre que le groupe fondamental est isomorphe à  $\pi_1(M, x_{C_0})$ . Nous avons décrit  $\pi_1(M, x_{C_0})$  comme groupe fondamental d'un graphe de groupe; néanmoins, du fait que  $\tau$  est un arbre, cela revient à dire que  $\pi_1(M, x_{C_0})$  est obtenu en faisant le produit amalgamé simultané de tous les couples de  $\Gamma_C$  voisins relativement aux  $\Gamma_u$ , le long des arêtes de  $\tau$ .

Nous donnons maintenant une présentation de  $\pi_1(M, x_{C_0})$  qui est associée à la construction précédente. Rappelons que  $A_i$  désigne un ensemble fini de générateurs de  $\Gamma_i$ ; Par

construction de  $s_i$ , pour tout  $j$ ,  $A_i$  contient un sous-ensemble  $A_{ij}$  qui engendre l'image de  $\pi_1(B_{ij}, x_{ij})$  dans  $\Gamma_i$ . Pour toute composante  $C$  de  $M \setminus \bigcup S_u$  et tout élément  $\alpha$  de  $A_{i(C)}$ , on note  $\alpha^C = j_C(\alpha)$ ;  $j_C(A_{i(C)})$  est alors une famille génératrice du sous-groupe  $j_C(\Gamma_{i(C)})$ . On montre alors que la famille

$$\mathfrak{A} = \{\alpha^C\}_{\alpha, C}$$

est une famille génératrice d'éléments de  $\pi_1(M, x_{C_0})$ . Notons qu'elle est de cardinal infini.

Si  $w = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_l \in A_{i(C)}^*$  est un mot sur les générateurs de  $\Gamma_{i(C)}$ , on note  $w^C = \alpha_1^C \alpha_2^C \dots \alpha_l^C$ ; comme  $M_i$  est une variété compacte triangularisée, elle est finiment présentée (cf. e.g. [Hem76]); il existe donc un sous-ensemble fini de mots  $R_i \subset \{A_i \cup A_i^{-1}\}^*$  tel que  $\langle A_i \mid R_i \rangle$  soit une présentation de  $\Gamma_i$ ; on considère alors le langage

$$\begin{aligned} \mathfrak{R} = & \{r^C \mid C \text{ est une composante de } M \setminus \bigcup S_u \text{ et } r \in R_{i(C)}\} \\ & \cup \{\alpha_1^{C_1} \alpha_2^{C_2^{-1}} \mid \overline{C_1} \cap \overline{C_2} \neq \emptyset \text{ et il existe } e \text{ tel que } \alpha_2^{C_2} = t_e(\alpha_1^{C_1})\} \end{aligned}$$

### Proposition 3.3.1

$\langle \mathfrak{A} \mid \mathfrak{R} \rangle$  est une présentation de  $\pi_1(M, x_{C_0})$ .

*Idée de preuve.* Soit  $\gamma$  un lacet de  $M$  de point de base  $x_{C_0}$ . Comme il est compact,  $\gamma$  ne rencontre qu'un nombre fini de composantes connexes  $C_1, \dots, C_m$  de  $M \setminus \bigcup_u S_u$ . L'union de leurs adhérences est une variété compacte  $K$ ; elle est construite en recollant en elles, une à une, les  $\overline{C}_i$  sur leurs bords. On montre alors par des techniques classiques [Hem76, LS77], que le groupe fondamental de  $K$  est obtenu en effectuant  $m - 1$  produits amalgamés successifs sur les groupes des surfaces  $S_u$  séparant les  $C_i$ : on commence par faire le produit de  $j_{C_1}(\Gamma_{C_1})$  par  $j_{C_2}(\Gamma_{C_2})$  sur le groupe de la surface qui sépare  $C_1$  et  $C_2$ ; puis on fait le produit du groupe obtenu avec  $j_{C_3}(\Gamma_{C_3})$  sur le groupe de la surface séparant  $C_1$  et  $C_2$  de  $C_3$ , et ainsi de suite. De fait, on obtient une présentation finie de  $\pi_1(K, x_{C_0})$  dont l'ensemble des générateurs est

$$\mathfrak{A}_K = \{\alpha^{C_i} \mid i = 1, \dots, k \text{ et } \alpha \in A_{i(C_i)}\}$$

et l'ensemble des relations est

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_K = & \{r^{C_i} \mid i = 1, \dots, k \text{ et } r \in R_{i(C_i)}\} \\ & \cup \{\alpha_1^{C_i} \alpha_2^{C_{i'}^{-1}} \mid \overline{C}_i \cap \overline{C}_{i'} \neq \emptyset \text{ et il existe } e \text{ tel que } \alpha_2^{C_{i'}} = t_e(\alpha_1^{C_i})\} \end{aligned}$$

Ainsi, la classe d'homotopie de  $\gamma$  se décompose sur les éléments de  $\mathfrak{A}_K$  qui elle-même est un sous-ensemble de  $\mathfrak{A}$ , cela prouve que cette dernière est une famille génératrice de  $\pi_1(M, x_{C_0})$ . Par ailleurs, si  $\gamma$  est homotopiquement nul, alors, sa classe d'homotopie, décrite comme produit d'éléments de  $\mathfrak{A}_K$  et vue dans le groupe libre engendré par  $\mathfrak{A}_K$  se décompose en un produit de conjugués d'éléments de  $\mathfrak{R}_K$  qui elle-même est un sous-ensemble de  $\mathfrak{R}$ .

□



## Régularité

Cette présentation est en général infinie. Néanmoins, elle présente certains caractères constructifs. D'abord, elle est définie à partir d'un nombre fini de présentations finies : celles des  $\Gamma_i : \langle A_i \mid R_i \rangle$  pour  $i = 1 \dots n$ ; d'autre part, les produits amalgamés locaux ne dépendent que de l'application  $\iota(\cdot)$ , assignant l'un des  $M_i$  à chaque composante  $C$  de  $M \setminus \bigcup S_u$  et de l'application  $\mu(\cdot)$  assignant l'un des  $T_k$  à chaque  $S_u$ . En fait, la donnée qui n'est définitivement pas finie est celle des étiquettes de  $\tau$ . Pour remédier à cela, nous proposons de considérer les décompositions arborescentes régulières, i.e. celles pour lesquelles  $\tau$  est un arbre régulier.

