

SLE et au delà

le point de vue d'un physicien

Michel Bauer

Institut de physique théorique de Saclay
et
Laboratoire de physique théorique de l'École normale supérieure

LABRI, Bordeaux, le 27 janvier 2010

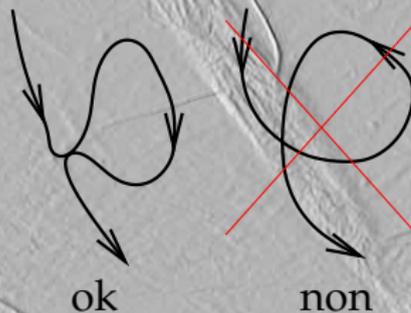
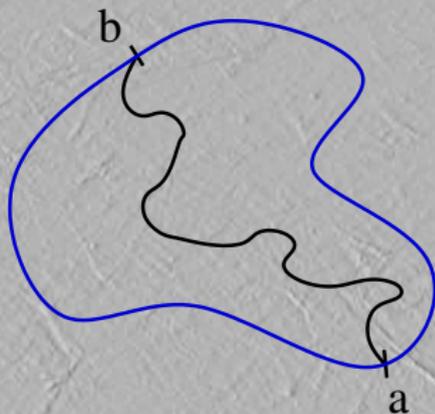


Plan

1. SLE, c'est quoi ?
2. Hors du point critique

Un SLE (chordal), c'est quoi ?

C'est une famille de mesures de probabilité $\mu_{\mathbb{D},a,b}$ sur les courbes sans croisements dans un domaine (= ouvert simplement connexe) \mathbb{D} de \mathbb{C} , reliant a à b (a, b sont sur $\partial\mathbb{D}$).



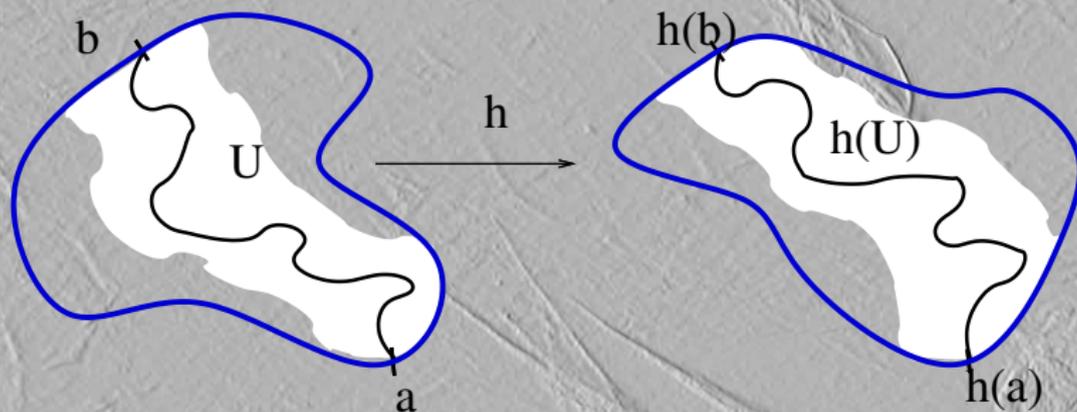
SLE (chordal) est caractérisé par :

