

THÈSE

PRÉSENTÉE À

L'UNIVERSITÉ BORDEAUX I

ÉCOLE DOCTORALE DE MATHÉMATIQUES ET D'INFORMATIQUE

Par Olivier Ly

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR

SPÉCIALITÉ : INFORMATIQUE

Etude algorithmique de complexes simpliciaux infinis

Soutenue le : 6 juillet 2000

Après avis des rapporteurs : D. B. A. Epstein
A. Slissenko

Devant la Commission d'examen formée de :

B. Courcelle	Professeur	Président
D. B. A. Epstein	Professeur	Rapporteur
E. Grädel	Professeur	Examineur
Ph. Narbel	Maître de conférence	Directeur
J.-E. Pin	Directeur de Recherche ...	Examineur
G. Sénizergues	Professeur	Directeur
A. Slissenko	Professeur	Rapporteur

— 2000 —

Je souhaite exprimer ma profonde gratitude envers ceux qui m'ont guidé dans ce travail : David Epstein, Philippe Narbel et Géraud Sénizergues. Je remercie David pour m'avoir reçu à Warwick, pour son aide précieuse, notamment en tant que rapporteur de ma thèse; je suis honoré de l'intérêt qu'il a porté à mon travail. Je remercie Philippe pour nos longues discussions au bord de l'eau, ses conseils, son soutien constant et son amitié. Ce que j'ai appris de Géraud est pour moi inestimable; je le remercie de m'avoir accepté comme élève et je ne cacherai pas la fierté que j'éprouve à exprimer ma gratitude envers lui.

Je remercie Bruno Courcelle pour ses conseils et ses remarques tout au long de ces années passées au LaBRI; je le remercie d'avoir accepté de présider le jury de ma thèse, qui n'aurait pu voir le jour sans ses travaux.

Je remercie Alexandre Zvonkin pour son soutien bienveillant, pour les nombreuses références bibliographiques qu'il m'a indiquées.

Je remercie Igor Rivin pour les conversations toujours déterminantes que j'ai pu avoir avec lui à Warwick.

Je remercie Erich Grädel et Jean-Eric Pin pour m'avoir fait l'honneur de participer au jury de thèse, ainsi qu'Anatol Slissenko, également membre du jury en tant que rapporteur; leurs conseils et leurs remarques m'ont beaucoup apporté.

Je voudrais souligner l'ambiance chaleureuse qui règne au LaBRI, il fait bon y apprendre tant le métier de chercheur que celui d'enseignant.

Je voudrais aussi confesser les nombreuses incantations aux dieux compteurs de bouchons auxquelles j'ai pu me livrer en compagnie de Cedric, Guillaume, Jeff, Benoît, Laurent, Pierre et bien d'autres.

Je remercie enfin tous mes sémaphores : mon père, ma mère, mon frère Nicolas, mon grand-père, mes grand-mères, Tru, Jean-Claude, Leslie, Claudine, Patrick, Chantal, Alain, Loïc, Guenaël, Hélène, Françoise, Marie-Christine, Michel, Richard, Olivier, Nicolas, Yann pour leur soutien sans faille.

Ma dernière pensée sera pour Irène à qui je dédie ce travail.

Table des matières

Introduction	1
1 Concepts de base	15
1.1 Polyèdres HR-équationnels	15
1.1.1 Complexes simpliciaux, polyèdres et hypergraphes	15
1.1.2 Hypergraphes HR-équationnels	17
1.1.3 Arborescence et régularité	19
1.1.4 Polyèdres HR-équationnels	22
1.2 Variétés	23
2 Surfaces HR-équationnelles	31
2.1 Surfaces non compactes sans bord et arborescence	31
2.1.1 Notion de bout	31
2.1.2 Théorème de Kerékjartó-Richards	33
2.1.3 Bouts, langages de mots infinis, arbres	34
2.1.4 Sommes connexes arborescentes	35
2.2 Régularité arborescente, algorithme	38
2.2.1 Surfaces HR-équationnelles et sommes connexes arborescentes	38
2.2.2 Espaces de dimension zéro de types finis	42
2.2.3 Régularité arborescente, algorithme	45
2.3 Exemples de surfaces non HR-équationnelles	46
2.4 Surfaces planaires à bord	50
2.4.1 Topologie florale	51
2.4.2 Classification des surfaces à bord planaires	64
2.4.3 Considérations algorithmiques	67
3 Arborescence et régularité en dimension 3	69
3.1 Variétés HR-équationnelles de dimension 3	69
3.1.1 Arborescence	69
3.1.2 Régularité	71
3.2 Rigidité des 3-variétés arborescentes	76
3.2.1 Groupe fondamental, revêtements	76
3.2.2 Variétés hyperboliques de dimension 3 arborescentes	77
3.2.3 Rigidité	82
3.3 Arborescence, régularité et groupes fondamentaux	90

3.3.1	Groupes fondamentaux de 3-variétés arborescentes	90
3.3.2	Logique monadique du second ordre, régularité et revêtements	94
4	Graphes automatiques	103
4.1	Graphes automatiques	103
4.2	Graphe des configurations d'une machine de Turing	106
4.3	Machines de Turing auto-stabilisantes	107
4.4	Indécidabilité du problème des bouts	109
4.5	<i>D0L</i> -systèmes de graphes et graphes automatiques	113
4.5.1	<i>D0L</i> -systèmes de graphes	113
4.5.2	Connexité dans les <i>D0L</i> -suites de graphes et bouts de graphes auto- matiques	115
4.5.3	Emulation des grammaires de remplacement de sommets	120
4.5.4	Annexe au chapitre 4	122
	Quelques questions	129

Introduction

Complexes simpliciaux, polyèdres et hypergraphes

L'étude développée dans ce mémoire se tient à l'interface de la topologie et de l'informatique théorique. Son objet central est le concept de *complexe simplicial* qui consiste à coder des objets topologiques au moyen de structures combinatoires.

Les objets en question, les *polyèdres*, sont des espaces topologiques fabriqués à la manière d'un jeu de construction en recollant entre eux des segments, des triangles, des tétraèdres, et plus généralement des objets appelés *simplexes*, qui généralisent les segments, triangles et tétraèdres aux dimensions supérieures¹.

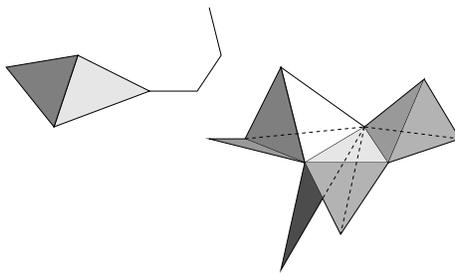


FIG. 1: *Polyèdres*

Ces objets sont de nature topologique: nous ne nous préoccupons ni des longueurs, ni des angles, ni de tout autre paramètre lié à la métrique. Deux polyèdres sont considérés comme équivalents s'ils sont *homéomorphes*²; c'est le cas par exemple si l'un s'obtient à partir de l'autre par une déformation continue; par exemple, une boule et un cube sont homéomorphes, mais une sphère et un tore ne le sont pas. En particulier, lorsque l'on fabrique un tel objet, on considère toujours deux segments quelconque comme équivalents, de même que deux triangles, ou deux tétraèdres; on s'autorise toujours à les recoller l'un sur l'autre.