Supposons donc que  $\tau$  est un arbre régulier. Dans ce cas, ses nœuds peuvent être codés par les mots d'un langage rationnel  $L$ ;  $L$  peut être défini comme le langage reconnu par un automate construit à partir du graphe pointé fini codant  $\tau$ ; de même, les applications  $\iota(\cdot) : \text{dom}(\tau) \rightarrow [1, n]$  et  $\mu(\cdot) : \text{dom}(\tau) \setminus \{\varepsilon\} \rightarrow [1, m]$  peuvent être codées par exemple par deux partitions de  $L$  par des familles de langages rationnels  $\{L'_1, \dots, L'_n\}$  et  $\{L''_1, \dots, L''_m\}$  codant les images réciproques. On peut maintenant coder les éléments de  $\mathfrak{A}$  par des couples  $(\alpha, w)$  où  $w \in L$  et  $\alpha \in A_i$  où  $i$  est l'entier de  $[1, n]$  tel que  $w \in L'_i$ , i.e.  $i = \iota(C)$  où  $C$  est la composante de  $M \setminus \bigcup S_u$  codée par  $w$ . Le codage des relations de  $\mathfrak{R}$  suit les mêmes idées: on peut vérifier que le langage des relateurs est aussi un langage rationnel.

Ainsi, le groupe fondamental d'une 3-variété arborescente régulière est un objet constructif; plusieurs questions algorithmiques prennent alors du sens. L'une d'entre elles consiste à déterminer dans quel cas on peut envisager de le calculer de façon effective. Nous avons vu avec la proposition 3.1.2 que, pour une 3-variété HR-équationnelle, on peut calculer une décomposition arborescente régulière. On peut donc aussi calculer une présentation de son groupe fondamental; ce qui donne un sens au résultat suivant :

**Proposition 3.3.2** *Le groupe fondamental d'une variété HR-équationnelle est calculable.*

## Remarque à propos des formes normales

Nous avons vu précédemment que le groupe fondamental d'une variété arborescente s'exprime comme un produit amalgamé infini le long d'un arbre. Ceci donne à penser qu'il est certainement possible de définir un concept de *forme normale* [LS77, MKS66]. A cet égard, nous proposons la conjecture suivante :

### Conjecture :

*Tout élément  $u$  de  $\pi_1(M, x_{c_0})$  peut s'écrire sous la forme*

$$u = h_1 \dots h_n$$

*de telle sorte qu'il existe une suite  $(H_1, \dots, H_n)$  de sous-groupes de  $\pi_1(M, x_{c_0})$  telle que*

- *pour tout  $i$  de  $[1, n]$ ,  $h_i \in H_i$  et  $H_i = j_u(\Gamma_u)$  pour un  $u$  donné ou bien  $H_i = j_C(\Gamma_C)$  pour une composante  $C$  de  $M \setminus \bigcup S_u$ ;*
- *pour tout  $i$  de  $[1, n]$ ,  $h_i$  n'appartient ni à  $H_{i+1}$ , ni à  $H_{i-1}$ .*

*La suite  $(H_1, \dots, H_n)$  est uniquement déterminée par  $u$ ; la suite  $(h_1, \dots, h_n)$  est appelée **forme normale** de  $u$ .*

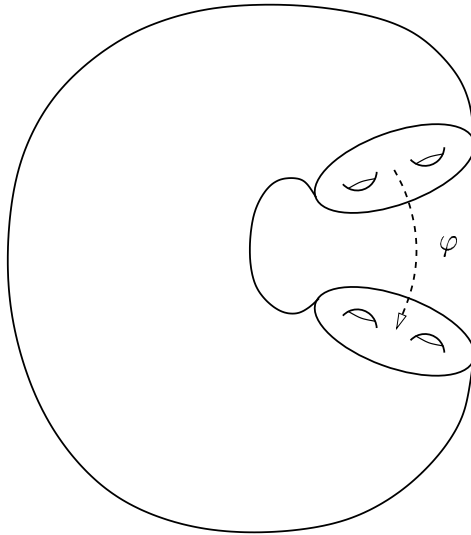
Si les  $H_i$  sont certainement uniques, il n'en est pas de même des  $h_i$  et loin s'en faut. Néanmoins, comme dans le cas du produit amalgamé de deux groupes, nous pensons qu'il est possible de définir une forme normale dont les facteurs seraient uniques; pour ce faire il faut se donner un système de représentants des classes à droite pour chaque sous-groupes de forme  $j_C(\Gamma_C)$  ou bien  $j_u(\Gamma_u)$  modulo chacun de ses sous-groupes obtenu par intersection avec d'autres  $j_C(\Gamma_C)$  ou  $j_u(\Gamma_u)$ , i.e. pour tout couple de sous-groupes  $H, H'$  de la famille  $\{j_u(\Gamma_u)\}_u \cup \{j_C(\Gamma_C) \mid C \text{ composante de } M \setminus \bigcup S_u\}$  il faut se donner un système  $R_{H,H'} \subset H$  de représentants des classes à droite de  $H$  modulo  $H \cap H'$ .

L'un des objectifs du concept de forme normale est de donner une solution effective au *problème du mot*, i.e. décider si deux mots sur les générateurs et leurs inverses représentent le même élément d'un groupe (cf. [MKS66, LS77]). La définition rigoureuse d'un concept de forme normale pour les éléments de  $\pi_1(M, x_{c_0})$  constituerait une avancée importante dans ce sens. Cela réduirait le problème à la question de l'équivalence de deux éléments de  $H$  modulo  $H \cap H'$ , où  $H$  et  $H'$  sont tels que précédemment.

