

---

**Processus stochastiques**

**MIAGE**

---

**Jean-François Marckert**

LaBRI – 2020



# 1 ——— Introduction ———

Un processus stochastique est une suite de variables aléatoires de type  $(X_t, t \in \mathbb{N})$ ,  $(X_t, t \in \mathbb{Z})$  ou une "fonction aléatoire"  $(X_t, t \in [0, +\infty[)$  : autrement dit, si on voit l'indice  $t$  comme le temps, le temps peut évoluer soit de manière discrète, soit de manière continue. Les variables  $X_t$  peuvent prendre leurs valeurs dans un ensemble fini  $E$ , dans un ensemble dénombrable comme  $\mathbb{N}$  ou  $\mathbb{Z}$ , où prendre leurs valeurs dans  $\mathbb{R}$  (ou  $\mathbb{R}^d$ ), ou même dans un ensemble quelconque, en fait.

Définir un processus stochastique c'est (sous certaines hypothèses) :

- fixer l'ensemble où le temps  $t$  évolue,
- l'ensemble des valeurs prises par les variables aléatoires  $X_i$ ,
- et la loi jointe des variables  $(X_{t_1}, \dots, X_{t_k})$  : on fait souvent cela en écrivant plutôt la manière dont  $X_t$  dépend des valeurs antérieures  $(X_s, s < t)$ .

Voici des exemples :

- Exemple 1.1.** (i) Une suite  $(B_i, i \geq 0)$  de variables aléatoires indépendantes de Bernoulli  $B(p)$  est un processus stochastique (les  $B_i$  sont à valeurs dans  $\{0, 1\}$ ),  
(ii) Si à l'aide des  $(B_i, i \geq 0)$  on définit  $X_0 = 0$ , et

$$X_m = \sum_{k=1}^m B_k, \text{ pour tout } m \geq 1$$

alors la suite  $(X_k, k \geq 0)$  est un processus stochastique (à valeurs dans  $\mathbb{N}$ ). La loi de  $X_n$  est une loi binomiale  $B(n, p)$ , et on peut décrire la loi de  $(X_{n_1}, \dots, X_{n_k})$  peut-être décrite sans peine... (n'est-ce pas?)

- (iii) Si on définit

$$Y_i = (B_1 + \dots + B_i) \bmod 2, \text{ pour } i \geq 1,$$

alors  $(Y_i, i \geq 1)$  est un processus stochastique à valeurs dans  $\{0, 1\}$ .

- (iv) Si on modélise les temps d'arrivée d'un bus de la manière suivante : on se donne une suite  $(\mathcal{E}_i, i \geq 1)$  de variables exponentielles indépendantes de paramètre 1, et qu'on dit que les bus arrivent aux temps

$$T_k = \sum_{j=1}^k \mathcal{E}_j$$

alors si  $N_t = \max\{k : T_k \leq t\}$ , alors  $N_t$  désigne le nombre de bus arrivés à l'instant  $t$  : le processus  $(N_t, t \in [0, +\infty))$  est un processus en temps continu, prenant ses valeurs dans  $\mathbb{N}$ . Le processus  $(T_k, k \geq 0)$  est lui un processus en temps discret à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

On le perçoit peut-être à travers ces exemples : les processus stochastiques sont des objets à la fois naturels et riches. Leur étude forme une partie importante de la théorie des probabilités ; ils sont appliqués pour modéliser les phénomènes aléatoires où le temps joue un rôle, c'est-à-dire, pour ainsi dire, partout.

Le but de ce cours est de découvrir quelques modèles de processus stochastiques ainsi que les outils utilisés pour les étudier.

Avant de commencer, on va faire quelques petits rappels de probabilité qui seront utiles par la suite.