Un polyèdre est donc un espace topologique que l'on peut décomposer en simplexes; une telle décomposition s'appelle une *triangularisation* du polyèdre; ce concept généralise la notion de triangularisation de surface, tout comme les simplexes généralisent les triangles. Une triangularisation est totalement décrite par un *hypergraphe*. Formellement, un hypergraphe est un ensemble de sommets V muni d'un ensemble E de parties finies de V ; les éléments de

1. cf. chapitre 1.1

2. deux espaces topologiques sont *homéomorphes* s'ils ont la même structure topologique, i.e. s'il existe un *homéomorphisme*, i.e. une bijection bi-continue, de l'un sur l'autre (cf. [HY61])

E sont appelés des hyperarêtes (cf. [Ber73, Ber87]). Notons que ce concept généralise celui de graphe non-orienté³ en ceci qu'un graphe non-orienté est un hypergraphe dont chaque hyperarête ne possède que deux sommets. Pour comprendre comment le concept d'hypergraphe apparaît naturellement pour le codage des polyèdres triangulés, considérons à titre d'exemple le polyèdre à cinq sommets obtenu en recollant deux tétraèdres sur deux de leurs faces (voir figure page 2); on décrit cet objet au moyen d'un hypergraphe à cinq sommets possédant deux hyperarêtes de quatre sommets chacune, avec trois sommets en commun. De

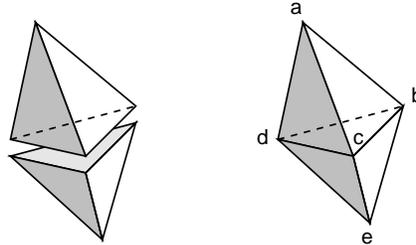


FIG. 2: Dans cette figure, nous avons schématisé le recollement de deux tétraèdres; le polyèdre obtenu est représenté dans la partie droite de la figure. Cet objet peut être codé par l'hypergraphe dont l'ensemble des sommets est $\{a, b, c, d, e\}$, qui possède deux hyperarêtes $\{a, b, c, d\}$ et $\{b, c, d, e\}$ qui codent les tétraèdres; les deux hyperarêtes ont trois sommets en commun: b, c et d , les sommets de la face commune aux deux tétraèdres.

façon générale, on décrit un polyèdre triangulé par un hypergraphe en considérant l'ensemble de ses sommets et en codant chaque simplexe par une hyperarête.⁴

Un complexe simplicial est un polyèdre triangulé muni d'un hypergraphe qui décrit sa triangularisation (cf. [HY61, FM97]). Dans notre travail, nous ne considérerons que des complexes simpliciaux faisant intervenir un nombre au plus dénombrable de simplexes⁵.

Le concept de complexe simplicial est naturel du point de vue de l'informatique théorique en ceci qu'il est inhérent à l'un de ses concepts fondamentaux: les graphes. Par définition, un graphe est un objet purement combinatoire³; cependant, dès lors que l'on veut s'en donner une représentation géométrique, par exemple le dessiner, on considère en fait le polyèdre qui lui est associé. Ainsi, le concept de complexe simplicial est sous-jacent à l'intuition géométrique usuelle des graphes.

De fait, il autorise par exemple une formalisation de la notion de planarité, omniprésente en théorie des graphes: un graphe est dit *planaire* si et seulement si le polyèdre qui lui est associé peut se plonger dans la sphère. Notons à cet égard que le concept de *carte*, qui tire ses origines dans le problème du codage des graphes planaires plongés dans la sphère (cf. [Cor75], [CM92]), coïncide, dans le cas des cartes à faces triangulaires, avec la notion de surface triangularisée au sens des complexes simpliciaux. Pour une étude systématique du

3. i.e. un ensemble de sommets muni d'un ensemble de paires de sommets (cf. [Ber83])

4. Le concept d'hypergraphe, classique en théorie des graphes, équivaut à celui de complexe simplicial abstrait (cf. [HY61]) à la condition d'hérédité près.

5. i.e. l'ensemble des simplexes intervenant dans une triangularisation est fini ou bien en bijection avec l'ensemble des entiers naturels.

INTRODUCTION
problème du plongement des graphes dans les surfaces, voir [GT87], dans le cas des cartes, voir [Mar97, Sch98].

Problème de l'homéomorphisme

L'introduction du concept de complexe simplicial au début du siècle par H. Poincaré [Poi00] se place dans une direction de recherche qui consiste à étudier les propriétés globales des espaces topologiques: la *topologie combinatoire*, ancêtre de la topologie algébrique (cf. [Da78]).

L'un des problèmes fondamentaux de ce domaine consiste à élaborer un algorithme pour décider si deux triangularisations représentent des polyèdres homéomorphes. On sait aujourd'hui qu'un tel algorithme n'existe pas en toute généralité (cf. [Mar58, Mas67, BHP68]). Néanmoins, nombre de travaux consistent à isoler des classes particulières de complexes simpliciaux pour lesquelles le problème de l'homéomorphisme possède une solution effective. C'est dans cette ligne que s'inscrit ce travail.

Durant les quinze dernières années, l'informatique théorique a vu naître plusieurs classes de graphes et d'hypergraphes infinis jouissant de propriétés algorithmiques importantes. Nous nous proposons de conjuguer ces travaux avec la topologie pour tenter d'apporter une contribution au problème de l'homéomorphisme des complexes simpliciaux *infinis*.

Les différents polyèdres auxquels nous nous intéresserons sont tous des *variétés*; c'est-à-dire que localement, ils ont une géométrie très simple, et leur complexité naît de leurs formes globales. Formellement, une variété est un espace topologique dont chaque point possède un voisinage homéomorphe à \mathbb{R}^n pour un entier n fixé que l'on appelle la dimension de la variété (cf. [BG87]). Nous ne considérerons dans notre travail que les variétés triangularisées⁶.

Les variétés sont présentes dans de nombreux domaines en mathématiques comme en physique. Par exemple, elles apparaissent souvent comme espaces de solutions d'équations différentielles. En dimension 3, ce concept correspond à l'intuition que nous avons de l'espace dans lequel nous vivons; notons à cet égard que la forme globale de l'univers au sens topologique du terme est l'objet de recherches actives (cf. [CW98]). Par ailleurs, étudier le problème de l'homéomorphisme pour le cas des variétés est une restriction raisonnable; en effet, cela permet de se dégager des considérations locales et de se concentrer sur la recherche de critères globaux.

En dimension 1, la situation est simple: toute variété est soit homéomorphe à un cercle, soit homéomorphe à une droite (cf. [Mil65]). Rappelons que l'on se borne à ne considérer que les complexes simpliciaux dont le nombre de simplexes est au plus dénombrable. Le problème général de l'homéomorphisme des polyèdres de dimension 1, i.e. les polyèdres formés uniquement de sommets et d'arêtes, est quasiment équivalent au problème de l'isomorphisme des graphes⁷; en particulier, dans le cas fini, il possède évidemment une solution effective; le cas des graphes infinis sera discuté par la suite.

6. Toute variété compacte de dimension inférieure ou égale à 3 est triangularisable. Ce n'est que récemment que des variétés de dimension 4 non triangularisables ont été découvertes.

7. à ceci près qu'il faut contracter les chaînes maximales de longueurs finies supérieures à 1 constituées d'arêtes ne contenant que des sommets de degré 2.

En dimension 2, le problème est plus compliqué, mais néanmoins totalement cerné dans le cas des complexes simpliciaux finis. Les variétés de dimension 2 formalisent le concept commun de surface; le plan, la sphère ou encore le tore en sont les exemples classiques. Les surfaces *compactes*, i.e. les surfaces obtenues en recollant un nombre fini de triangles, sont totalement classifiées, à homéomorphisme près, par deux paramètres: le *genre* et l'*orientabilité*. Une surface triangularisée est dite *orientable* si l'on peut associer à chacun de ses triangles une permutation circulaire de ses sommets de telle sorte que pour chaque arête de la triangularisation, les orientations induites par les permutations circulaires associées aux deux triangles dont elle est un côté, soient contraires (cf. [HY61, Mas67, RS72]). Par exemple, la sphère et le tore sont des surfaces orientables; les exemples classiques de surfaces non-orientables sont le célèbre ruban de Möbius, le plan projectif ou encore la bouteille de Klein. Ce concept est une version combinatoire de l'orientabilité au sens de la géométrie différentielle classique (cf. [BG87, Mal72]). Ensuite, le genre g d'une surface se calcule en fonction de la *caractéristique*

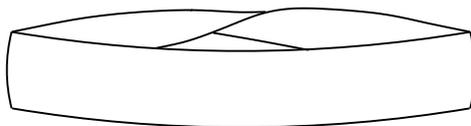


FIG. 3: *Le ruban de Möbius*

d'Euler χ , égale à la somme du nombre de triangles et du nombre de sommets d'une triangularisation à laquelle on retranche le nombre de ses arêtes; on montre que ce nombre ne dépend pas de la triangularisation en question (cf. [Mas67, HY61]); dans le cas d'une surface orientable, $g = 1 - \frac{1}{2}\chi$, dans le cas non-orientable $g = 2 - \chi$. Dans le cas orientable, g possède une interprétation géométrique agréable: c'est le nombre de "trous" dans la surface, ainsi une sphère est de genre 0, un tore de genre 1, etc... Ces deux critères sont calculables de façon effective à partir d'une triangularisation. Il existe donc un algorithme pour décider si deux surfaces compactes sont homéomorphes (cf. [Mas67]). En fait, on montre que cet algorithme s'étend au cas plus général des complexes simpliciaux finis de dimension 2; cela fait partie du folklore de la topologie simpliciale (cf. e.g. [FM97]).