1. L'invariance conforme
2. La propriété de Markov de domaine

Invariance conforme

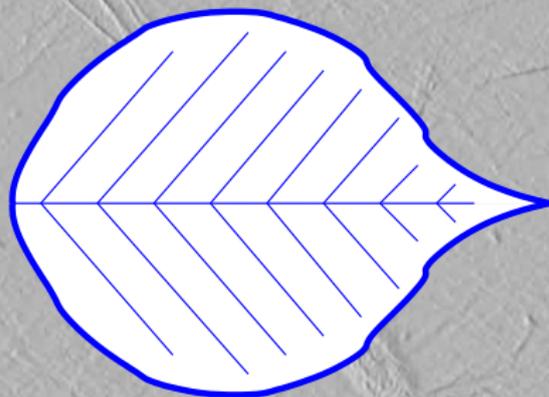
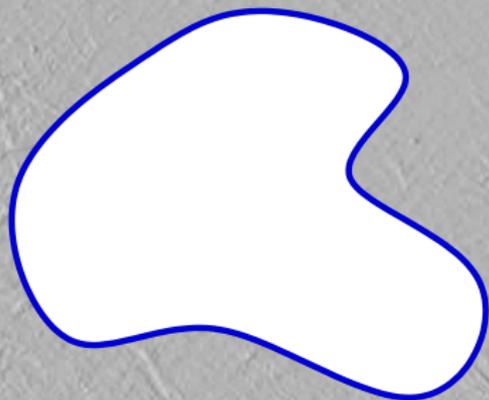
Si h est une transformation conforme, $h : \mathbb{D} \rightarrow h(\mathbb{D})$ alors

$$\mu_{\mathbb{D},a,b} \circ h^{-1} = \mu_{h(\mathbb{D}),h(a),h(b)}$$



Rappel : théorème de Riemann

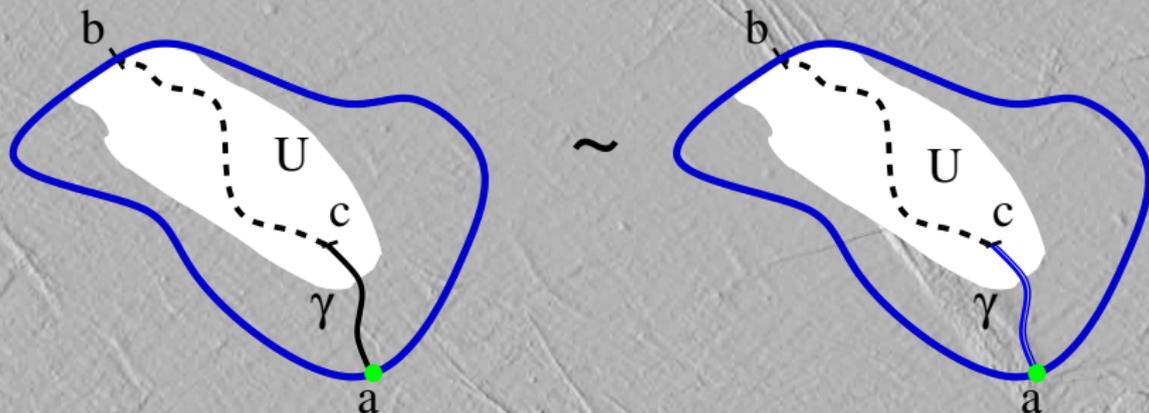
Tous les domaines (= ouverts sans trous de \mathbb{C}) sont conformément équivalents.



Mieux : tous les domaines avec deux points marqués sur le bord (\mathbb{D} , a , b) sont conformément équivalents.

Propriété de Markov de domaine

$$\mu_{\mathbb{D}, a, b}(\bullet | \gamma_{[ac]}) = \mu_{\mathbb{D} \setminus \gamma_{[ac]}, a, c}(\bullet).$$



(Remarque : la propriété de Markov de domaine a aussi un sens pour des courbes sur un réseau discret)

L'équation de Loewner

L'équation différentielle

$$\frac{dZ(t)}{dt} = \frac{2}{Z(t)}, \quad Z(0) = z \in \mathbb{H} = \{w, \operatorname{Im} w > 0\}$$

décrit les trajectoires du champs de vecteur $v(z) = 2/z$. Ce champ de vecteur est tangent à l'axe réel, sauf en 0 où il est singulier. À cause de cette singularité, des points sortent de \mathbb{H} .

$$\begin{aligned} K_{[0,t]} &\equiv \text{ensemble des points sortis de } \mathbb{H} \text{ entre } 0 \text{ et } t \\ &= \{2is, s \in [0, \sqrt{t}]\} : \text{segment de droite .} \end{aligned}$$



Attention, $K_{[0,t]}$ n'est pas une trajectoire !

