

Quelques questions

Nous proposons ici quelques questions pour baliser les développements futurs des travaux présentés dans ce mémoire. Nous reprenons les problèmes posés au fil du texte, et nous donnons des directions de recherche d'ordre plus général, notamment pour ce qui concerne les graphes infinis.

Topologie et géométrie

Surfaces

Rappelons que toute surface sans bord peut être codée par un arbre comme somme connexe arborescente (voir chapitre 2).

- Caractériser l'homéomorphisme de surface sans bord en terme de système de réécriture de termes (voir page 38). Il semble que l'on peut construire des systèmes de réécriture de termes qui codent des homéomorphismes de surfaces définis par des transformations locales; en existe-t-il un qui est noëthérien et confluent ?
- Caractériser les classes d'homéomorphismes de surfaces sans bord par des formules de la logique monadique du second ordre. Un pas significatif consisterait à montrer que les décompositions en sommes connexes arborescentes de sphères, de plans projectifs et de tores sont définissables.
- Existe-t-il un algorithme pour le problème de l'homéomorphisme des surfaces à bord planaires simplement connexes (voir chapitre 2.4.3).
- Etablir une classification générale des surfaces à bord. Dans les cas précédents, la notion de largeur arborescente a joué un rôle important : les surfaces sans bord et les surfaces à bord planaires possèdent toutes des triangularisations de largeur arborescente finies. Cela semble faux dans le cas général; néanmoins, l'étude du cas des surfaces de largeur arborescente fini pourrait constituer une restriction raisonnable.

Variétés de dimension 3

- Quelles sont les surfaces incompressibles plongées dans une 3-variété arborescente? Quelles sont les différentes décompositions arborescentes d'une telle 3-variété? En existe-t-il des pri-

vilégiées (canonique), en quel sens ?

- La 3-variété non compacte présentée page 74 est-elle arborescente ?
- Les 3-variétés possédant un cœur compact au sens de [Sco73] sont-elles HR-équationnelles ? Même question pour celles qui possèdent une structure hyperbolique de volume fini ?
- On peut affaiblir la condition d'arborescence hyperbolique (définition 13) en imposant aux M_i (les morceaux élémentaires de la décomposition) d'être seulement de volume fini ; le théorème 7 reste-il valide dans ce cas ?
- Le théorème 7 reste-t-il valide si l'on suppose que seulement l'une des deux variétés hyperboliques est acylindriquement arborescente ?
- Existe-t-il une topologie raisonnable sur l'espace de Teichmüller d'une variété de dimension 3 arborescente ?
- Le théorème de Mostow (cf. [Mos68]) et le théorème de Sullivan (cf. [Sul79, Sul81]) sont valides en dimensions supérieures ou égales à 3 ; qu'en est-il du théorème 7 ?

Théorie combinatoire des groupes

• Le théorème 7 a mis en exergue une nouvelle classe de groupes que nous avons décrit dans chapitre 3.3 : les groupes fondamentaux des variétés hyperboliques arborescentes. En général, ces groupes ne sont pas finiment présentés, néanmoins, ils présentent un caractère constructif (voir chapitre 3.3) qui prend tout son sens dans le cas HR-équationnel par exemple. On peut considérer la hiérarchie suivante de groupes, dont la complexité est croissante :

- (i) Produits libres infinis de groupes hyperboliques au sens de Gromov.
- (ii) Produits amalgamés infinis de groupes hyperboliques au sens de Gromov.
- (iii) Arbres infinis régulier de groupes hyperboliques au sens de Gromov.
- (iv) Graphes infinis arborescents de groupes hyperboliques au sens de Gromov.

On pose alors les questions classiques de la théorie combinatoire des groupes :

- a) Formes normales.
- b) Problème du mot, problème de la conjugaison.
- c) Structures automatiques (en quel sens?..).
- d) Systèmes d'équations infinis mais constructifs.

POUR CE QUI CONCERNE LES GROUPES HYPERBOLIQUES AU SENS DE GROMOV, QUI SONT LES BRIQUES ÉLÉMENTAIRES QUI SERVENT À NOS CONSTRUCTIONS, CES QUESTIONS ONT TOUTES REÇU DES RÉPONSES POSITIVES.