Quant à la dimension 3, le problème est ouvert. Néanmoins, une méthode générale initiée par Poincaré⁸ consiste à tenter de réduire le problème de l'homéomorphisme à un problème d'isomorphisme de groupe; pour en donner les idées directrices, il nous faut introduire le concept de *groupe fondamentale*, notion centrale de la topologie algébrique.

Dans cette introduction, notre approche est informelle, pour une définition rigoureuse, voir chapitre 3.2.1 ou bien [HY61, Mas67, Rot88, Spa66]. Soit K un polyèdre et x_0 un point de K . On considère les lacets de K de point de base x_0 , i.e. les chemins continus dans K qui commencent et terminent en x_0 ; on ne s'intéresse à ces chemins qu'à déformation près, c'est-à-dire que l'on considère que deux chemins sont équivalents s'il existe une déformation continue qui transforme l'un en l'autre. On munit l'ensemble de ces lacets d'une loi de composition définie de la façon suivante: le produit de deux lacets γ_1 et γ_2 est le lacet obtenu en parcourant d'abord γ_1 puis γ_2 . On montre que cette loi de composition est compatible avec l'équivalence

8. Et E. Noether pour l'homologie

des lacets en ce sens que la classe d'équivalence du lacet obtenu en composant deux lacets donnés ne dépend que des classes d'équivalence des deux lacets en question; ainsi, l'ensemble des classes d'équivalence de lacets hérite aussi d'une loi de composition, et devient alors un groupe noté $\pi_1(K, x_0)$ que l'on appelle le *groupe fondamental* de K de point de base x_0 . On montre que la classe d'isomorphisme de ce groupe ne dépend pas du point de base.

Etudier l'ensemble des lacets d'un polyèdre donné vise, entre autre, à comprendre ses propriétés globales. Puisqu'on ne considère les lacets qu'à déformation près, deux polyèdres homéomorphes ont des groupes fondamentaux isomorphes; on dit que le groupe fondamental est un *invariant* de la structure topologique. Le problème est de savoir si la réciproque est vraie, i.e. si les propriétés topologiques qui sont codées dans la structure du groupe fondamental suffisent à caractériser les classes d'homéomorphisme. Si c'est le cas, le problème de l'homéomorphisme se réduit au problème de l'isomorphisme des groupes fondamentaux.

Cette méthode, qui vise *a priori* à donner des solutions effectives partielles au problème de l'homéomorphisme, permet aussi de montrer qu'en général, il est indécidable. On montre pour ce faire que tout groupe finiment présenté est le groupe fondamental d'une variété de dimension 4 [Mar58, BHP68]. Par ailleurs, le problème de l'isomorphisme des groupes finiment présentés est indécidable. Ces faits impliquent qu'il n'existe pas d'algorithme pour décider de l'homéomorphisme de deux variétés compactes en dimensions strictement supérieures à 3 (cf. [Mas67, Mar58, BHP68]).

Le cas de la dimension 3 est encore très énigmatique. En général, le groupe fondamental ne caractérise pas les classes d'homéomorphisme des variétés de dimension 3. On sait en effet que certaines d'entre elles, qui ont des groupes fondamentaux finis isomorphes, ne sont pas homéomorphes. Beaucoup d'efforts ont cependant été accomplis pour isoler des classes de variétés de dimension 3 qui sont caractérisées par leurs groupes fondamentaux. A cet égard, citons la fameuse conjecture de Poincaré qui affirme que toute variété de dimension 3 dont le groupe fondamental est trivial est homéomorphe à la sphère $S^3 = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid \|x\|_2 = 1\}$. La conjecture centrale de classification est la suivante : si deux variétés de dimension 3 compactes, sans bord et irréductibles⁹ ont des groupes fondamentaux infinis isomorphes, alors elles sont homéomorphes. Cette conjecture est vérifiée pour la classe des *variétés de Haken*¹⁰, i.e. les 3-variétés sans bord compactes orientables et irréductibles qui contiennent une surface incompressible⁹ [Wal68, Hei63]. Citons également le résultat de [Sco85] selon lequel une variété de dimension 3 compacte orientable et irréductible dont le groupe fondamental est infini et isomorphe à celui d'un *espace fibré de Seifert* lui est homéomorphe.

Une classe particulière de variétés s'est avérée fondamentale en ceci que pour elle, le problème de l'homéomorphisme possède une solution algorithmique, il s'agit des *variétés hyperboliques de volume fini*, i.e. les variétés munies de métriques hyperboliques complètes de volume fini⁹. Ces variétés sont caractérisées par leurs groupes fondamentaux, en ceci que deux telles variétés, dont les groupes fondamentaux sont isomorphes, sont *isométriques*; on dit qu'elles sont *rigides*. Mostow le démontre pour les variétés hyperboliques compactes de toutes dimensions [Mos68], ce résultat est généralisé aux variétés de volume fini dans [Pra73]. Cela étant, la solution au problème de l'homéomorphisme pour les variétés com-

9. voir chapitre 3

10. aussi appelées les variétés suffisamment grandes

0

pactes hyperboliques¹¹ repose sur l’algorithme de Sela [Sel95] de décision du problème de l’isomorphisme dans la classe des groupes hyperboliques au sens de Gromov sans torsion (cf. [GdlH90, Gro87, CDP90]), dont font partie les groupes fondamentaux des variétés hyperboliques compactes. Notons que les groupes hyperboliques au sens de Gromov jouissent de propriétés algorithmiques très importantes. Ils sont fortement automatiques, i.e. leurs structures peuvent être décrites de façon constructive au moyen de langages rationnels (cf. [Eps88, ECH⁺92] ou bien chapitre 4); ce résultat a été généralisé dans [BG96] au cas des groupes fondamentaux de variétés de dimension 3 satisfaisant la conjecture de Thurston (voir plus loin). Il en résulte en particulier que pour ces groupes, le problème du mot est décidable. On a en fait un résultat plus fort : l’algorithme de Makanin pour la résolution des équations dans le groupe libre (cf. [Mak80, Mak82]) a été étendu au cas des groupes hyperboliques au sens de Gromov (cf. [RS95]), ce qui constitue la première partie de la construction de l’algorithme de décision du problème de l’isomorphisme (cf. [Sel95]).

Outre la décidabilité du problème de l’homéomorphisme, la classe des variétés hyperboliques est fondamentale en ceci que la “plupart” des variétés de dimension 3 lui appartiennent, c’est le *théorème d’uniformisation de Thurston*¹² : les 3-variétés de Haken atoroidales⁹ sont hyperboliques. Notons que ce résultat s’inscrit dans un projet visant à établir la conjecture de Thurston selon laquelle toute variété de dimension 3 se décompose en morceaux géométrisables (cf. [Sco83, Thu82]).

Par ailleurs, beaucoup de travaux concernant la dimension 3 se sont développés ces dernières années dans une direction de recherche indépendante de la géométrie; c’est le cas de la théorie des *surfaces normales* (cf. [FM97]), qui a donné lieu notamment à un résultat fondamental : il existe un algorithme pour reconnaître la sphère de dimension 3 [Mat, FM97, Rub95]. Nous ne développerons pas ce point de vue dans ce mémoire.

Complexes simpliciaux infinis constructifs

Nous nous proposons d’étudier les propriétés algorithmiques de complexes simpliciaux infinis. Telle qu’elle est formalisée dans la thèse de Church, la notion d’algorithme appliquée à des objets infinis n’a, *a priori*, pas de sens. Pour remédier à cela, nous devons adopter un point de vue *constructif* qui consiste à considérer des objets infinis décrits eux-même par des algorithmes. Un complexe simplicial infini pourra par exemple être défini par deux algorithmes; l’un énumérera l’ensemble de ses sommets, donné par exemple sous la forme d’une suite d’entiers naturels et l’autre énumérera l’ensemble de ses simplexes sous la forme d’une suite d’ensembles finis de sommets. Un tel objet est donc décrit par une donnée finie, en l’occurrence, deux algorithmes; dans un cadre plus formel, on parlerait de machines de Turing. Ainsi, lorsque nous parlerons d’algorithmes prenant pour entrées des complexes simpliciaux infinis, c’est en fait à ces données auxquelles nous nous réfèrons.

Notons que la notion d’objets constructifs est très restrictive comme le montre l’argument qui suit : l’ensemble des complexes simpliciaux infinis n’est pas dénombrable alors que

11. notons qu’il résulte du résultat de Mostow que deux telles variétés sont homéomorphes si et seulement si elles sont isométriques.