L'équation de Loewner

Plus généralement, l'équation différentielle

$$\frac{dZ(t)}{dt} = \frac{2}{Z(t) - \xi_t}, \quad Z(0) = z \in \mathbb{H},$$

où ξ_t est une fonction réelle de t donnée, décrit les trajectoires du champ de vecteur $v(z) = 2/(z - \xi_t)$. Ce champ de vecteur est tangent à l'axe réel, sauf en ξ_t où il est singulier. À cause de cette singularité, des points sortent de \mathbb{H} .

$K_{[0,t]} \equiv$ ensemble des points sortis de \mathbb{H} entre 0 et t

Si ξ_t est assez lisse, $K_{[0,t]}$ est une courbe, et réciproquement, toute courbe partant du bord de \mathbb{H} a **son** ξ_t .

Le tour de passe-passe de Schramm

- ▶ Par invariance conforme, pour connaître $\mu_{\mathbb{D},a,b}$ en général, il suffit de connaître $\mu_{\mathbb{H},0,\infty}$.
- ▶ Par l'équation de Loewner, se donner $\mu_{\mathbb{H},0,\infty}$ équivaut à se donner une loi pour ξ_t , i.e. un processus aléatoire.
- ▶ Propriété de Markov de domaine + Invariance conforme

\Leftrightarrow

Il existe une constante $\kappa \geq 0$ telle que $\xi_t = \sqrt{\kappa}B_t$ où B_t est un Brownien standard.

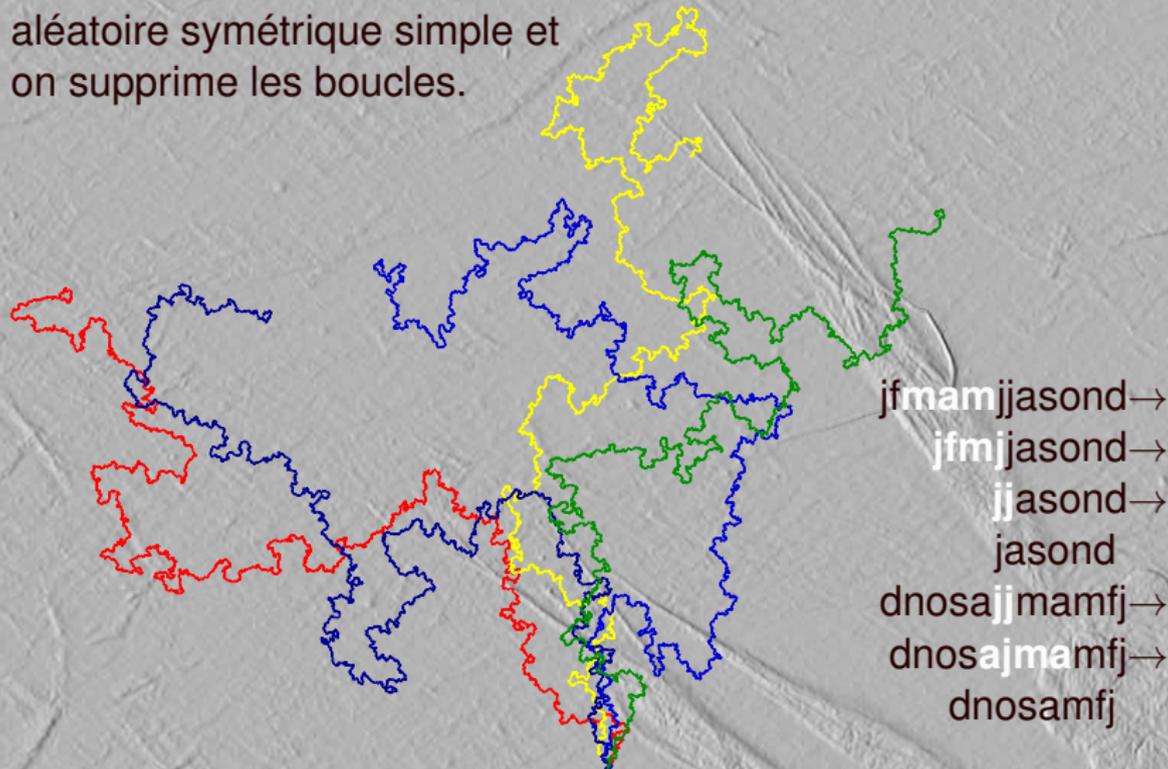
Remarque : pris séparément, on ne sait pas tirer grand chose de l'invariance conforme et de la propriété de Markov de domaine.