### 3.3.2 Logique monadique du second ordre, régularité et revêtements

#### Etude d'un cas favorable

Considérons une variété de dimension 3 triangularisée  $N$ , compacte, à bords incompressibles, munie d'un homéomorphisme involutif  $\varphi : \partial N \rightarrow \partial N$  qui échange les composantes de bord de  $N$ , i.e. pour chaque composante  $B$  de  $\partial N$ ,  $\varphi(B)$  est une autre composante de  $\partial N$ , distincte de  $B$ , et  $\varphi^2 = \text{Id}_{\partial N}$ . Intuitivement,  $\varphi$  définit un recollement du bord de  $N$  sur lui-même. On considère alors la 3-variété compacte sans bord  $\overline{N}$ , qui est obtenue à partir de  $N$  en recollant  $\partial N$  sur elle-même selon  $\varphi$ , i.e.  $\varphi$  définit une relation d'équivalence sur  $N$  qui est triviale sur son intérieur et qui définit chaque élément du bord comme équivalent à son image par  $\varphi$ .



Cette construction de  $\overline{N}$  à partir de  $N$  est naturellement associée à une construction de  $\pi_1(\overline{N})$  à partir de  $\pi_1(N)$  en termes de graphe de groupe. On choisit un point  $x_0$  dans  $N$  et

un point  $x_B$  dans chaque composante  $B$  de  $\partial N$ ; on peut choisir les  $x_B$  de telle sorte que  $\varphi(\{x_B\}_B) = \{x_B\}_B$ ; on choisit aussi pour chaque  $x_B$  un chemin  $\alpha_B$  le connectant à  $x_0$  dans  $N$ ; le choix de ces  $\alpha_B$  détermine pour tout  $B$  un plongement  $j_B : \pi_1(B, x_B) \rightarrow \pi_1(N, x_0)$ . On note  $\Gamma_N = \pi_1(N, x_0)$  et pour toute composante  $B : \Gamma_B = j_B(\pi_1(B, x_B)) \subset \Gamma_N$ . On note les composantes de  $\partial N$  de la façon suivante:  $B_1, \dots, B_k, B'_1, \dots, B'_k$ , de telle sorte que  $\partial N = \bigcup_j B_j \cup B'_j$  et pour tout  $j = 1 \dots k$ ,  $B'_j = \varphi(B_j)$ . Pour tout  $j = 1, \dots, k$ ,  $\varphi$  induit un isomorphisme  $t_j : \Gamma_{B_j} \rightarrow \Gamma_{B'_j} : t_j = j_{B'_j}^{-1} (\varphi|_{B_j})_* j_{B_j}$ . Le groupe fondamental de  $\overline{N}$  de point de base  $x_0$  est alors le groupe fondamental du graphe de groupe  $G_N$  qui ne contient qu'un sommet associé au groupe  $\Gamma_N$  et  $k$  arcs, qui sont en fait des boucles étiquetées par les couples  $(\Gamma_B, t_j)$  pour  $j = 1, \dots, k$ ; on peut aussi dire de façon équivalente que  $\pi_1(\overline{N}, x_0)$  est obtenu par  $k$  HNN-extensions de  $\Gamma_N$  successives selon les  $t_j$  pour  $j = 1, \dots, k$  (cf. [LS77, DD89]).

Cette construction nous permet de donner une présentation de  $\pi_1(\overline{N}, x_0)$ . Pour ce faire, on considère d'abord une présentation finie  $\langle A \mid R \rangle$  de  $\Gamma_N$  telle que pour toute composante  $B$  de  $\partial N$ , il existe un sous-ensemble  $A_B$  de  $A$  telle que  $A_B$  soit une partie génératrice de  $\Gamma_B$  et que pour tout  $j = 1, \dots, k$ ,  $t_j(A_{B_j}) = A_{B'_j}$ ; on obtient alors une présentation de  $\pi_1(\overline{N}, x_0)$  :

$$(A \cup \{t_j \mid j = 1, \dots, k\} \mid R \cup \{t_j a t_j^{-1} t_j(a)^{-1} \mid j = 1, \dots, k \text{ et } a \in A_{B_j}\})$$

cf. [LS77, DD89].

Avec tout cela, nous allons construire une variété de dimension 3,  $\tilde{N}$ , arborescente régulière, et donc HR-équationnelle, comme revêtement régulier de  $\overline{N}$ . On considère d'abord  $T_N$ , le revêtement universel de  $G_N$  au sens des graphes;  $T_N$  est l'arbre infini régulier dont chaque sommet est de degré  $2k$  et appartient pour tout  $j = 1, \dots, k$ , à un arc entrant étiqueté par  $j$  et un seul et un arc sortant étiqueté par  $j$  et un seul; notons que  $T_N$  n'est pas un arbre au sens orienté du terme, c'est un graphe orienté connexe sans boucle. On associe à chaque nœud de  $T_N$  une copie de  $N$ ; chaque arc de  $T_N$  est associé à un couple de composantes du bord de  $N$ , ce qui définit des recollements locaux des bords des copies de  $N$  le long des arcs de  $T_N$ ; on ne détaille pas ces recollements qui s'imposent de façon naturelle. Finalement, on obtient une 3-variété  $\tilde{N}$  qui est un revêtement de  $\overline{N}$ ; on laisse au lecteur le soin de définir la surjection  $p$  de  $\tilde{N}$  sur  $\overline{N}$ , qui s'impose aussi de façon très naturelle. On démontre alors le résultat suivant :

**Proposition 3.3.3**  *$\tilde{N}$  est une variété arborescente régulière. De plus, si  $\overline{N}$  est hyperbolique complète, comme c'est le cas si  $N$  est hyperbolique à bords totalement géodésiques, alors  $\tilde{N}$  est une variété hyperbolique complète arborescente au sens de la définition 13.*

*Idée de preuve.* Pour construire une décomposition arborescente de  $\tilde{N}$ , on considère le revêtement  $p : \tilde{N} \rightarrow \overline{N}$ ; puis on regarde l'image réciproque par  $p$  du bord de  $N$  qui est une surface incompressible de  $\overline{N}$ .  $p^{-1}(\partial N)$  est une collection de surfaces incompressibles de  $\tilde{N}$  qui découpe  $\tilde{N}$  en morceaux tous homéomorphes à  $N$ . Par ailleurs, chaque composante de  $p^{-1}(\partial N)$  est associée à un arc de  $T_N$ ; la construction de  $\tilde{N}$  sur le modèle de  $T_N$  montre qu'une telle composante est une surfaces séparante de  $\tilde{N}$ .