## 2 ——— Éléments de probabilités discrètes et continues ———

### Table des matières

2.1	Fondements . . . . .	6
2.1.1	Univers - Évènements. Notion de probabilité . . . . .	6
2.1.2	Probabilité conditionnelle - Indépendance . . . . .	9
2.2	Variables aléatoires . . . . .	14
2.2.1	Introduction . . . . .	14
2.2.2	Gommage de l'espace de probabilité . . . . .	15
2.2.3	Variable aléatoire réelle . . . . .	16
2.3	Deux inégalités... . . . .	20
2.3.1	Inégalité de Markov . . . . .	20
2.3.2	Inégalité de Bienaymé-Tchebichev . . . . .	21
2.4	Lois discrètes importantes . . . . .	21
2.4.1	loi de Bernoulli . . . . .	21
2.4.2	Loi binomiale . . . . .	22
2.4.3	Loi uniforme . . . . .	23
2.4.4	Loi géométrique . . . . .	23
2.4.5	Loi de Poisson . . . . .	24
2.5	Loi d'un couple de v.a. . . . .	25
2.5.1	Probabilité conditionnelle. Indépendance de v.a.r. . . . .	28
2.6	Plus de 2 variables ? . . . . .	31
2.7	Variables continues . . . . .	32
2.8	Exemple de la loi normale . . . . .	34
2.9	D'autres lois continues . . . . .	35
2.9.1	Loi uniforme sur $[0, 1]$ . . . . .	35
2.9.2	Loi exponentielle . . . . .	35
2.9.3	Loi de Cauchy . . . . .	36

Cette section, tout comme la suivante, est considérée comme contenant des “rappels”. On passera peu de temps en cours sur cette longue section 2; il est donc recommandé de s'assurer que ce matériel est acquis, et de poser des questions si tel ou tel point n'est pas clair.

### 2.1 Fondements

Les probabilités sont utilisées pour modéliser les phénomènes aléatoires “du monde réel”. Il est utile et assez stimulant de réfléchir à ce que cela signifie.

Que vaut la probabilité d'un événement? Qu'est-ce que le hasard? On trouve dans les dictionnaires plusieurs définitions, tournant soit autour du concept “d'événement incertain, imprévisible”, ou autour du concept de “cause imprévisible, sort, destin”...

Il est intéressant de remarquer que les probabilistes ne définissent pas le hasard, et en fait, le concept de hasard utilisé partout dans les exercices et dans les applications, ne fait pas partie de la théorie.

On pense par ailleurs généralement que la probabilité d'un événement  $E$  est définie par la proportion asymptotique de succès si on recommence infiniment l'expérience dont  $E$  est une issue possible. Mais ce point de vue intuitif ne permet pas de vraiment définir mathématiquement la probabilité d'un événement... car comment savoir si cette proportion asymptotique existe ? Cela mène à des complications sans nom.

La théorie des probabilités utilise l'astuce suivante : on va considérer un ensemble des possibles  $\Omega$ , appelé *univers de probabilité*, et on va associer à chaque partie  $E$  de  $\Omega$ , un nombre, la probabilité de  $E$ . Bien sûr, la théorie construite colle avec ce que l'on souhaite faire ; par exemple, on démontrera dans notre cadre formel que la probabilité d'un événement que l'on a défini correspond effectivement à la proportion asymptotique d'apparition de  $E$ , si on répète l'expérience dont  $E$  est une issue possible.

L'idée, qui consiste à faire reposer les fondements de la théorie des probabilités sur la théorie de la mesure est due au (très !) grand mathématicien russe Kolmogorov, et date du début du 20ème siècle.

### 2.1.1 Univers - Évènements. Notion de probabilité

On ne s'intéresse pour l'instant qu'aux univers discrets, finis ou dénombrables.

**Définition 2.1.** On appelle univers de probabilité discret  $\Omega$  tout ensemble fini ou dénombrable. Une probabilité  $\mathbb{P}$  sur  $\Omega$  est une application

$$\mathbb{P} : \begin{array}{l} \text{Parties}(\Omega) \longrightarrow [0, 1] \\ A \longmapsto \mathbb{P}(A) \end{array},$$

qui possède les propriétés suivantes :

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ ,
- $\mathbb{P}$  est  $\sigma$ -additive : c'est-à-dire, si on prend des parties disjointes  $A_1, A_2, \dots$  de  $\Omega$ , alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_i A_i\right) = \sum_i \mathbb{P}(A_i), \quad (2.1)$$

formule valable pour un nombre fini (additivité) ou infini ( $\sigma$ -additivité) de  $A_i$ .

On appelle la paire  $(\Omega, \mathbb{P})$  espace probabilisé.

La notation  $\text{Parties}(\Omega)$  est utilisée pour désigner l'ensemble de tous les sous-ensembles de  $\Omega$ , l'ensemble vide  $\emptyset$  et l'ensemble complet  $\Omega$  y compris.

Au lieu de *probabilité*, on dit aussi *loi de probabilité* ou *mesure de probabilité*.