Motivations

1. De nombreuses courbes discrètes (=le long de liens d'un réseau de maille ϵ) à deux dimensions sont sans croisements et ont la propriété de Markov de domaine,
2. Des preuves garantissent (ou des arguments de physique suggèrent) que la limite continue $\epsilon \rightarrow 0^+$ existe et qu'elle est invariante d'échelle/conforme.
 - ▶ Marches autoévitantes $\rightarrow \text{SLE}_{\kappa=8/3}$: certitude, mais même l'existence d'une limite continue est une conjecture inabordable.
 - ▶ Marches à boucles effacées $\rightarrow \text{SLE}_{\kappa=2}$: théorème.
 - ▶ Percolation $\rightarrow \text{SLE}_{\kappa=6}$: théorème.

Motivations : les marches à boucles effacées

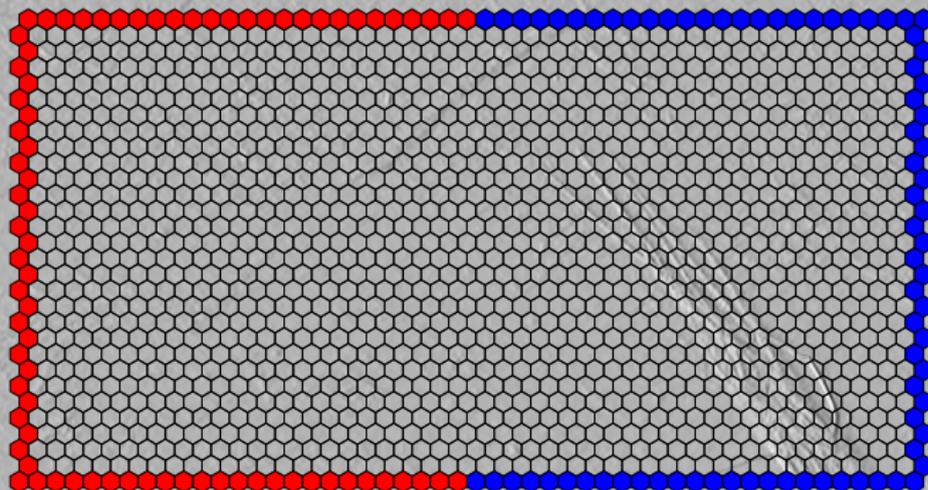
Sur le réseau, on fait une marche aléatoire symétrique simple et on supprime les boucles.