Pour ce qui concerne l'hyperbolicité; si  $\overline{N}$  possède une structure hyperbolique, alors  $p^{-1}$  la transmet à  $\tilde{N}$ .

□

Par *revêtement de graphe de groupes*, on entend le concept suivant : soient  $G$  un graphe de groupes; un *revêtement* de  $G$  est un triplet  $(\tilde{G}, p, \{\psi_v\}_{v \in V_{\tilde{G}}})$  où  $\tilde{G}$  est un graphe de groupes,  $p : \tilde{G} \rightarrow G$  est un revêtement au sens des graphes et pour tout sommet  $v \in V_{\tilde{G}}$ ,  $\psi_v$  est un isomorphisme entre le groupe associé à  $v$  dans  $\tilde{G}$  et celui qui est associé à  $p(v)$  dans  $G$  tel que si  $v$  et  $v'$  sont liés dans  $\tilde{G}$  par un arc  $e$ , alors l'isomorphisme partiel  $\tilde{t}_e$  associé à  $e$  dans  $\tilde{G}$  est égal à  $\psi_{v'}^{-1} t_{p(e)} \psi_v$  restreint au domaine de  $\tilde{t}_e$ , lui-même égal à  $\psi_v^{-1}(\text{dom}(t_{p(e)}))$ ,  $t_{p(e)}$  désigne l'isomorphisme partiel associé à  $p(e)$  dans  $G$ .

En ces termes, le groupe fondamental de  $\tilde{N}$  se définit de façon satisfaisante :

**Proposition 3.3.4** *Le groupe fondamental de  $\tilde{N}$  est isomorphe au groupe fondamental du graphe de groupe défini comme le revêtement universel du graphe de groupe  $G_N$ .*

*Idée de preuve.* Sachant que le graphe support du revêtement universel de  $G_N$  est exactement  $T_N$ , ce résultat est une instance de la construction développée page 91.

□

La proposition 3.3.1 permet alors de définir  $\pi_1(\tilde{N})$  de manière constructive.

Un grand intérêt de fabriquer des 3-variétés arborescentes comme revêtement de variétés compactes réside dans le fait que l'on obtient alors un plongement de leurs groupes fondamentaux dans des groupes *finiment présentés*; en l'occurrence, dans notre cas, le groupe fondamental de  $\tilde{N}$  se plonge par  $p_*$  dans  $\pi_1(\overline{N}, x_0)$ ; et son image est engendrée par la famille  $\{tat^{-1} \mid a \in A \text{ et } t \in \langle t_1, \dots, t_k \rangle\}$  où  $\langle t_1, \dots, t_k \rangle$  désigne le sous-groupe de  $\pi_1(\overline{N}, x_0)$  engendré par la famille  $\{t_1, \dots, t_k\}$ , notons que c'est un groupe libre dont  $T_N$  est le graphe de Cayley. Pour voir cela, on considère la construction développée page 91; les générateurs de  $\pi_1(\overline{N}, x_0)$  sont donnés par la famille  $\mathfrak{A} = \{\alpha^C\}_{\alpha, C}$ , où  $C$  varie dans l'ensemble des composantes connexes de  $\tilde{N} \setminus \bigcup S_u$ ,  $\{S_u\}_u$  est la décomposition arborescente de  $\tilde{N}$ , et  $\alpha$  varie dans une famille génératrice de  $\pi_1(M_i, x_{i0})$ ; où  $M_i$  est le représentant de la classe d'homéomorphisme de  $C$  ( $i = \iota(C)$ ). Dans le cas présent, les composantes de  $\tilde{N} \setminus \bigcup_u S_u$  sont indicées par les nœuds de  $T_N$ , que nous considérerons dorénavant comme le graphe de Cayley de  $\langle t_1, \dots, t_k \rangle$ ; et chaque composante connexe de  $\tilde{N} \setminus \bigcup_u S_u$  est homéomorphe à  $N$ , ainsi, on peut choisir  $A$  comme partie génératrice de  $\pi_1(M_i, x_{i0})$  au sens des notations précédentes. La famille génératrice de  $\pi_1(\overline{N}, x_0)$  peut être alors notée  $\{a^t \mid a \in A \text{ et } t \in \langle t_1, \dots, t_k \rangle\}$ . On vérifie alors que l'image par  $p_*$  dans  $\pi_1(\tilde{N}, x_0)$  d'un élément  $a^t$  est exactement  $t^{-1}at$ . On obtient le résultat suivant :

**Proposition 3.3.5**  $\pi_1(\tilde{N})$  est isomorphe à la clôture normale  $\langle\langle A \rangle\rangle$  de  $A$ .

Ceci nous offre un autre moyen de définir constructivement le groupe fondamental d'une variété arborescente.

Outre cela, on obtient un résultat concret :

**Proposition 3.3.6** *Si le problème du mot relatif à  $\pi_1(N, x_0)$  est décidable, alors il en est de même pour  $\pi_1(\tilde{N})$ .*

*Idée de preuve.* Deux mots  $\tilde{w}_1$  et  $\tilde{w}_2$  sur les  $a^t$  définissent *via*  $p_*$  deux éléments de  $\pi_1(N, x_0)$  qui sont égaux si et seulement si  $\tilde{w}_1$  et  $\tilde{w}_2$  définissent le même élément de  $\pi_1(\tilde{N}, x_0)$ .