12. en référence au théorème d’uniformisation de Riemann pour la dimension 2 (cf. [AS60])

l'ensemble des algorithmes l'est, il y a ainsi beaucoup plus de complexes simpliciaux non-constructifs que de complexes simpliciaux constructifs.

C'est cependant une classe trop large pour ce qui nous intéresse. Sans restriction aucune, il y a fort à parier que beaucoup de questions ayant trait aux complexes simpliciaux constructifs soient indécidables. Par exemple, on ne peut pas décider algorithmiquement si un complexe simplicial constructif au sens précédent est fini ou infini; c'est une conséquence immédiate de l'indécidabilité du problème de l'arrêt des machines de Turing.

La modélisation des schémas de programmes entre autre a fait apparaître, ces dernières années, plusieurs familles de graphes et d'hypergraphes infinis constructifs. Citons à titre d'exemples les graphes *context-free* au sens de [MS85], les *hypergraphes HR-équationnels* [Cou89, Cou90b], les graphes VR-équationnels [Bar], les graphes de transitions [Cau96], les graphes *automatiques* [CS, KN95, Pel97, Sén92], les graphes *rationnels* [Mor99], ou encore les graphes *autosimilaires* [Nar94]. Nous nous intéresserons en premier lieu, et en fait principalement, à la classe des hypergraphes HR-équationnels [Cou89, Cou90b] qui généralise celle des *graphes context-free* apparue dans [MS83, MS85]. Un hypergraphe HR-équationnel est décrit de façon constructive au moyen de ce que l'on appelle une *grammaire de remplacement d'hyperarcs* [DKA97, Cou90a, Cou90c]; ce concept, qui généralise les grammaires context-free, classiques en théorie des langages formels, consiste à définir des familles d'hypergraphes en les engendrant par applications successives de règles de remplacement d'hyperarcs. Plus précisément, définir une grammaire de remplacement d'hyperarcs consiste, tout d'abord, à se donner un ensemble fini de symboles que l'on appelle les symboles non-terminaux; de façon arbitraire, on en distingue un, que l'on appelle le symbole initial ou axiome; ensuite, on associe à chacun de ces symboles un hypergraphe fini dont certaines hyperarêtes sont étiquetées par des symboles non-terminaux. Considérons maintenant un tel hypergraphe; la transformation de cet hypergraphe, selon notre grammaire, consiste à supprimer chaque hyperarête étiquetée par un symbole non-terminal et recoller à sa place l'hypergraphe qui lui est associé. Une telle grammaire définit alors un hypergraphe infini de la façon suivante: on commence par considérer l'hypergraphe associé au symbole initial; ensuite, on lui applique la transformation décrite précédemment, on obtient alors un hypergraphe "plus gros" dont certaines hyperarêtes sont étiquetées par des symboles non-terminaux; en itérant cette opération, on obtient à l'infini, par limite inductive, un hypergraphe qui en général, est infini; un tel objet s'appelle un hypergraphe HR-équationnel¹³.

Ces hypergraphes sont en général de degré infini, ils généralisent les graphes context-free au sens de [MS83, MS85] en ceci que ces derniers sont exactement les graphes HR-équationnels de degré fini, i.e. chaque sommets n'appartient qu'à un nombre fini d'hyperarêtes et toutes les hyperarêtes ne contiennent que deux sommets.

Le concept d'hypergraphe HR-équationnel formalise l'idée de *régularité arborescente*. Pour comprendre cela, il faut se faire une idée plus précise de la forme globale d'un hypergraphe HR-équationnel; on montre qu'un tel objet est obtenu en recollant un nombre éventuellement infini d'hypergraphes finis, mais en nombre fini à isomorphisme près, agencés

13. La définition rigoureuse de ce procédé nécessite un formalisme qui sera introduit dans le chapitre 1. Le terme "équationnel" provient du fait que les hypergraphes équationnels peuvent être vus comme les solutions de systèmes d'équations dans un certain magma (cf. [Cou89, Cou96], voir aussi [Bar]); le terme "HR" signifie "hyperedge replacement".

le long d'un arbre infini régulier¹⁴; ils sont recollés entre eux le long des arêtes de l'arbre. L'arborescence provient du fait que les hypergraphes sont recollés suivant la forme d'un arbre et qu'ils sont en nombres finis à isomorphisme près; intuitivement, la forme globale du graphe reste proche de celle de l'arbre. La régularité provient du fait que l'arbre, considéré comme étiqueté par les hypergraphes finis en question, est un arbre régulier.

Au plan algorithmique, cette notion de régularité arborescente a des implications profondes: toute propriété exprimable dans le langage de la *logique monadique du second ordre* est décidable (cf. [Cou89, Cou90a]); c'est-à-dire qu'il existe un algorithme qui décide si un hypergraphe HR-équationnel donné satisfait ou non une propriété donnée, cette dernière étant exprimée au moyen d'une formule logique dont les quantifications ne se font que sur les ensembles de sommets et d'hyperarêtes. Ce résultat s'appuie sur les travaux de Rabin [Rab69] dans lesquels le concept de régularité évoqué plus haut est utilisé pour démontrer la décidabilité de la logique monadique du second ordre des arbres, ce résultat fut ensuite étendu dans [MS83, MS85] au cas des graphes context-free au sens de [MS83, MS85].

Comme corollaire, on peut par exemple décider de façon algorithmique si un hypergraphe HR-équationnel est connexe ou non (cf. [Cou89] ou bien chapitre 3); en effet, on montre que la propriété de connexité pour les hypergraphes peut s'exprimer par une formule de la logique monadique du second ordre. On montre également par cette méthode, et c'est là un résultat très fort, qu'il existe un algorithme pour décider si deux hypergraphes HR-équationnels sont isomorphes (cf. [Cou90b]).

La majeure partie de notre travail a consisté à étudier les polyèdres HR-équationnels i.e. les polyèdres possédant une triangularisation codée par un hypergraphe HR-équationnel, et plus particulièrement à chercher des solutions algorithmiques au problème de l'homéomorphisme associé.

C'est une généralisation du problème de l'isomorphisme qui, comme nous l'avons vu précédemment, est décidable pour le cas des graphes HR-équationnels: un polyèdre de dimension 1 est codé par un hypergraphe dont toutes les hyperarêtes possèdent exactement deux sommets, i.e. un graphe. Par ailleurs, par un procédé de contraction, effectif dans le cas HR-équationnel, on peut transformer ce graphe de sorte qu'il ne possède aucune chaîne maximale de longueur finie supérieure à 1 constituée d'arêtes ne contenant que des sommets de degré 2; on fabrique ainsi un codage canonique. On montre alors que deux polyèdres de dimension 1 sont homéomorphes si et seulement si les graphes associés sont isomorphes. Ainsi, le problème de l'homéomorphisme pour les polyèdres HR-équationnels de dimension 1 est décidable.

Nous avons essentiellement étudié le cas des complexes simpliciaux qui sont des triangularisations de variétés. Sachant que tout hypergraphe fini est HR-équationnel, tout complexe simplicial fini est HR-équationnel; la notion de variété HR-équationnelle apparaît alors comme une généralisation des variétés compactes; elle s'insère de manière d'autant plus satisfaisante que l'on montre que les *surfaces pointées*, i.e. une surface obtenue à partir d'une surface compacte en lui retirant un nombre fini de points, sont HR-équationnelles; dans le

14. i.e. un arbre qui ne possède qu'un nombre fini de sous-arbres à isomorphisme près ou de façon équivalente, le développement d'un automate à nombre fini d'états; ce concept généralise aux arbres celui de suite ultimement périodique (voir chapitre 1).

même esprit, on montre aussi que toute variété hyperbolique de volume fini possède une triangularisation HR-équationnelle. Notons bien qu'un hypergraphe HR-équationnel est en général infini; et le polyèdre qu'il code est en général non-compact.