Limite continue : maille du réseau $\epsilon \rightarrow 0^+$

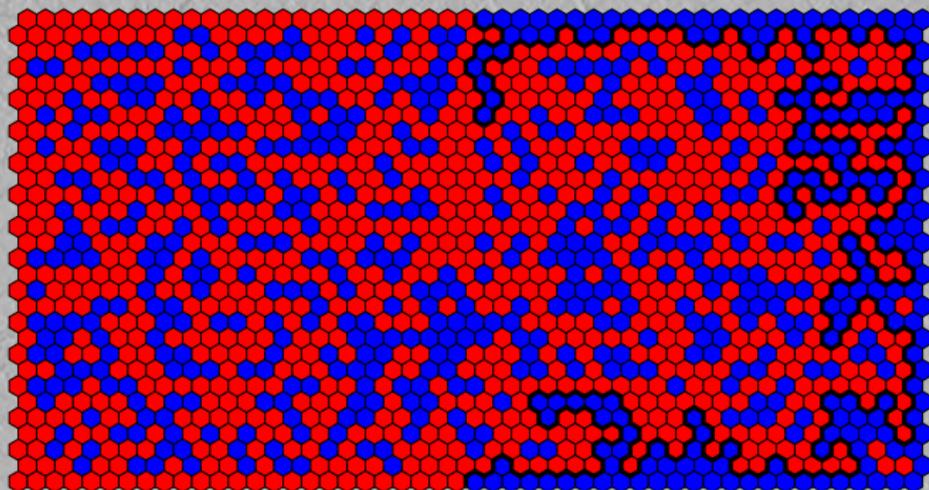


Motivations : la percolation



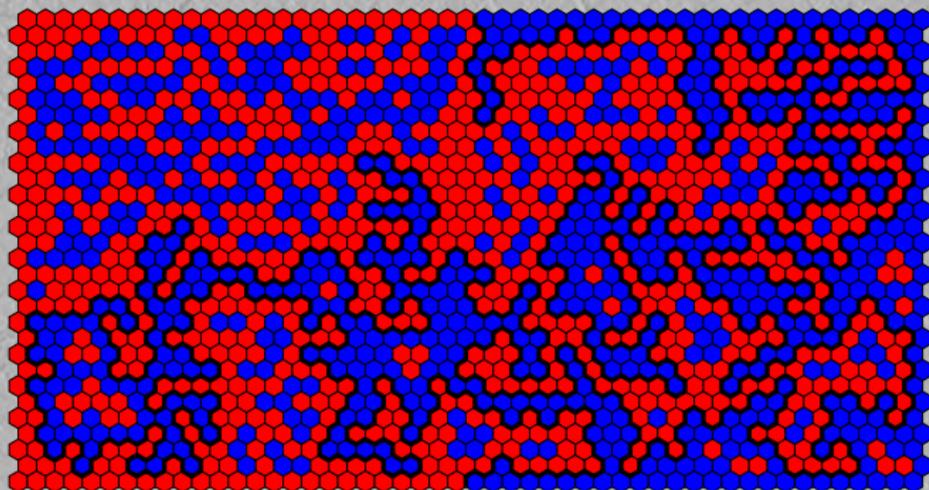
- ▶ On colorie le bord d'un morceau du réseau hexagonal,
- ▶ Les couleurs des hexagones interne sont des Bernoulli, iid $(p, 1 - p)$
- ▶ Toute configuration contient une interface
- ▶ Limite continue : ajuster $p = p_c$ et faire $\epsilon \rightarrow 0^+$.

Motivations : la percolation



- ▶ On colorie le bord d'un morceau du réseau hexagonal,
- ▶ Les couleurs des hexagones interne sont des Bernoulli, iid $(p, 1 - p)$ $p = .6$
- ▶ Toute configuration contient une interface
- ▶ Limite continue : ajuster $p = p_c$ et faire $\epsilon \rightarrow 0^+$.