□

3.3. RÉGULARITÉ, RÉGULARITÉ ET GROUPE FONDAMENTAL 37

C'est le cas notamment si  $\pi_1(\overline{N}, x_0)$  est automatique et donc en particulier si  $\overline{N}$  peut être équipée d'une structure hyperbolique complète (cf. [ECH<sup>+</sup>92]). Ce dernier cas est intéressant, car si  $\overline{N}$  est une variété hyperbolique complète et si  $N$  est acylindrique, alors  $\tilde{N}$  est aussi hyperbolique complète et elle est acylindriquement arborescente; par le théorème 7, elle est donc caractérisée à isométrie près par son groupe fondamental  $\pi_1(\tilde{N})$ .

### Logique monadique du second ordre et revêtements réguliers

Nous introduisons ici le langage  $MS_1$  de la logique monadique du second ordre pour les graphes [Tho, Cou90a, Cou97] (pour une introduction à la logique en informatique théorique, voir [LdR96], pour la logique monadique du second ordre voir [Gur85]). Soit  $A$  un ensemble de symboles d'étiquettes; on suppose qu'à chaque symbole  $a \in A$  est associé un entier  $\tau(a)$ . On considère un ensemble dénombrable de *variables* divisé en variables dites *individuelles* de sommets que l'on notera par convention par des lettres minuscules ( $a, b, x, y, v, w, \dots$ ) et en variables dite *d'ensemble* de sommets que l'on notera par des lettres majuscules ( $A, B, X, Y, \dots$ ). On considère alors les formules *atomiques*, elles ont pour formes  $x = y$ ,  $edg_a(x_1, \dots, x_{\tau(a)})$ ,  $lab_a(x)$  ou bien  $x \in X$  où  $x, y, x_1, \dots, x_{\tau(a)}$  sont des variables individuelles,  $X$  est une variable d'ensemble et  $a \in A$ . Les formules de la logique monadique du second ordre sont alors construites à partir des formules atomiques en utilisant les connecteurs logiques habituels :  $\wedge, \vee, \neg, \Rightarrow$  et  $\Leftrightarrow$ , ainsi que les quantificateurs existentiels et universels  $\exists \alpha$  et  $\forall \alpha$ , où  $\alpha$  est une variable individuelle ou bien une variable d'ensemble. La sémantique de ces formules est claire. Plutôt que d'en donner une définition formelle, nous proposons un exemple; il s'agit d'une formule exprimant la connexité :

$$\begin{aligned} \varphi = & \forall x \forall y \forall Z \\ & (((x \in Z) \wedge \\ & (\forall z_1 \forall z_2 (z_1 \in Z \wedge \bigvee_{a \in A} (edg_a(z_1, z_2) \vee edg_a(z_2, z_1))) \Rightarrow z_2 \in Z)) \\ & \Rightarrow y \in Z) \end{aligned}$$

L'entier  $\tau(a)$  associé à chaque symbole d'étiquette  $a \in A$  impose une arité fixée : tout hyperarc étiqueté par  $a$  doit être d'arité  $\tau(a)$ .

On vérifie qu'un graphe  $G$  est connexe si et seulement si il satisfait  $\varphi$ , on note dans ce cas  $G \models \varphi$ ; en effet,  $\varphi$  vérifie que pour tout couple de sommet  $x$  et  $y$ ,  $y$  se trouve dans la classe de  $x$  relativement à la relation d'équivalence engendrée par clôture symétrique et transitive de la relation d'adjacence.

Soit  $K$  un polyèdre compact muni d'une triangularisation codée par un hypergraphe fini  $H$ . On considère un revêtement simplicial  $p : \tilde{K} \rightarrow K$ ; on code un tel objet au moyen d'un hypergraphe  $\tilde{H}$  étiqueté sur  $V_H \cup E_H$  dont chaque sommet est étiqueté par un sommet de  $\tilde{H}$ , et chaque hyperarc, par un hyperarc de  $H$  de même arité;  $\tilde{H}$  code la triangularisation de  $\tilde{K}$  et l'étiquetage code l'application  $p$ : chaque sommet de  $\tilde{H}$  est étiqueté par son image par  $p$ , de même que chaque hyperarc. Ainsi, la donnée de  $\tilde{H}$  code totalement le revêtement  $(\tilde{K}, p)$ .

**Lemme 3.3.1** *On conserve les notations précédentes. L'ensemble des hypergraphes étiquetés sur  $V_H \cup E_H$  qui codent des revêtements de  $K$  est définissable en logique monadique du second ordre; en d'autres termes, il existe une formule  $\psi_H$  de la logique monadique du second ordre*

tel que pour tout hypergraphe  $\tilde{H}$  étiquetés sur  $V_H \cup E_H$ ,  $\tilde{H}$  code un revêtement de  $K$  si et seulement si il satisfait  $\psi_H$ .

*Idée de preuve.* Soit  $\tilde{H}$  un graphe étiqueté sur  $V_H \cup E_H$ ; il s'agit de vérifier que tout point de  $|H|$  possède un voisinage *élémentaire*, i.e. un voisinage ouvert  $V$  tel que  $p^{-1}(V)$  est l'union d'une famille d'ouverts deux à deux disjoints de  $|\tilde{H}|$  tels que  $p$  induit sur chacun d'entre eux un homéomorphisme entre lui-même et  $V$ . Sachant que  $p$  est définie ici de façon simpliciale, il suffit de vérifier que l'étoile de tout simplexe de  $H$  est un voisinage élémentaire. Cette vérification se fait au moyen d'une formule monadique du second ordre qui contrôle que pour tout sommet et pour tout simplexe de  $H$ , i.e. pour tout élément  $s$  de  $V_H \cup E_H$ , tout élément  $\tilde{s}$  de  $V_{\tilde{H}} \cup E_{\tilde{H}}$  étiqueté par  $s$  est de même nature que  $s$ , i.e. un sommet si  $s$  est un sommet, et un hyperarc de même arité que  $s$  si  $s$  est un hyperarc, et  $Lk(\tilde{s})$  est isomorphe à  $Lk(s)$ ;  $Lk(\tilde{s})$  doit par ailleurs être envoyé sur  $Lk(s)$ , ce qui se vérifie en contrôlant les étiquettes des simplexes de  $Lk(\tilde{s})$ . On laisse au lecteur le soin de vérifier que cette vérification est possible au moyen du langage de la logique monadique du second ordre. Notons qu'en réalité, une formule du premier ordre suffit.