On utilise bien sûr l'espace  $\Omega$  pour modéliser le résultat d'une expérience aléatoire, et  $\mathbb{P}$  pour décrire le poids relatif, c'est-à-dire la probabilité, de chaque résultat :

- Exemple 2.2.**
- (i) Lancer d'une pièce biaisée :  $\Omega = \{\text{pile}, \text{face}\}$ ,  $\mathbb{P}(\{\text{pile}\}) = 0.4$ ,  $\mathbb{P}(\{\text{face}\}) = 0.6$
  - (ii) Lancer d'un dé juste :  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  avec  $P(\{i\}) = 1/6$  pour tout  $i \in \Omega$ ,
  - (iii) Loto :  $\Omega = \{\{a_1, a_2, \dots, a_6\} \text{ sous ensemble à 6 éléments de } \{1, \dots, 49\}\}$ , avec  $\mathbb{P}(\{e\}) = 1/\#\Omega$ , pour tout  $e$  dans  $\Omega$ .
  - (iv) Nombre de lancers de pièces avant d'obtenir *face* :  $\Omega = \{1, 2, 3, \dots\}$ , avec probabilité  $P(\{i\}) = 1/2^i$  pour tout  $i \in \Omega$ .

**Définition 2.2.** Les éléments de  $\Omega$  sont appelés événements élémentaires ou éventualités, et ceux de  $\text{Parties}(\Omega)$ , événements.

La définition d'une probabilité est un peu minimale... Voyons quelques conséquences immédiates :

**Proposition 2.3.** Soit  $\mathbb{P}$  une probabilité sur un univers discret  $\Omega$ . On a

- (a)  $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$ ,
- (b) Si  $A, B$  sont des parties de  $\Omega$  et si  $A \subset B$ , alors  $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$ ,
- (c) Soit  $A \in \text{Parties}(\Omega)$  et  $A^c$  son complémentaire dans  $\Omega$  (c'est-à-dire,  $A^c = \Omega \setminus A$ ) : on a

$$\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A).$$

- (d) Pour tout  $A, B \in \text{Parties}(\Omega)$ , on a

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$

Intuitivement, ces propriétés sont celles que l'on attend d'une probabilité (ou encore d'une fonction qui associe un "poids" à chaque événement).

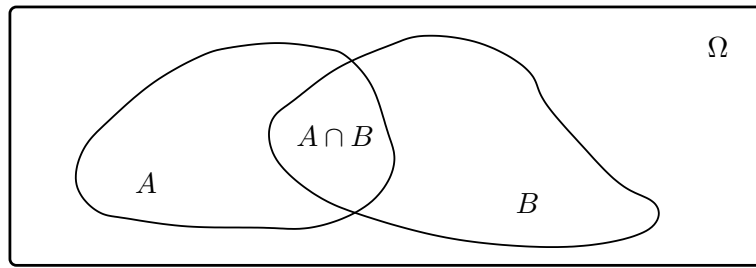


FIGURE 1 – Décomposition de  $A \cup B$ .

*Démonstration.* (a) On sait que  $\emptyset$  et  $\Omega$  sont disjoints et en plus que  $\Omega \cup \emptyset = \Omega$ . On a donc  $\mathbb{P}(\Omega \cup \emptyset) = \mathbb{P}(\Omega) + \mathbb{P}(\emptyset) = \mathbb{P}(\Omega)$ , d'où on déduit  $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$ .

(b) Notons  $C = B \setminus A$ . On a alors  $B = A \cup C$ , avec  $A$  et  $C$  disjoints. Ainsi  $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(C)$  et comme  $\mathbb{P}$  prend ses valeurs dans  $[0, 1]$ ,  $\mathbb{P}(B) \geq \mathbb{P}(A)$ .

(c) Il suffit de remarquer que  $\Omega = A \cup A^c$  et que ces 2 ensembles sont disjoints.

(d) Il suffit de regarder la figure 1 ou de prendre l'argument suivant. Réécrivons l'identité  $\mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ , et remarquons que les ensembles  $A \setminus B$ ,  $B \setminus A$  et  $A \cap B$  sont disjoints. Ainsi, on voit facilement que les deux membres de l'égalité valent  $\mathbb{P}(A \setminus B) + \mathbb{P}(B \setminus A) + 2\mathbb{P}(A \cap B)$ .  $\square$

**Proposition 2.4.** Soit  $(\Omega, \mathbb{P})$  un espace de probabilité discret. La famille  $(p_i, i \in \Omega)$  détermine entièrement la probabilité  $\mathbb{P}$ .