- Le théorème 8 donne une caractérisation en termes de groupes des revêtements réguliers HR-équationnels; ce résultat a pu voir le jour notamment grâce à la bonne compréhension dans le cas des revêtements réguliers de l'action du groupe fondamental sur la fibre. Ceci étant, quelle est la situation dans le cas général, i.e. dans le cas des revêtements non nécessairement réguliers?
- Une autre question induite par théorème 8 est la suivante: nous avons caractérisé en terme de grammaire de graphe la régularité au sens des revêtements dans le cas arborescent; peut-on traduire cette propriété de régularité dans toute sa généralité dans le contexte de la génération de graphes?
- Ces questions sont liées à la notion de reconnaissance de graphes et d'hypergraphes par homomorphismes qui consiste à définir le langage des graphes qui s'envoient homomorphiquement sur un graphe fixé (cf. [Tho00]). On peut limiter cette idée à la reconnaissance de graphes et d'hypergraphes par revêtement; cela semble très restrictif. Néanmoins, une notion de reconnaissance située "entre" les homomorphismes et les revêtements pourrait s'avérer féconde au plan algorithmique.

Théorie des graphes

On considère la hiérarchie de graphes infinis suivante: arbres réguliers, graphes context-free, graphes équationnels, graphes automatiques. Le point de vue est un peu grossier sachant que les inclusions sont vraies pour les graphes déterministes, et d'autre part, la définition de l'automaticité pour un graphe n'a pas encore atteint un état définitif.

- Comparer des différentes définitions de l'automaticité.

Du point de vue algorithmique, il nous semble intéressant d'introduire l'hypothèse d'hyperbolicité au sens de Gromov (cf [Gro87, CDP90, GdlH90]). Les graphes automatiques hyperboliques au sens de Gromov généralisent strictement les graphes déterministes context-free. Par ailleurs, les groupes hyperboliques au sens de Gromov, qui sont fortement automatiques (cf. [Can84, ECH⁺92]), jouissent de propriétés algorithmiques très importantes (cf. e.g. [GdlH90, RS95, Sel95]).

- Nous avons pu montrer que pour les graphes automatiques, le problème des bouts est indécidable; par ailleurs, l'étude présentée dans le chapitre 2 montre que le problème des bouts pour les graphes context-free est décidable; d'autre part, pour les groupes hyperboliques, le problème des bouts est aussi décidable (cf. [Ger99]). Qu'en est-il pour ce qui concerne les graphes automatiques qui sont hyperboliques au sens de Gromov?

- Pour les graphes de largeur arborescente finie, la définissabilité des classes d'isomorphisme de graphes par des formules logiques monadiques du second ordre est équivalente à l'HR-équationnalité (cf. [Cou90b]). Elle exprime donc dans ce cas un concept de régularité globale.

Les graphes automatiques déterministes sont définissables à isomorphisme près par des formules de la logique monadique faible du second-ordre (cf. [Sén92]). Il semble fort probable qu'il existe des graphes non automatiques mais néanmoins définissables par des formules de la logique monadique du second ordre. Ainsi, pour les graphes déterministes, l'automaticité exprime une idée de régularité globale plus restrictive que la définissabilité. Néanmoins, pour les graphes déterministes de largeur arborescente bornée, l'automaticité et la définissabilité coïncident, elles définissent toutes deux les graphes équationnels déterministes (cf. [Sén92]).

Qu'en est-il pour les graphes hyperboliques au sens de Gromov?

- Existe-t-il des classes de graphes situées "entre" les graphes context-free et les graphes automatiques hyperboliques pour lesquelles la logique monadique du second ordre est décidable? Notons qu'elle est indécidable en général pour les graphes automatiques hyperboliques (cf. [Pel97]). En quoi cette question est-elle liée avec la conjecture selon laquelle les groupes hyperboliques sont les groupes automatiques qui n'ont pas \mathbb{Z}^2 comme sous-groupe?

- On déduit des résultats du chapitre 4.5 que certains graphes automatiques peuvent être construits par limites inductives de *DOL*-suites de graphes finis. Néanmoins, les *DOL*-systèmes forment une classe très large de transformations de graphes, il semble qu'en ce qui les concernent, beaucoup de problèmes soient indécidables. Pour les graphes HR-équationnels, la situation est plus favorable : les réécritures d'hyperarcs suffisent. Que peut-on dire dans le cas des graphes automatiques hyperboliques?

Par ailleurs, Epstein propose l'étude suivante. Les graphes automatiques hyperboliques donnent naissance à un concept d'espace métrique compact constructif; un tel espace est défini comme le bord d'un graphe hyperbolique automatique (cf. e.g. [GdlH90]). On montre par exemple que les complexes simpliciaux finis ont cette propriété. Dès lors, plusieurs questions se posent :

- Donner des exemples d'espaces constructifs et aussi d'espaces non constructifs.
- Quelles opérations préservent la constructivité? (recollement d'espaces constructifs sur des sous-espaces constructifs, produits d'espaces constructifs...)
- Notion d'application continue constructive?
- Quelle sont les propriétés calculables? (connexité, dimension, distance...)