Contributions

Surfaces

La première partie de notre travail concerne les surfaces HR-équationnelles sans bord, i.e. les surfaces sans bord qui possèdent des triangularisations codées par des hypergraphes HR-équationnels. Nous avons pu montrer que dans ce cas, le problème de l'homéomorphisme est décidable. Ce résultat s'appuie sur deux points: d'une part sur le théorème de classification des surfaces non compactes sans bord, et d'autre part sur la notion de régularité formalisée par le concept d'HR-équationnalité. Le théorème de classification, d'abord énoncé par Kérékjárto en 1923 et démontré complètement dans [Ric63], nous dit, essentiellement, qu'une surface non-compacte sans bord est caractérisée à homéomorphisme près par, outre son genre et son type d'orientabilité, *l'espace de ses bouts*, que l'on appelle aussi sa *frontière idéale*. Le concept de bout formalise l'idée de "chemin à l'infini"; une droite, par exemple à deux bouts, mais le plan n'en a qu'un seul, et un polyèdre compact n'en a pas du tout (cf. [AS60, Mas67] ou bien chapitre 2). Ce résultat n'a cependant rien d'effectif; le concept de surface HR-équationnelle apporte une solution algorithmique au problème. Il formalise une notion de régularité globale pour les surfaces non compactes dont nous donnerons deux autres caractérisations sur lesquelles la construction de l'algorithme s'appuie: premièrement en termes de sommes connexes, et ensuite, en terme d'espace des bouts.

Le procédé de somme connexe consiste à recoller deux surfaces en découpant dans chacune d'entre elles un disque et en recollant les bords restants entre eux. On montre que toute surface compacte qui n'est pas une sphère est homéomorphe à une somme connexe de tores et de plans projectifs (cf. figure 2.1.4 page 36, ou encore [Mas67]). Nous avons généralisé ce concept au cas non compact par un procédé que nous avons baptisé *somme connexe arborescente*; il s'agit d'une méthode de recollement de surface qui consiste à définir une surface non-compacte de la façon suivante: on se donne une infinité de surfaces compactes sans bord agencées selon les nœuds d'un arbre lui-même infini; puis on les recolle entre elles en faisant une somme connexe locale le long de chaque arête de l'arbre. Une relecture de la démonstration du théorème de classification montre que les surfaces sans bord non-compactes sont toutes obtenues par sommes connexes arborescentes de sphères, de tores et de plans projectifs. Ce résultat nous éclaire sur les différentes façons de coder une surface non-compacte; d'abord, en terme de triangularisation, cela montre que toute surface sans bord est codée par un hypergraphe de largeur arborescente borné au sens de [RS84], et ce, indépendamment de la surface en question. Ensuite, en terme de somme connexe, puisqu'il autorise le codage de toute surface par un arbre, objet *a priori* plus simple qu'un hypergraphe. On montre alors que les surfaces sans bord non-compactes HR-équationnelles sont les surfaces obtenues par sommes connexes arborescentes sur des arbres réguliers. Ainsi, les grammaires de remplacement d'hyperarcs décrivent les surfaces HR-équationnelles en termes de triangularisation, et les arbres réguliers les décrivent en terme de sommes connexes arborescentes.

La seconde caractérisation porte sur l'espace des bouts, elle s'énonce en terme d'*espaces*

de types finis au sens de Pierce (cf. [Pie72]). Un espace métrique de dimension 0 sera dit de type fini au sens de Pierce si l'ensemble de ses sous-ensembles, muni des opérations booléennes usuelles d'union, d'intersection, de complémentaire et d'ensemble vide, ainsi que des opérations topologiques d'adhérence et de dérivée, possède une sous-algèbre de cardinal fini; un tel espace est alors caractérisé à homéomorphisme près par la plus petite sous-algèbre de l'ensemble de ses parties. En ces termes, les surfaces HR-équationnelles sont exactement les surfaces dont les espaces de bouts sont des espaces de type fini au sens de [Pie72]. La démonstration de ce résultat est fondée sur un codage de l'espace des bouts d'une surface HR-équationnelle par le langage des chemins infinis d'un arbre régulier; ce codage est ensuite mis à profit au moyen d'une méthode initiée dans [Hea86] où il est démontré que les espaces de types finis au sens de [Pie72] sont exactement les clotures des langages rationnels.

Une surface non-compacte sans bord peut-être définie en terme de triangularisation, en terme de somme connexe arborescente ou encore en terme de frontière idéale. Nous avons caractérisé l'idée de régularité arborescente à ces trois niveaux; une surface HR-équationnelle peut être définie constructivement par une grammaire de remplacement d'hyperarc codant une triangularisation, ou bien par un arbre régulier codant une somme connexe arborescente, ou encore par une algèbre de cardinal fini codant sa frontière idéale. L'équivalence de ces trois caractérisations conduit alors, par une démonstration constructive, à l'élaboration d'un algorithme pour décider si deux surfaces non-compactes sans bord HR-équationnelles sont homéomorphes.

Par ailleurs, la caractérisation des surfaces sans bord HR-équationnelles en terme d'espaces de type finis nous a permis de construire des exemples de surfaces planaires sans bord non HR-équationnelles. De fait, nous en avons construit beaucoup; nous montrerons en effet que l'ensemble des classes d'homéomorphisme de surfaces planaires sans bord possède la cardinalité du continu.

Nous avons ensuite cherché à étendre ce résultat au cas des surfaces à bord. A cet égard, nous avons pu établir une extension du théorème de classification au cas des surfaces planaires à bord. Pour ce faire, nous avons été amenés à affiner l'invariant que constitue l'espace des bouts en lui donnant une structure additionnelle qui consiste en une partition dont les ensembles, appelés des *fleurs*, sont munis d'un ordre cyclique; cet espace de fleurs suffit alors à caractériser une surface planaire à bord.

Variétés de dimension 3

Pour ce qui concerne la dimension 3, dans le but d'élaborer un algorithme de décision pour le problème de l'homéomorphisme, nous avons suivi la méthode algébrique liée au groupe fondamental. Nous avons atteint une étape qui de notre point de vue est importante: l'idée d'arborescence nous a conduit à définir une famille de 3-variétés non compactes qui sont caractérisées, à homéomorphisme près, par leurs groupes fondamentaux.

Il s'agit des 3-variétés hyperboliques *arborescentes*; ces variétés sont obtenues en recollant une infinité de 3-variétés à bord compactes agencées selon les nœuds d'un arbre. Leurs structures hyperboliques sont conditionnées pour respecter l'idée de largeur arborescente adaptée au cas des espaces métriques triangularisés⁹. La construction de ces variétés suit l'idée des sommes connexes arborescentes; elles sont très proches des variétés HR-équationnelles, à ceci

près qu'elles ne respectent pas comme ces dernières de propriété de régularité globale. Les variétés hyperboliques arborescentes sont caractérisées à isométrie près par leurs groupes fondamentaux. Pour démontrer cela, nous nous baserons essentiellement sur deux résultats fondamentaux de la géométrie hyperbolique : le théorème de Sullivan [Sul79, Sul81] et le théorème de Thurston sur la compacité de l'espace de Teichmüller des variétés compactes de dimension 3 [Thu86]; le théorème de Sullivan nous dit qu'il suffit de montrer que toute équivalence d'homotopie entre deux variétés HR-équationnelles est homotope à une pseudo-isométrie; nous utilisons le théorème de Thurston pour établir un contrôle sur les longueurs des chemins représentants des éléments du groupe fondamental appartenant à une famille génératrice; ce qui nous permettra de fabriquer des pseudo-isométries. Nous ne développerons pas ce point dans cette introduction⁹.

Ce résultat conduit à l'étude des propriétés algorithmiques des groupes fondamentaux des variétés non-compactes HR-équationnelles. Une première remarque à ce propos est que ces groupes ne sont généralement pas finiment présentés, ni même finiment engendrés; ce qui *a priori* pose un problème du point de vue de l'effectivité. Nous montrerons comment il est cependant possible de définir, pour de tels groupes, des présentations infinies mais constructives, en ce sens qu'elles sont décrites en termes de langages rationnels, i.e. les générateurs et les relateurs sont donnés sous forme de mots de langages rationnels.

L'HR-équationnalité se traduit à un niveau plus global par le fait que ces groupes sont obtenus comme graphes infinis de groupes dont les supports sont des arbres infinis réguliers; ainsi, un tel groupe peut s'obtenir en disposant une infinité de groupes de variétés compactes, en nombre fini à isomorphisme près, le long d'un arbre régulier; et de faire des produits amalgamés le long des arêtes de l'arbre. Cela donne un autre moyen de définir ces objets de façon constructive. Notons que cette construction donne à penser qu'il est possible d'établir un concept de forme normale pour les éléments du groupe fondamental d'une variété HR-équationnelle; cela impliquerait la décidabilité du problème du mot, voire du problème de la conjugaison.

Nous poursuivrons ensuite l'exploration du groupe fondamental dans le contexte des variétés HR-équationnelles qui sont revêtements réguliers de variétés compactes. Nous pourrions voir que dans ce cas, si le problème du mot est décidable dans le groupe fondamental de la variété compacte, alors il devient décidable dans le groupe fondamental de la variété HR-équationnelle qui en constitue un revêtement; c'est le cas par exemple s'il l'on a affaire à des *groupes automatiques* [Eps88, ECH⁺92].