Réciproquement, à toute famille finie ou dénombrable  $(p_i, i \in I)$  telle que

- $\forall i, p_i \geq 0$ ,
  - $\sum_{i \in I} p_i = 1$
- on peut associer un univers  $\Omega = \{\omega_i, i \in I\}$  et une probabilité  $\mathbb{P}$  sur  $\Omega$  telle que :

$$\mathbb{P}(\{\omega_i\}) = p_i.$$

*Démonstration.* Cette propriété résulte du fait suivant : soit  $A$  appartenant à  $\mathcal{P}(\Omega)$ . Écrivons  $A$  comme union des événements élémentaires qui le compose (cette écriture est unique) :

$$A = \bigcup_{\omega \in A} \{\omega\}.$$

D'après la définition d'une probabilité, puisque les  $\{\omega\}$  sont disjoints,

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{\omega \in A} \{\omega\}\right) = \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}(\{\omega\}).$$

La probabilité de  $A$  est donc bien définie.

La réciproque signifie que tout ensemble de nombres positifs, de somme 1, peut être considéré comme une probabilité sur un ensemble de cardinal égal. Ceci est clair puisqu'il suffit d'ailleurs de prendre  $\Omega = I$  (l'ensemble qui indexe les  $p_i$  et poser  $\mathbb{P}(\{i\}) = p_i$  pour  $i \in I$ ).  $\square$

Dans les exemples page 7, on a déjà utilisé sans le dire cette proposition : la probabilité de tout élément de  $\text{Parties}(\Omega)$ , est entièrement déterminée par la probabilité des événements élémentaires, "la probabilités des singletons". Cela ne sera plus valable lorsqu'on traitera des espaces de probabilité non discrets.

**Exemple 2.3.** Lorsqu'on lance un dé (équilibré), on utilise la modélisation suivante :

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ,  $\text{Parties}(\Omega) = \{\{1\}, \dots, \{6\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \dots, \{5, 6\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \dots, \{4, 5, 6\}, \{1, 2, 3, 4\}, \dots, \{3, 4, 5, 6\}, \{1, 2, 3, 4, 5\}, \dots, \{2, 3, 4, 5, 6\}, \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \emptyset\}$  avec  $\mathbb{P}(\{i\}) = 1/6$  pour tout  $i \in \Omega$ .  $A = \{1, 3, 5\}$  est un événement, correspondant au fait que le résultat du lancer est impair et  $\mathbb{P}(A) = 3/6$ .

**Remarque 2.5.** Dans les cours plus abstraits de théorie des probabilités, on ne définit pas une probabilité sur l'ensemble des parties, mais plutôt sur ce qu'on appelle "une tribu", qui est un sous-ensemble de  $\text{Parties}(\Omega)$  (qui contient  $\Omega$ , qui est stable par union et intersection dénombrable). Lorsqu'on travaille sur des espaces finis ou dénombrables, fondamentalement, ces complications ne sont pas nécessaires car elles reviennent à supposer que certains éléments de  $\Omega$  n'ont pas de probabilité propre. Par contre, dès que l'ensemble  $\Omega$  a la puissance du continu ( $\mathbb{R}$  par exemple), on est obligé de passer par là.

### 2.1.2 Probabilité conditionnelle - Indépendance

Les probabilités conditionnelles ont pour but d'évaluer "le changement de probabilité" dû à l'acquisition d'informations. Par exemple si l'on dispose d'un dé juste la probabilité d'obtenir un 1 est  $1/6$ . Si quelqu'un lance le dé pour nous et nous donne l'information que "le résultat est impair", on peut écarter les événements  $\{2\}, \{4\}, \{6\}$  et en déduire que maintenant, le résultat est 1 avec probabilité  $1/3$ . Formalisons tout cela...

**Définition 2.6.** Soit  $(\Omega, \mathbb{P})$  un espace probabilisé et  $B \in \text{Parties}(\Omega)$  tel que  $\mathbb{P}(B) > 0$ ; soit  $A$  un élément de  $\text{Parties}(\Omega)$ . La probabilité conditionnelle de  $A$  sachant  $B$  est définie par :

$$\mathbb{P}(A | B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}. \quad (2.2)$$

**Remarque 2.7.** Les nombres  $\mathbb{P}(B | A)$  et  $\mathbb{P}(A | B)$  sont (en général) différents. Si  $\mathbb{P}(A) > 0$  et  $\mathbb{P}(B) > 0$  la formule (2.2) indique que

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A | B)\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \cap A) = \mathbb{P}(B | A)\mathbb{P}(A).$$

Ce simple jeu d'écriture est souvent utilisé, pour "retourner des probabilités conditionnelles : on a ainsi  $\mathbb{P}(A | B) = \mathbb{P}(B | A)\mathbb{P}(A)/\mathbb{P}(B)$ , formule qui découle directement de (2.2).