□

Sachant que toute formule monadique du second ordre satisfiable qui possède un modèle infini arborescent en possède un qui est HR-équationnel (cf. [Cou90b]), on en déduit un résultat intéressant :

**Proposition 3.3.7** *Soit  $K$  un polyèdre compact. Si  $K$  possède un revêtement non-compact arborescent, alors il en possède un qui est HR-équationnel.*

Soit  $x_0$  un sommet de  $K$  et  $\tilde{x}_0$  un élément de la fibre de  $x_0$ , i.e.  $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$ . On suppose dorénavant que  $(\tilde{K}, p)$  est un revêtement *régulier*, i.e.  $p_*(\pi_1(\tilde{K}, \tilde{x}_0))$  est un sous-groupe normal de  $\pi_1(K, x_0)$ .

On s'intéresse à l'action à droite de  $\pi_1(K, x_0)$  sur  $p^{-1}(x_0)$ , la fibre de  $x_0$  (cf. [Mas67]). Cette action est définie de la façon suivante : soit  $g \in \pi_1(K, x_0)$  et  $x \in p^{-1}(x_0)$ ; on choisit un lacet  $\gamma$  de  $K$  représentant  $g$ ; on considère alors un relèvement  $\tilde{\gamma}$  de  $\gamma$  dans  $\tilde{K}$  d'origine  $\tilde{x}_0$ ; l'extrémité de  $\tilde{\gamma}$  est un élément de  $p^{-1}(x_0)$  qui par définition est  $x.g$ . On montre que  $x.g$  ne dépend pas du choix de  $\gamma$  (cf. [Mas67]).

Cette action est transitive; on vérifie aussi que le stabilisateur de tout élément  $\tilde{x} \in p^{-1}(x_0)$ , i.e. le sous-groupe de  $\pi_1(K, x_0)$ , noté  $\text{stab}(\tilde{x})$ , constitué des éléments qui laissent  $\tilde{x}$  invariant, est égal à  $p_*(\pi_1(\tilde{K}, \tilde{x}))$ ; par ailleurs pour toute paire  $\tilde{x}, \tilde{x}'$  d'éléments de  $p^{-1}(x_0)$ ,  $\text{stab}(\tilde{x})$  et  $\text{stab}(\tilde{x}')$  sont des sous-groupes conjugués de  $\pi_1(K, x_0)$ ; or, on suppose que  $(\tilde{K}, p)$  est un revêtement régulier, i.e.  $p_*(\pi_1(\tilde{K}, \tilde{x}_0))$  est un sous-groupe normal de  $\pi_1(K, x_0)$ ;  $p_*(\pi_1(\tilde{K}, \tilde{x}_0))$  est donc le stabilisateur de tous les éléments de la fibre de  $x_0$ .

Ainsi l'action passe au quotient, et  $\pi_1(K, x_0)/p_*(\pi_1(\tilde{K}, \tilde{x}_0))$  agit *transitivement et librement* sur  $p^{-1}(x_0)$ , i.e. pour tout couple d'éléments  $\tilde{x}, \tilde{x}'$  de  $p^{-1}(x_0)$ , il existe un unique élément  $g \in \pi_1(K, x_0)/p_*(\pi_1(\tilde{K}, \tilde{x}_0))$  tel que  $g.\tilde{x} = \tilde{x}'$ . Cela définit, avec le choix de  $\tilde{x}_0$ , une bijection naturelle entre  $\pi_1(K, x_0)/p_*(\pi_1(\tilde{K}, \tilde{x}_0))$  et  $p^{-1}(x_0)$ .

En fait, on a beaucoup plus qu'une bijection : L'action de  $\pi_1(K, x_0)$  sur la fibre de  $x_0$  définit un homomorphisme de  $\pi_1(K, x_0)$  dans le groupe des *automorphismes* du revêtement  $(\tilde{K}, p)$  dont le noyau est  $p_*(\pi_1(\tilde{K}, \tilde{x}_0))$ . Soit  $A \subset \pi_1(K, x_0)$  une partie finie génératrice de

$\pi_1(K, x_0)$ . Les classes des éléments de  $A$  forment une partie génératrice  $\bar{A}$  de  $\pi_1(K, x_0)/p_*(\pi_1(\tilde{K}, \tilde{x}_0))$ ; on considère le graphe  $\Gamma_{\bar{A}, \tilde{K}}$  dont les sommets sont les éléments de  $p^{-1}(x_0)$  et dont les arcs, étiquetés sur  $\bar{A}$ , sont définis comme suit : deux éléments  $\tilde{x}$  et  $\tilde{x}'$  de  $p^{-1}(x_0)$  sont connectés par un arc de  $\tilde{x}$  à  $\tilde{x}'$ , étiqueté par  $\tilde{a} \in \bar{A}$ , si et seulement si  $\tilde{a}.\tilde{x} = \tilde{x}'$ .  $\Gamma_{\bar{A}, \tilde{K}}$  est isomorphe au graphe de Cayley de  $\pi_1(K, x_0)/p_*(\pi_1(\tilde{K}, \tilde{x}_0))$  relativement à  $\bar{A}$ .

On montre, et c'est là un point essentiel pour nous, que si  $\tilde{K}'$  code un autre revêtement régulier de  $K$ , tel que  $\Gamma_{\bar{A}, \tilde{K}'}$  est isomorphe à  $\Gamma_{\bar{A}, \tilde{K}}$ , alors  $\tilde{K}'$  est isomorphe à  $\tilde{K}$  au sens des revêtements (cf. [Mas67, Rot88]), et en particulier,  $\tilde{K}$  et  $\tilde{K}'$  sont isomorphes au sens des polyèdres.