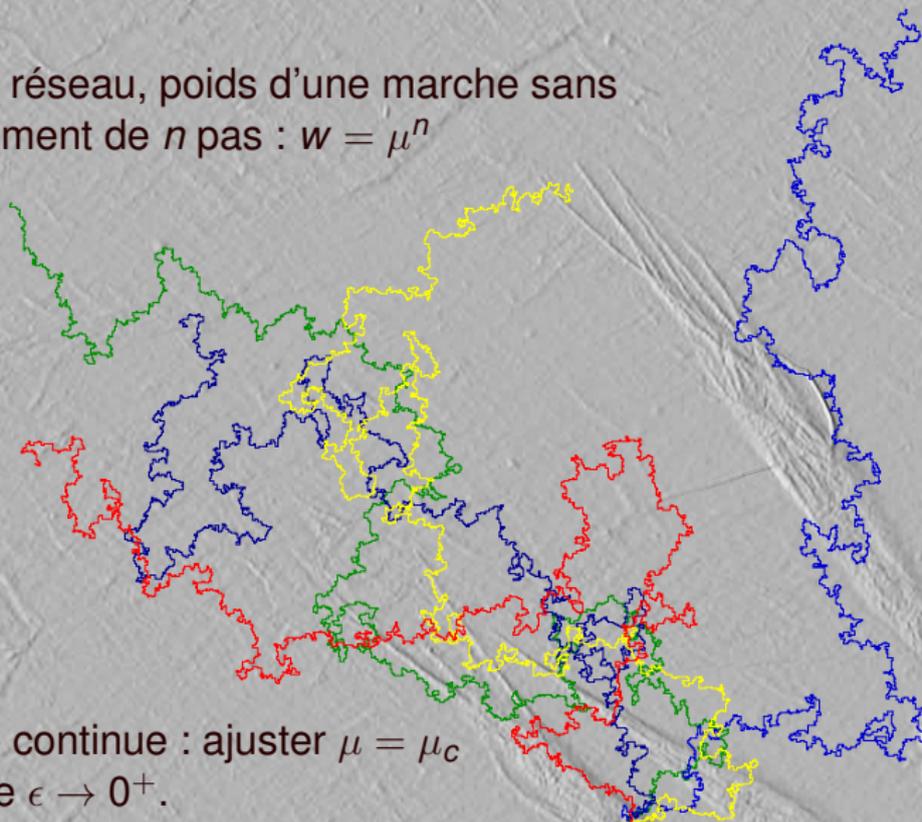
Motivations : la percolation



- ▶ On colorie le bord d'un morceau du réseau hexagonal,
- ▶ Les couleurs des hexagones interne sont des Bernoulli, iid $(p, 1 - p)$ $p = .5$ ($= p_c$ pour le réseau hexagonal)
- ▶ Toute configuration contient une interface
- ▶ Limite continue : ajuster $p = p_c$ et faire $\epsilon \rightarrow 0^+$.

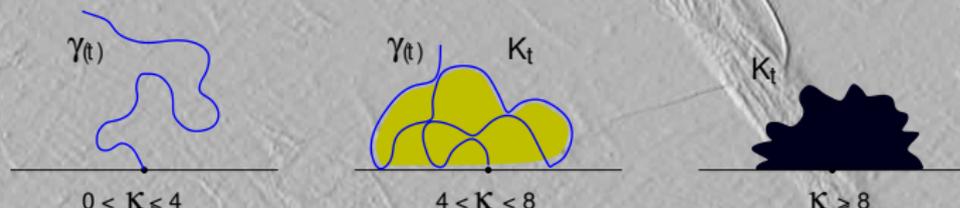
Motivations : les marches autoévitantes

Sur le réseau, poids d'une marche sans
croisement de n pas : $w = \mu^n$



Limite continue : ajuster $\mu = \mu_c$
et faire $\epsilon \rightarrow 0^+$.

- ▶ Grâce à SLE, de nombreux calculs sur les (limites continues de) courbes aléatoires $2d$ deviennent des problèmes (des exercices de routine ?) de calcul stochastique
 - ▶ Dimension de Hausdorff de SLE_κ : $\min(2, 1 + \kappa/8)$
 - ▶ Les transitions :



- ▶ Applications inattendues : intersections de Browniens, etc
- ▶ Exploite à fond l'absence d'échelle de longueur intrinsèque.

Sortir du point critique

Il est fréquent que les modèles combinatoires dépendent d'un paramètre g qu'il faut ajuster pour avoir une limite continue

- ▶ Percolation : $p = p_c$,
- ▶ Marche autoévitante : $\mu = \mu_c$.