Le théorème suivant est important : il explique comment et pourquoi la "probabilité conditionnelle à l'événement  $B$ " est bien une probabilité qui vérifiera donc toutes les propriétés propres aux probabilités établies plus haut.

**Théorème 2.8.** Soit  $(\Omega, \mathbb{P})$  un espace probablisé et  $B \in \text{Parties}(\Omega)$  tel que  $\mathbb{P}(B) > 0$ . L'application

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\cdot | B) : \text{Parties}(\Omega) &\longrightarrow [0, 1] \\ A &\longrightarrow \mathbb{P}(A | B) \end{aligned}$$

est une probabilité sur  $\Omega$  (pour laquelle  $\mathbb{P}(B | B) = 1$ ).

*Démonstration.* On a immédiatement  $\mathbb{P}(\emptyset | B) = 0, \mathbb{P}(\Omega | B) = 1$ , mais aussi  $\mathbb{P}(B | B) = \mathbb{P}(B \cap B)/\mathbb{P}(B) = 1$ . Prenons maintenant une famille  $(A_i, i \in I)$  de parties de  $\Omega$  disjointes, et vérifions que  $\mathbb{P}(\cdot | B)$  est bien  $\sigma$ -additive. On a

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i \in I} A_i \mid B\right) = \frac{\mathbb{P}((\bigcup_{i \in I} A_i) \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(\bigcup_{i \in I} (A_i \cap B))}{\mathbb{P}(B)}$$

comme les ensembles  $A_i \cap B$  sont disjoints (c'est-à-dire  $(A_i \cap B) \cap (A_j \cap B) = \emptyset$  si  $i \neq j$ ), donc

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i \in I} A_i \mid B\right) = \sum_{i \in I} \frac{\mathbb{P}(A_i \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A_i | B),$$

ce qui montre la  $\sigma$ -additivité. □

La formule des probabilités conditionnelles correspond tout à fait au changement de probabilité intuitif. Le référent n'est plus  $\Omega$  mais  $B$ . Ainsi (2.2) traduit le fait que les cas possibles sont dans  $B$ ; la probabilité de  $B$  sachant  $B$  vaut donc 1.

**Exemple 2.4.** Supposons que  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  muni de la probabilité suivante :

$$\mathbb{P}(\{i\}) = i/21. \tag{2.3}$$

Autrement dit, la probabilité de tomber sur  $i$  est proportionnelle à  $i$ . Supposons  $B = \{1, 2, 3, 4\}$ . On voit que  $\mathbb{P}(B) = 10/21$ . Intéressons nous aux singletons :  $\{i\}$  est dans  $B$  sssi  $1 \leq i \leq 4$ . On voit alors que

$$\mathbb{P}(\{i\}|B) = \frac{\mathbb{P}(\{i\} \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \begin{cases} \frac{i/21}{10/21} = i/10 & \text{si } i \in \{1, 2, 3, 4\} \\ 0 & \text{si } i \in \{5, 6\} \end{cases}.$$



- Puisque  $\mathbb{P}(\cdot | B)$  est une probabilité, pour tout  $A \in \text{Parties}(\Omega)$ ,  $\mathbb{P}(A | B) = \sum_{j \in A} \mathbb{P}(\{j\} | B)$ .
- La probabilité  $\mathbb{P}(\cdot | B)$  ne charge que  $B$ , et on a  $\mathbb{P}(B | B) = \mathbb{P}(B \cap B) / \mathbb{P}(B) = 1$ .
- On remarque aussi que la probabilité  $\mathbb{P}(\cdot | B)$  est proportionnelle pour les événements inclus dans  $B$  à leur valeur initiale sous la probabilité  $\mathbb{P}$  (dans notre exemple,  $\mathbb{P}(\{i\} | B)$  est proportionnel à  $i$  si  $i$  est dans  $B$ . C'est un point qui doit être intuitif... Recevoir l'information que l'on est dans  $B$ , ne doit pas changer les rapports de probabilité entre les événements inclus dans  $B$ ; ceux totalement à l'extérieur de  $B$  voient leur proba tomber à 0....