On définit maintenant le concept de transduction d'hypergraphes  $MS_1$ -définissables [Cou90a, Cou97]. On appelle *shémas de définition* relatif à un ensemble  $A$  de symboles d'étiquettes tout tuple  $(\varphi, \psi(v), \{\text{EDG}_a(v_1, \dots, v_{\tau(a)})\}_{a \in A}, \{\text{LAB}_a(v)\}_{a \in A})$  de formules  $MS_1$ . Un tel objet permet d'associer à tout hypergraphe  $\tilde{H}$  satisfaisant  $\varphi$  un hypergraphe abstrait  $H$  de type 0 défini comme suit : les sommets de  $H$  sont les sommets  $\tilde{v}$  de  $\tilde{H}$  tels que  $(\tilde{H}, \tilde{v}) \models \psi(v)$ , i.e.  $\tilde{H}$  satisfait  $\psi(v)$  en prenant  $\tilde{v}$  comme valeur pour  $v$ ; pour tout  $a \in A$  et pour tout tuple de sommets  $\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_{\tau(a)}$ , il existe dans  $H$  un hyperarc étiqueté par  $a$  qui connecte  $\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_{\tau(a)}$ , et dans ce cas, il n'en existe qu'un seul, si et seulement si  $(\tilde{H}, \tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_{\tau(a)}) \models \text{EDG}_a(v_1, \dots, v_{\tau(a)})$ ; enfin, un sommet  $\tilde{v}$  est étiqueté par  $a$  si et seulement si  $(\tilde{H}, \tilde{v}) \models \text{LAB}_a(v)$ . L'application qui à  $\tilde{H}$  associe  $H$  s'appelle une *transduction d'hypergraphe*  $MS_1$ -définissable.

**Lemme 3.3.2** *Soit  $\tilde{H}$  un hypergraphe étiqueté sur  $V_H \cup E_H$  codant un revêtement de  $K$ ; alors  $\Gamma_{\bar{A}, \tilde{K}}$  est obtenu à partir de  $\tilde{H}$  par une transduction  $MS_1$ -définissable qui ne dépend que de  $H$ .*

*Idée de preuve.* On conserve les notations précédentes; pour tout élément  $a$  de  $A$ , on choisit un lacet simplicial  $\gamma_a$  dans  $K$  de point de base  $x_0$  qui représente  $a$ . On définit alors  $\Gamma_{\bar{A}, \tilde{K}}$  en  $\tilde{H}$  de la façon suivante : les sommets de  $\Gamma_{\bar{A}, \tilde{K}}$  sont les sommets de  $\tilde{H}$  qui sont étiquetés par  $x_0$ , i.e. la fibre de  $x_0$ . Cette condition est exprimable en logique monadique du second ordre, en fait, sans aucune quantification : les sommets de  $\Gamma_{\bar{A}, \tilde{K}}$  sont les éléments du domaine qui sont étiquetés par  $x_0$ .

Deux tels sommets  $\tilde{x}$  et  $\tilde{x}'$  sont alors connectés dans  $\Gamma_{\bar{A}, \tilde{K}}$  par un arc étiqueté par  $a$  s'il existe dans  $\tilde{H}$  un relèvement  $\tilde{\gamma}_a$  de  $\gamma_a$  qui les connecte. Cette propriété est exprimable en logique monadique du second ordre; la formule associée à l'adjacente relative à un élément  $a \in A$  doit mémoriser  $\gamma_a$  tout entier et contrôler l'existence d'un chemin entre  $\tilde{x}$  et  $\tilde{x}'$  qui est exactement étiqueté par les éléments de  $\gamma_a$ .

Nous avons codé la structure  $MS_1$  (cf. [Cou90b]) de  $\Gamma_{\bar{A}, \tilde{K}}$  en  $\tilde{H}$ . Notons que nous construisons ici une famille de formules qui dépend du choix de  $x_0$  et des  $\gamma_a$ .

□

Pour la suite, nous avons besoin du concept de *groupe hyperbolique au sens de Gromov* (cf. [Gro87, CDP90, GdlH90]). Pour ce faire, on se place dans le contexte des espaces *géodésiques*, i.e. espaces métriques dans lesquels tout couple de points est connecté par au moins une géodésique, un graphe connexe par exemple. Dans un tel espace, un triangle géodésique, i.e.

un triangle dont les côtés sont des géodésiques, sera dit  $\delta$ -fin pour une constante  $\delta \geq 0$  si chacun de ses côtés est dans le  $\delta$ -voisinage de l'union des deux autres. En ces termes, un espace géodésique sera dit *hyperbolique au sens de Gromov* s'il existe une constante  $\delta \geq 0$  telle que tout triangle géodésique est  $\delta$ -fin; les exemples les plus classiques sont les arbres qui sont des espaces 0-hyperboliques. Un groupe finiment présenté sera dit *hyperbolique au sens de Gromov* si son graphe de Cayley l'est; on montre que cette propriété ne dépend pas de l'ensemble de générateurs choisi (cf. [GdlH90, CDP90, Gro87]).

Ce concept s'insère naturellement dans notre travail en ceci qu'il généralise celui de graphe arborescent. De façon rigoureuse, les graphes arborescents ne sont en fait pas tous hyperboliques; il faut considérer la sous-classe des graphes *fortement arborescents* introduite page 20; il s'agit des graphes possédant une décomposition arborescente  $(U, f)$  de largeur finie (voir page 20) telle que pour tout  $i \in V_U$ , le sous-graphe engendré par les sommets de  $f(i)$  est connexe.<sup>2</sup> On montre qu'un graphe est fortement arborescent si et seulement si il est quasi-isométrique à un arbre. Par ailleurs, l'hyperbolicité au sens de Gromov est une propriété stable par quasi-isométrie, et les arbres sont des espaces hyperboliques au sens de Gromov. Il en résulte le résultat suivant :

**Proposition 3.3.8** *Les graphes fortement arborescents sont hyperboliques au sens de Gromov.*

Notons que dans le contexte des groupes, les forts éléments de symétrie impliquent que l'hyperbolicité au sens de Gromov se situe "entre" l'arborescence au sens fort et l'automatisme; les groupes hyperboliques étant fortement automatiques (cf. [ECH<sup>+</sup>92, GdlH90]).