Par ailleurs, nous donnerons une caractérisation des revêtements réguliers HR-équationnels en terme de groupes : ce sont exactement ceux dont le graphe de Schreier est le graphe de Cayley d'un groupe virtuellement libre. La démonstration de cette équivalence nécessite de conjuguer différentes méthodes issues de domaines *a priori* éloignés : nous utiliserons d'une part les outils de la théorie des modèles et notamment un résultat profond selon lequel tout graphe de largeur arborescente fini qui est définissable à isomorphisme près par une formule de la logique monadique du second ordre est HR-équationnel (cf. [Cou90b]). D'autre part, nous utiliserons aussi les concepts de groupes context-free, de groupes automatiques et de groupes hyperboliques au sens de Gromov, ainsi que le résultat de [Sén92] selon lequel tout graphe déterministe automatique de largeur arborescente fini est HR-équationnel.

Graphes Automatiques

La dernière partie de ce mémoire traite des structures automatiques. Fort des résultats algorithmiques obtenus pour ce qui concerne les complexes simpliciaux HR-équationnels, il est naturel d'explorer les propriétés algorithmiques de complexes simpliciaux infinis décrits par des méthodes constructives plus générales. C'est dans cet esprit que nous avons abordé l'étude des *graphes automatiques* [BG00, CS, KN95, Pel97, Sén92].

Le principe des structures automatiques [KN95] consiste à considérer des structures relationnelles dont les domaines sont donnés sous forme de langages rationnels et dont les relations sont décrites par des automates. De fait, de multiples variations peuvent être envisagées, comme par exemple, les structures automatiques basées sur des langages d'arbres (voir [BG00]). La définition des relations laisse une grande liberté; on peut considérer de façon très générale des relations rationnelles, des transducteurs équilibrés (cf. [Sén92]), ou encore des automates lettres à lettres comme dans le cas des groupes automatiques.

Les graphes déterministes automatiques sont définissables à isomorphisme près par des formules de la logique monadique faible du second ordre (cf. [Sén92]). Ce résultat indique la façon dont les graphes automatiques s'insèrent dans la faune des graphes infinis: il montre en effet que les graphes déterministes automatiques de largeur arborescente fini sont exactement les graphes context-free au sens de [MS83, MS85] et donc, les graphes déterministes HR-équationnels. Cela étant, un graphe automatique n'est généralement pas de largeur arborescente finie. Ainsi, ce concept apparaît comme une généralisation forte de celui d'HR-équationnalité.

Comme nous l'avons vu dans le cas des surfaces, le concept de bout est essentiel pour l'investigation du problème de l'homéomorphisme. De fait, il constitue un critère classique pour comprendre le comportement d'un graphe à l'infini. Il apparaît donc raisonnable de chercher une méthode constructive d'appréhender l'espace des bouts. Nous avons vu précédemment que l'espace des bouts d'une surface HR-équationnelle peut être codé par un langage rationnel; la situation dans le cas des graphes automatiques est beaucoup moins favorable: la question de savoir si un graphe automatique possède un et un seul bout est indécidable. La démonstration de ce résultat s'appuie sur deux notions: d'une part le graphe des configurations d'une machine de Turing, qui code l'ensemble des calculs d'une machine donnée, c'est un graphe infini automatique, et d'autre part les machines de Turing auto-stabilisantes qui, lors de leurs fonctionnements, contrôlent elles-même la validité de leurs calculs. La preuve du résultat cité ci-dessus résulte alors de l'analyse de propriétés géométriques globales du graphe des configurations d'une machine de Turing autostabilisante¹⁵.

Ce résultat s'applique à deux autres domaines: la théorie combinatoire des groupes et la théorie des transformations de graphes.

D'une part, en vertu du théorème de Stallings [Sta68] (cf. aussi [DD89]), le calcul effectif du nombre de bouts intervient dans la recherche d'algorithmes pour décomposer les groupes finiment présentés en produits amalgamés ou en HNN-extensions sur des groupes finis. Les groupes automatiques, contiennent les groupe hyperboliques au sens de Gromov (cf. [Gro87, CDP90, GdlH90]), et ces derniers contiennent les groupes context-free au sens de [MS83, MS85]. Le Théorème de Stallings a été rendu effectif pour le cas des groupes context-free

15. voir chapitre 4

(cf. [Sén93, Sén96]¹⁶); on montre que cet algorithme peut être étendu au cas des groupes hyperboliques au sens de Gromov; en effet, le nombre de bouts d'un tel groupe est calculable (cf. [Ger99]). Par ailleurs, un logiciel a été développé pour calculer le nombre de bouts d'un groupe automatique (cf. [CB, Hol]); cependant, il n'est pas prouvé qu'il s'arrête dans le cas d'un groupe ne possédant qu'un seul bout; et identifier de façon algorithmique les groupes ne possédant qu'un seul bout demeure une question ouverte. De fait, le résultat cité plus haut montre que s'il l'on abandonne l'hypothèse de la structure de groupe, cette tâche est impossible.

D'autre part, ce résultat possède une interprétation significative en théorie des transformations de graphes. Nous établirons un lien entre les structures automatiques et les systèmes de substitution de graphes, i.e. les *DOL-systèmes*: toute suite de graphes finis produite en itérant un *DOL*-système est exactement la suite des sphères d'un graphe automatique; la réciproque est vraie pour une large classe de graphes automatiques que nous définirons par la suite. Il apparaît alors que l'indécidabilité du problème des bouts d'un graphe automatique est équivalente à l'indécidabilité de la question de savoir si tous les graphes d'une *DOL*-suite sont connexes ou non. Ce résultat contribue à identifier la frontière de décidabilité du problème de connexité en question puisque les *DOL*-systèmes de graphes, tels que nous les avons définis, émulent les grammaires de remplacement de sommets (cf. [ER97, CER93, CE95]), pour lesquelles le problème de la connexité est décidable.

16. voir aussi [MS83, MS85, FSS89] pour une étude algorithmique des groupes context-free

Bibliographie

- [AS60] L. W. Ahlfors and L. Sario. *Riemann Surfaces*. Princeton University Press, 1960.
- [Bar] K. Barthelmann. When can an Equational Simple Graph be generated by Hyperedge Replacement. preprint.
- [Bea83] A. F. Beardon. *The Geometry of Discrete groups*. Springer-Verlag, 1983.
- [Ber73] C. Berge. *Graphes et hypergraphes*. Bordas, 1973.
- [Ber83] C. Berge. *Graphes*. Gauthier-Villars, 3ème édition edition, 1983.
- [Ber87] C. Berge. *Hypergraphes, combinatoire des ensembles finis*. Bordas, 1987.
- [Ber90] M. Berger. *Géométrie*. Fernand Nathan, 1990.
- [BG87] M. Berger and B. Gostiaux. *Géométrie différentielle : variétés, courbes et surfaces*. P.U.F. Mathématiques, 1987.
- [BG96] M.R. Bridson and R.H. Gilman. Formal language theory and the geometry of 3-manifolds. *Comment. Math. Helv.*, 4:525–555, 1996.
- [BG00] A. Blumensath and E. Grädel. Automatic structures. In *LICS'2000*, 2000.
- [BHP68] W. Boone, W. Haken, and V. Poenaru. On Recursively Unsolvble Problems in Topology and Their Classification. In H. Schmidt, K. Schutte, and H. J. Thiele, editors, *Contribution to Mathematical Logic*. North-Holland Pub. Co., 1968.
- [BN80] L. Boasson and M. Nivat. Adherences of Languages. *Journal of Computer and System Sciences*, 20:285–309, 1980.
- [Can84] J.W. Cannon. The combinatorial structure of cocompact discrete hyperbolic groups. *Geom. Dedicata*, 16(2):123–148, 1984.
- [Cau96] D. Caucal. On infinite transition graphs having decidable monadic theory. In *ICALP'96 - LNCS*, volume 1099, pages 194–205, 1996.
- [CB] A. Clow and S. Billington. Recognizing Two-Ended and Infinitely Ended Automatic Groups. Computer Program, Warwick University - UK (1999).