On peut aussi "inventer" des paramètres

- ▶ Marches à boucles effacées : on remplace par exemple la marche aléatoire simple par une marche avec un poids λ par pas : $\lambda = \lambda_c^-$.
- ▶ Percolation : on pourrait ajouter un poids pour chaque pas
- ▶ Etc

Sortir du point critique

On obtient souvent une mesure limite non triviale en ajustant $g \rightarrow g_c$, $\epsilon \rightarrow 0^+$ mais $|g - g_c|^\delta \epsilon^{-1} \rightarrow \Gamma$ (**limite finie**) pour un exposant δ bien choisi.

- ▶ Marches à boucles effacées : il faut $\sim \epsilon^{-2}$ pas à la marche aléatoire simple pour se déplacer sur une distance macroscopique, donc $(\lambda/\lambda_c)^{\epsilon^{-2}}$ doit être d'ordre 1 d'où $\delta = 1/2$.
- ▶ Marches autoévitantes : la dimension de $\text{SLE}_{8/3}$ est $4/3$, donc (si la conjecture de convergence est vraie) il faut $\sim \epsilon^{-4/3}$ pas à une marche autoévitante pour se déplacer d'une longueur macroscopique, "donc" $(\mu/\mu_c)^{\epsilon^{-4/3}}$ doit être d'ordre 1 d'où $\delta = 3/4$.
- ▶ Percolation : $(p - p_c)^{4/3} \sim \epsilon$ d'où $\delta = 4/3$. (Rq : cet exposant non trivial est relié à la dimension fractale de l'ensemble des points pivot).

Sortir du point critique

Remarques :

- ▶ La mesure limite $\mu_{\mathbb{D},a,b}^{\Gamma}$ sur les courbes dépend de Γ , $\Gamma = 0$ est le cas critique,
- ▶ Γ^{-1} définit une échelle de longueur dans le système.

On ne peut plus rêver d'invariance conforme (les dilatations changent Γ),

- ▶ On peut considérer un g qui dépend du site, et obtenir un $\Gamma(z, \bar{z})$ à la limite continue
- ▶ Comprendre la mesure pour un $\Gamma(z, \bar{z})$ arbitraire, dans un domaine fixé équivaut à comprendre tous les domaines.

Comment se compare $\mu_{\mathbb{D},a,b}^{\Gamma}$ à $\mu_{\mathbb{D},a,b} \equiv \mu_{\mathbb{D},a,b}^0$?

- ▶ Même dimension fractale des courbes
- ▶ Des (contre-)exemples à l'absolue continuité

Peut-on dire quelque chose sur le processus de Loewner associé à $\mu_{\mathbb{H},0,\infty}^{\Gamma}$

- ▶ Quelques exemples

Paramétrisation naturelle de SLE

Le paramètre t de l'équation de Schramm-Loewner n'est pas du tout la limite continue du nombre de pas sur le réseau :

- ▶ Lien aléatoire de type « escalier du diable aléatoire »

Comment définir directement pour SLE dans le continu une paramétrisation « naturelle » \Leftrightarrow nombre de pas sur le réseau ?

- ▶ Existence démontrée (pour κ pas trop grand pour l'instant)
- ▶ Généralisations de la notion de temps local
- ▶ Décomposition de Doob-Meyer d'une sous-martingale liée à la dimension de Hausdorff des courbes

Paramétrisation naturelle de SLE

On peut alors définir $\int d^2z \Gamma(z, \bar{z}) L_\omega(z, \bar{z})$ où $\int_A d^2z L_\omega(z, \bar{z})$ est la longueur de la courbe dans la région A .

- ▶ $d\mu_{\mathbb{D},a,b}^\Gamma(\omega) = d\mu_{\mathbb{D},a,b}(\omega) e^{-\int d^2z \Gamma(z, \bar{z}) L_\omega(z, \bar{z})}$ pour Γ fonction ≥ 0 donne une perturbation hors du point critique.
- ▶ L'absolue continuité est garantie.
- ▶ $L_\omega(z, \bar{z})$ a une interprétation (qui peut réserver quelques surprises) en théorie des champs.