**Lemme 3.3.3** *Un groupe finiment présenté est virtuellement libre si et seulement si il possède un graphe de Cayley fortement arborescent.*

*Preuve.*  $(\Rightarrow)$  est facile. Démontrons  $(\Leftarrow)$ . On remarque que si le graphe de Cayley d'un groupe  $G$  est fortement arborescent, alors par la proposition 3.3.8,  $G$  est hyperbolique au sens de Gromov; il est donc fortement automatique (cf. [ECH<sup>+</sup>92, GdlH90]). D'autre part, d'après [Sén92], un graphe déterministe automatique de largeur arborescente finie est context-free au sens de [MS85];  $G$  est donc virtuellement libre.

□

**Théorème 8** *Soit  $K$  une variété de dimension 3 fermée triangularisée, i.e. compacte sans bord, et  $p : \tilde{K} \rightarrow K$  un revêtement régulier. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (i)  $\tilde{K}$  est HR-équationnel.
- (ii)  $\tilde{K}$  est arborescente régulière.
- (iii)  $\tilde{K}$  est arborescente.
- (iv)  $\pi_1(K)/p_*(\pi_1(\tilde{K}))$  est virtuellement libre.

---

2. Il serait intéressant de connaître les conditions qui font qu'un graphe arborescent est fortement arborescent



*Idée de preuve.* (i)  $\Leftrightarrow$  (ii) est simplement la proposition 3.1.2. (ii)  $\Rightarrow$  (iii) est trivial. Pour démontrer (iii)  $\Rightarrow$  (iv), on montre que si  $\tilde{K}$  est arborescent au sens de la définition 10 alors le graphe de Cayley  $\Gamma_{\tilde{A}, \tilde{K}}$  est fortement arborescent; ce qui par le lemme 3.3.3 implique (iv).

Enfin, la démonstration de (iv)  $\Rightarrow$  (i) consiste à montrer que si  $\pi_1(K)/p_*(\pi_1(\tilde{K}))$  est virtuellement libre, alors, d'une part l'hypergraphe  $\tilde{H}$  codant  $\tilde{K}$  est définissable à isomorphisme près par une formule logique monadique du second ordre, et d'autre part, c'est un hypergraphe arborescent; ces deux propriétés impliquent alors que  $\tilde{K}$  est HR-équationnel (cf. [Cou90b]).

Supposons donc  $\pi_1(K)/p_*(\pi_1(\tilde{K}))$  virtuellement libre; on rappelle que le graphe de Cayley de  $\pi_1(K)/p_*(\pi_1(\tilde{K}))$  est isomorphe à  $\Gamma_{\tilde{A}, \tilde{K}}$ ; ainsi, ce dernier est en particulier un graphe context-free au sens de [MS85]; cela implique qu'il est définissable à isomorphisme près par une formule monadique du second ordre  $\xi_{\Gamma_{\tilde{A}, \tilde{K}}}$ . Nous savons d'autre part par le lemme 3.3.2 que  $\Gamma_{\tilde{A}, \tilde{K}}$  est relativement définissable en  $\tilde{H}$  et que  $\Gamma_{\tilde{A}, \tilde{K}}$  caractérise  $\tilde{K}$  à isomorphisme près en tant que revêtement de  $K$ . Cela implique que  $\tilde{H}$  est définissable à isomorphisme près par une formule logique  $\xi_{\tilde{K}}$ ;  $\xi_{\tilde{K}}$  est obtenue à partir de  $\xi_{\Gamma_{\tilde{A}, \tilde{K}}}$  en remplaçant les formules atomiques par les formules du schéma de définition de  $\Gamma_{\tilde{A}, \tilde{K}}$ . C'est le premier point. Le second consiste à établir que  $\tilde{H}$  est un hypergraphe arborescent.  $\Gamma_{\tilde{A}, \tilde{K}}$  est isomorphe au graphe de Cayley de  $\pi_1(K)/p_*(\pi_1(\tilde{K}))$  qui est virtuellement libre; cela implique en particulier que c'est un graphe connexe context-free au sens de [MS85]. On montre qu'un tel graphe est fortement arborescent. Considérons donc une décomposition fortement arborescente  $(U, f)$  de  $\Gamma_{\tilde{A}, \tilde{K}}$ ; elle va nous permettre de construire une décomposition fortement arborescente  $(\tilde{U}, \tilde{f})$  de  $\tilde{H}$ . D'abord, on pose  $\tilde{U} = U$ . Ensuite, on considère pour chaque  $x \in p^{-1}(x_0)$  le sous-ensemble  $V(x) \subset V_{\tilde{H}}$  constitué des sommets de  $\tilde{H}$  qui sont à distance de  $x$  inférieure à deux fois le diamètre du 1-squelette de  $K$ ; on montre que  $V_{\tilde{H}} = \bigcup_{x \in p^{-1}(x_0)} V(x)$ ; puis pour tout nœud  $\mu$  de  $\tilde{U}$ , on pose  $\tilde{f}(\mu) = \bigcup_{x \in f(\mu)} V(x)$ . Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que nous avons défini une décomposition fortement arborescente.

□

### Question :

*Le théorème 8 donne une caractérisation en termes de groupes des revêtements réguliers HR-équationnels; ce résultat a pu voir le jour grâce notamment à la bonne compréhension dans le cas des revêtements réguliers de l'action du groupe fondamental sur la fibre. Ceci étant, quelle est la situation dans le cas général, i.e. dans le cas des revêtements non nécessairement réguliers ?*

*Une autre question induite par théorème 8 est la suivante : Nous avons caractérisé en terme de grammaire de graphe la régularité au sens des revêtements dans le cas arborescent; peut-on traduire cette propriété de régularité dans toute sa généralité dans le contexte de la génération de graphes ?*