- [CDP90] M. Coornaert, T. Delzant, and A. Papadopoulos. *Géométrie et Théorie des Groupes - Les groupes hyperboliques de Gromov*, volume 1441 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, 1990.
- [CE95] B. Courcelle and J. Engelfriet. A logical characterization of the sets of hypergraphs defined by hyperedge replacement grammars. *Math. Syst. Theory*, 28(6):515–552, 1995.
- [CER93] B. Courcelle, J. Engelfriet, and G. Rozenberg. Handle Rewriting Hypergraph Grammars. *JCSS*, 46:218–270, 1993.
- [CM92] R. Cori and A. Machi. Maps, hypermaps and their automorphisms: a survey. *Expositiones Math.*, 10:403–467, 1992.
- [Cor75] R. Cori. *Un code pour les graphes planaires et ses applications*, volume 27 of *Astérisque*. Société mathématique de France, 1975.
- [Cou83] B. Courcelle. Fundamental Properties of Infinite Trees. *Theoretical Computer Science*, 25:95–169, 1983.
- [Cou89] B. Courcelle. The Monadic Second-order Logic of Graphs II: Infinite Graphs of Bounded Width. *Math. Syst. Theory*, 21:187–221, 1989.
- [Cou90a] B. Courcelle. Graph Rewriting: An algebraic and Logic Approach. In *Handbook of Theoretical Computer Science vol. B*, Van Leeuwen J. editor. Elsevier Science Publishers, 1990.
- [Cou90b] B. Courcelle. The Monadic Second-order Logic of Graphs IV: Definability Properties of Equational Graphs. *Annals of Pure and Applied Logic*, 49:193–255, 1990.
- [Cou90c] B. Courcelle. The monadic second-order logic of graphs. I: Recognizable sets of finite graphs. *Inf. Comput.*, 85(1):12–75, 1990.
- [Cou96] B. Courcelle. Basic Notions of Universal Algebra for Language Theory and Graph Grammars. *TCS*, 163:1–54, 1996.
- [Cou97] B. Courcelle. The Expression of Graph Properties and Graph Transformations in Monadic Second-Order Logic. In G. Rozenberg, editor, *Handbook of Graph Grammars and Computing by Graph Transformation*, volume 1. World Scientific, 1997.
- [CS] A. Carbone and S. Semmes. A graphic apology for symmetry and implicitness. Preprint.
- [CW98] N.J. Cornish and J.R. Weeks. Measuring the Shape of the Universe. *Notices of the AMS*, 45(11):1463–1471, 1998.

- [Da78] J. Dieudonné and al. *Abrégé d'histoire des mathématiques 1700 - 1900*, volume 2. Hermann, 1978.
- [DD89] W. Dicks and M.J. Dunwoody. *Groups Acting on Graphs*, volume 17 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, 1989.
- [DDL82] M. De Does and A. Lindenmayer. Algorithms for the Generation and Drawing of Maps Representing Cell Clones. In *GGACS'82*, volume 153 of *Lect. Notes in Comp. Sci.*, pages 39–57. Springer-Verlag, 82.
- [DKA97] F. Drewes, H.-J. Kreowski, and Habel A. Hyperedge Replacement Graph Grammars. In G. Rozenberg, editor, *Handbook of Graph Grammars and Computing by Graph Transformation*, volume 1. World Scientific, 1997.
- [ECH⁺92] D.B.A. Epstein, J.W. Cannon, D.F. Holt, S.V.F. Levy, M.S. Paterson, and W.P. Thurston. *Word processing in groups*. Jones and Bartlett, 1992.
- [Eps88] D.B.E. Epstein. Computer, Groups and Hyperbolic Geometry. *Astérisque Soc. Math. France*, 163-164:9–29, 1988.
- [ER97] J. Engelfriet and G. Rozenberg. Node Replacement Graph Grammars. In G. Rozenberg, editor, *Handbook of Graph Grammars and Computing by Graph Transformation*, volume 1. World Scientific, 1997.
- [Feu73] C.D. Feustel. A generalisation of Kneser's conjecture. *Pacific J. of Math.*, 46:123–130, 1973.
- [FM97] A.T. Fomenko and S.V. Matveev. *Algorithmic and Computer Methods for Three-Manifolds*. Mathematics and its Applications. Kluwer Academic Publishers, 1997.
- [FSS89] C. Frougny, J. Sakarovitch, and P. E. Schupp. Finiteness Conditions on Subgroups and Formal Languages Theory. *Proc. London Math. Soc. (2)*, 58:74–88, 1989.
- [GdlH90] E. Ghys and P. de la Harpe. *Sur les groupes hyperboliques d'après Mikhael Gromov*, volume 83 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser, 1990.
- [Ger99] V. Gerasimov. Detecting Connectedness of the Boundary of a Hyperbolic Group. Preprint, 1999.
- [Gro87] M. Gromov. *Essays in group theory - Hyperbolic groups*, pages 75–263. Math. Sci. Res. Inst. Publ., 1987.
- [GT87] J.L. Gross and T.W. Tucker. *Topological Graph Theory*. Wiley Intersci. Series in Discrete Mathematics. John Wiley and Sons, 1987.
- [Gur85] Y. Gurevitch. Monadic Second-Order Theories. In J. Barwise and Feferman; S., editors, *Model Theoretic Logic*. Springer, 1985.
- [Hal64] R. Halin. Über Unendliche Wege in Graphen. *Math. Ann.*, 157:125–137, 1964.

- [Hea86] T. Head. The Topological Structure of Adherences of Regular Languages. *Informatique théorique et Applications*, 20(1):31–41, 1986.
- [Hei63] W. Heil. On P^2 -irreducible 3-manifolds. *Bull. AMS*, 75:772–775, 1963.
- [Hem76] J. Hempel. *3-Manifolds*, volume 86 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, 1976.
- [Hol] D. F. Holt. The Warwick Automatic Group Software. preprint.
- [HU79] J.E. Hopcroft and J.D. Ullman. *Introduction to Automata Theory, Languages and Computation*. Addison-Wesley Publishing Company, 1979.
- [HW41] W. Hurewicz and H. Wallman. *Dimension Theory*. Princeton University Press, 1941.
- [HY61] J. G. Hocking and G. S. Young. *Topology*. Addison-Wesley series in Mathematics. Addison-Wesley, 1961.
- [Jac77] W. Jaco. *Lectures on Three-Manifold Topology*, volume 43 of *Conference board of the mathematical sciences regional conference series in mathematics*. AMS, 1977.
- [Joh95] K. Johannson. *Topology and Combinatorics of 3-Manifolds*, volume 1599 of *Lecture notes in Mathematics*. Springer, 1995.
- [KN95] B. Khoussainov and A. Nerode. Automatic Presentations of Structures. In *Logic and Computational Complexity (Indianapolis, IN, 1994)*, volume 960 of *Lecture Notes in Comput. Sci.*, pages 367–392. Springer, Berlin, 1995.
- [LdR96] R. Lassaigne and M. de Rougemont. *Logique et Complexité*. Collection Informatique. Hermes, 1996.
- [Lin86] A. Lindenmayer. An Introduction to Parallel Map Generating Systems. In *GGACS'86*, volume 291 of *Lect. Notes in Comp. Sci.*, pages 27–40. Springer-Verlag, 1986.
- [LR78] A. Lindenmayer and G. Rozenberg. Parallel generation of maps: developmental systems systems for cell layers. In *GGACS'78*, volume 73 of *Lect. Notes in Comp. Sci.*, pages 301–316. Springer-Verlag, 1978.
- [LS77] R. C. Lyndon and P. E. Schupp. *Combinatorial Group Theory*. Springer, 1977.
- [Ly99] O. Ly. On Effective Decidability of the Homeomorphism Problem for Non-Compact Surfaces. *Contemporary Mathematics - Amer. Math. Soc.*, 250:89–112, 1999.
- [Mak80] G. S. Makanin. Equations on a free semigroup. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Helsinki, 1978)*, pages 263–268. Acad. Sci. Fennica, Helsinki, 1980.