Description « explicite » du processus ξ_t

Dans quelques cas particuliers, les calculs se ramènent à des déterminants (i.e. ds intégrales gaussiennes)

- ▶ Marches à boucles effacées
- ▶ Interfaces dans le modèle d'Ising
- ▶ Interfaces du modèle gaussien

On peut alors obtenir une description exacte mais lourde de ξ_t , le processus décrivant l'interface via une équation de Loewner

- ▶ Le processus ξ_t n'est pas markovien.
- ▶ $d\xi_t = \sqrt{\kappa}dB_t + dF_t$.
- ▶ dF_t est une mesure aléatoire qu'on sait caractériser.

C'est lourd, mais révèle des liens profonds avec la théorie quantique des champs.

Marches à boucles effacées : cadre général

Soit V un ensemble de sommets et $A = (A_{v,v'})_{v,v' \in V}$ une matrice de poids. Pour $v, v' \in V$ on définit une marche de k pas de v à v' comme une suite (v_0, \dots, v_k) with avec $v_0 = v$ et $v_k = v'$ mais v_1, \dots, v_{k-1} distincts de v and v' . Le poids de la marche $W = (v_0, \dots, v_k)$ est par définition

$$w(W) \equiv A_{v_0 v_1} \cdots A_{v_{k-1} v_k}.$$

Un chemin est par définition une marche où chaque sommet n'apparaît qu'au plus une fois (\sim une courbe simple). On peut effacer les boucles d'une marche pour en faire un chemin. Si γ est un chemin on définit

$$\tilde{w}(\gamma) \equiv \sum_{W \rightarrow \gamma} w(W)$$

où la somme est prise sur toutes les marches W qui donnent γ après effacement des boucles.

Marches à boucles effacées : cadre général

Soit $\gamma = (v = v_0, \dots, v_k = v')$ un chemin de v à $v' \neq v$.

Soit $A^{(\gamma)}$ la matrice obtenue en supprimant de A les lignes et colonnes indexées par les sommets de γ .

Soit $A^{(v,v')}$ la matrice obtenue en supprimant de A les lignes et colonnes indexées par v et v' .

Alors

$$w(\gamma) = w(\gamma) \frac{\det(\mathbf{1} - \mathbf{A}^{(\gamma)})}{\det(\mathbf{1} - \mathbf{A}^{(v,v')})}.$$

Un contre exemple à l'absolue continuité

- ▶ Si deux mesures sont mutuellement absolument continues, il est impossible de décider avec certitude si un échantillon a été tiré avec l'une ou avec l'autre.
- ▶ Contre exemple : la percolation
 - ▶ Perturbation $(p - p_c)^{4/3} \sim \epsilon$ d'où $\delta = 4/3$.
 - ▶ Pour $p = p_c$, il faut $\sim \epsilon^{-7/4}$ pas du chemin de percolation pour se déplacer sur une distance macroscopique.

Un contre exemple à l'absolue continuité

Argument intuitif :

- ▶ Dans une région de N sites,
 - ▶ La fluctuation du nombre d'hexagones de couleur donnée est $\sim N^{1/2}$,
 - ▶ Mais l'asymétrie systématique est d'ordre $\sim N\epsilon^{3/4}$.
 - ▶ Dès que $N\epsilon^{3/4} \gg N^{1/2}$ on peut distinguer avec certitude qu'on est hors du point critique.
- ▶ L'interface est bordée par $N \sim \epsilon^{-7/4}$ hexagones donc $N\epsilon^{3/4} \sim \epsilon^{-1} \gg N^{1/2} \sim \epsilon^{-7/8}$.

Entourloupe : l'interface n'est pas une région indépendante du choix de l'échantillon. **La vraie preuve est difficile.**

Conclusions

- ▶ Le cas critique est très bien compris grâce à SLE.



- ▶ Il reste beaucoup à faire pour comprendre le cas non-critique.
- ▶ Les mathématiques nécessaires sont très diverses et les liens avec la théorie quantique des champs nombreux et intéressants.