- [Mak82] G. S. Makanin. Equations in a free group. *Izv. Akad. Nauk SSSR*, 46(6):1199–1273, 1982.
- [Mal72] P. Malliavin. *Géométrie différentielle intrinsèque*. Enseignement des sciences. Hermann, 1972.
- [Mar58] A. A. Markov. In *Proceedings of International Congress of Mathematicians*, pages 300–306, 1958.
- [Mar97] M. Marcus. *Cartes, hypercartes et diagramme de cordes*. PhD thesis, Bordeaux I, 1997.
- [Mas67] W. S. Massey. *Algebraic Topology: An Introduction*, volume 56 of *Graduate Text in Mathematics*. Springer, 1967.
- [Mas87] B. Maskit. *Kleinian Groups*, volume 287 of *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*. Springer-Verlag, 1987.
- [Mat] S. V. Matveev. The J. H. Rubinstein - A. Thompson algorithm for recognition of S^3 . Preprint.
- [McM62] D. R. Jr. McMillan. Some Contractible Open 3-Manifolds. *T.A.M.S.*, 102:373–382, 1962.
- [McM96] C. T. McMullen. *Renormalization and 3-manifolds which fiber over the circle*, *Annals of Mathematics Studies*. 142. Princeton Univ. Press, 1996.
- [Mil65] J.W. Milnor. *Topology from the Differentiable Viewpoint*. The University Press of Virginia, 1965.
- [Mil82] J. Milnor. Hyperbolic Geometry: the first 150 years. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 6(1):9–24, 1982.
- [MKS66] W. Magnus, A. Karrass, and D. Solitar. *Combinatorial Group Theory*. NY: Wiley, 1966.
- [Mor99] C. Morvan. On rational graphs. In *FOSSACS'99*, 1999.
- [Mos68] G. D. Mostow. Quasi-conformal mappings in n -space and the rigidity of hyperbolic space forms. *Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math.*, 34:53–104, 1968.
- [MS83] D.E. Muller and P.E. Schupp. Groups, the theory of ends, and context-free languages. *J. Comput. System Sci.*, 1983.
- [MS85] D. E. Muller and P. E. Schupp. The theory of ends, pushdown automata, and second-order logic. *Theoretical Computer Science*, 37:51–75, 1985.
- [MT98] K. Matsuzaki and M. Taniguchi. *Hyperbolic Manifolds and Kleinian Group*, *Oxford Mathematical Monograph*. Clarendon Press, Oxford, 1998.

- [Nar93] P. Narbel. *Limits and Boundaries of Word and Tiling Substitutions*. PhD thesis, Paris 7, 1993.
- [Nar94] P. Narbel. Geometrical *OL* Systems coming from tilings of the plane. In G. Rozenberg and A. Salomaa, editors, *Developments in Language Theory*, volume 28, pages 237–249. World Scientific, 1994.
- [Pap94] C.H. Papadimitriou. *Computational Complexity*. Addison-Wesley Publishing Company, 1994.
- [Pel97] L. Pelecq. *Isomorphisme et automorphismes des graphes context-free, équationnels et automatiques*. PhD thesis, Bordeaux I, 1997.
- [Pey81] J. Peyrière. Processus de naissance avec interaction des voisins, évolution de graphes. *Ann. Inst. Fourier, Grenoble*, 31(4):181–218, 1981.
- [Pey86] J. Peyrière. Frequency of patterns in certain graphs and in Penrose tilings. *Journal de Physique*, 47:41–61, 1986.
- [Pie72] R. S. Pierce. *Compact Zero-Dimensional Metric Space of Finite Type*, volume 130 of *Memoir of the AMS*. Amer. Math. Soc., 1972.
- [Poi00] H. Poincaré. Second complément à l'Analysis Situs. *Proc. London Math. Soc.*, 32:277–308, 1900.
- [Pra73] G. Prasad. Strong Rigidity of \mathbb{Q} -rank 1 Lattices. *Invent. Math.*, 21:255–286, 1973.
- [Rab69] M. O. Rabin. Decidability of Second-Order Theories and Automata on Infinite Trees. *Trans. A.M.S.*, 141:1–35, 1969.
- [Rat94] J.G. Ratcliffe. *Foundations of Hyperbolic Manifolds*, volume 149 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, 1994.
- [Ric63] I. Richards. On The Classification of Non-Compact Surfaces. *Trans. of the AMS*, 106:259–269, 1963.
- [Rog67] H. Jr Rogers. *Theory of Recursive Functions and Effective Computability*. Series in Higher Mathematics. McGraw-Hill, 1967.
- [Rot88] J.J. Rotman. *An Introduction to Algebraic Topology*, volume 119 of *G.T.M.* Springer-Verlag, 1988.
- [Roz97] G. Rozenberg. *Handbook of Graph Grammars and Computing by Graph Transformation*, volume 1. World Scientific, 1997.
- [RS72] C.P. Rourke and B.J. Sanderson. *Introduction to Piecewise-Linear Topology*. Springer-Verlag, 1972.
- [RS80] G. Rozenberg and A. Salomaa. *The Mathematical Theory of L-Systems*. Academic Press, 1980.

- [RS84] N. Robertson and P. Seymour. Some New Results on the Well-Quasi Ordering of Graphs. *Annals of Discrete Math.*, 23:343–354, 1984.
- [RS95] E. Rips and Z. Sela. Canonical representatives and equations in hyperbolic groups. *Invent. Math.*, 120:489–512, 1995.
- [Rub95] J.H. Rubinstein. An Algorithm to Recognize the 3-Sphere. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Zürich*, 1995.
- [Sak99] M. Sakarovitch. Revêtements d’automates. Notes de cours - LANFOR’99, 1999.
- [Sch98] G. Schaeffer. *Conjugaison d’arbres et cartes combinatoires aléatoires*. PhD thesis, Bordeaux I, 1998.
- [Sco73] G. P. Scott. Compact Submanifold of 3-manifolds. *J. London Math. Soc. (2)*, 7:246–250, 1973.
- [Sco83] P. Scott. The geometries of 3-manifolds. *Bull. London Math. Soc.*, 15:401–487, 1983.
- [Sco85] P. Scott. Homotopy implies Isotopy for some Seifert fibred Spaces. *Topology*, 24:341–351, 1985.
- [Sel95] Z. Sela. The isomorphism problem for hyperbolic groups. I. *Ann. of Math. (2)*, 1995.
- [Sén92] G. Sénizergues. Definability in weak monadic second-order logic of some infinite graphs. In *Dagstuhl seminar on Automata theory: Infinite computations. Wadern, Germany*, volume 28, pages 16–16, 1992.
- [Sén93] G. Sénizergues. An effective version of Stallings’ theorem in the case of context-free groups. In *ICALP’93*, pages 478–495. Lect. Notes Comp. Sci. 700, 1993.
- [Sén96] G. Sénizergues. On the finite Subgroups of a Context-Free Group. *Dimacs series in Disc. Math. and Theo. Comp. Sci.*, 25, 1996.
- [Spa66] E. Spanier. *Algebraic Topology*. McGraw-Hill, NY, 1966.
- [Sta68] J.R. Stallings. On torsion-free groups with infinitely many ends. *Ann. of Math.*, 88:312–334, 1968.
- [Sul79] D. Sullivan. The density at Infinity of a Discrete Group of Hyperbolic Motions. *publ. Math. I.H.E.S.*, 1979.
- [Sul81] D. Sullivan. On the ergodic theory at infinity of an arbitrary discrete group of hyperbolic motions. *Riemann surfaces and related topics: Proceedings of the 1978 StonyBrook Conference, Ann. of Math. Stud.*, 1981.
- [Tho] W. Thomas. Langage, Automata and Logic. In *Handbook of formal Languages vol. 3: Beyond Words*.

- [Tho90] W. Thomas. Automata on Infinite Objects. In Van Leeuwen, editor, *Handbook of Theoretical Computer Science*, volume B. Elsevier, 1990.
- [Tho00] W. Thomas. Recognizability of graphs by homomorphism. PROCOPE - Bordeaux, 2000.
- [Thu79] W.P. Thurston. The Geometry and Topology of 3-Manifolds. Note de Cours - Princeton, 1979.
- [Thu82] W.P. Thurston. Three dimensional manifolds, kleinian groups and hyperbolic geometry. *Bull. Am. Math. Soc., New Ser.*, 6:357–379, 1982.
- [Thu86] W. P. Thurston. Hyperbolic structures on 3-manifolds i: Deformation of acylindrical manifolds. *Ann. Math., II. Ser.*, 124:203–246, 1986.
- [Thu97] W.P. Thurston. *Three-dimensional geometry and topology.*, volume 1 of *Princeton Mathematical Series*. Princeton University Press, 1997.
- [Wal68] F. Waldhausen. On Irreducible 3-Manifolds which are sufficiently large. *Ann. of Math. (2)*, 87:56–88, 1968.
- [Whi35] J. H. C. Whitehead. A certain Open Manifold whose Group is Unity. *Quart. J. Math. (2)*, 6:268–279, 1935.
- [Whi39] J. H. C. Whitehead. Simplicial spaces, nuclei and m-groups. *Proc. of London Math. Soc.*, 45:243–327, 1939.