On va maintenant énoncer la fameuse formule de Bayes. Avant cela, rappelons la notion de partition.

**Définition 2.9.** Soit  $A$  un ensemble quelconque. On appelle partition de  $A$  toute famille d'ensembles  $(A_i, i \in I)$  (où  $I$  est un ensemble d'indices) telle que les  $A_i$  sont disjoints, d'union  $A$ ; en d'autres termes :

$$\begin{cases} i) & \bigcup_{i \in I} A_i = A, \\ ii) & A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i, j \in I, \text{ si } i \neq j \end{cases} \quad (2.4)$$

La formule des probabilités totales est une formule évidente, que l'on utilise très souvent en probabilité, parfois même sans s'en rendre compte...

**Proposition 2.10.** [Formule des probabilités totales] Soit  $(\Omega, \mathbb{P})$  un espace probablisé et  $(A_i, i \in I)$  une partition de  $\Omega$ . On a, pour tout  $B \in \text{Parties}(\Omega)$

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \cap \Omega) = \mathbb{P}\left(B \cap \left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)\right) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(B \cap A_i).$$

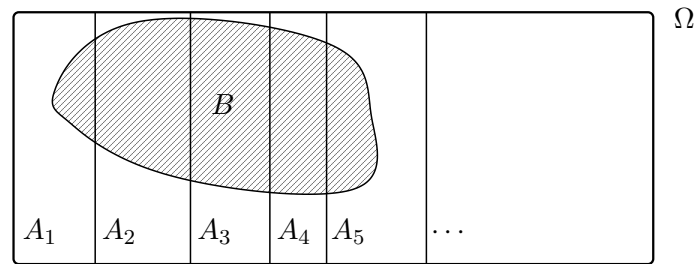
*Démonstration.* Toutes les égalités sont évidentes. La 3ème se comprend aisément sur la figure 2, et si on veut une preuve plus classique, on utilise le fait que comme les ensembles  $A_i$  sont disjoints,

$$B \cap \left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} (A_i \cap B),$$

avec les ensembles  $A_i \cap B$  disjoints. □

**Exemple 2.5.** Munissons un ensemble d'individus de l'équiprobabilité. Notons  $R_i$  le sous-ensemble des individus qui habitent dans la région  $i$  pour  $i$  allant de 1 à 12 (chaque individu habite dans une seule région); notons  $V$  le sous-ensemble de ceux qui sont végétariens. On a

$$\mathbb{P}(V) = \sum_{i=1}^{12} \mathbb{P}(V \cap R_i),$$

FIGURE 2 – Intersection de  $B$  avec une partition...

c'est-à-dire, la somme des proportions des individus qui sont simultanément végétariens et dans la région  $i$ . Notez bien la présence du signe  $\cap$ , que l'on ne peut pas remplacer par  $|$  (sachant). Si on veut passer aux probas conditionnelles, on peut le faire comme suit, par exemple,

$$\mathbb{P}(V) = \sum_{i=1}^{12} \mathbb{P}(V \cap R_i) = \sum_{i=1}^{12} \mathbb{P}(V | R_i) \mathbb{P}(R_i),$$

où on voit qu'il faut pondérer la probabilité conditionnelle  $\mathbb{P}(V | R_i)$  par la proportion  $\mathbb{P}(R_i)$  du nombre d'habitants dans  $i$ .

Énonçons maintenant la formule de Bayes, utilisée pour "inverser" des probabilités conditionnelles. Elle est facile à retrouver car une fois encore, il s'agit juste d'un retournement de conditionnements.

**Proposition 2.11.** [Formule de Bayes] Soit  $(\Omega, \mathbb{P})$  un espace probablisé et  $(A_i, i \in I)$  une partition de  $\Omega$ . Si  $\mathbb{P}(B) > 0$  et  $\mathbb{P}(A_i) > 0$  pour tout  $i$ , alors :

$$\mathbb{P}(A_j | B) = \frac{\mathbb{P}(A_j \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(B | A_j) \mathbb{P}(A_j)}{\sum_{i \in I} \mathbb{P}(B | A_i) \mathbb{P}(A_i)}. \quad (2.5)$$

*Démonstration.* On sait que  $\mathbb{P}(B \cap A_j) = \mathbb{P}(B|A_j)\mathbb{P}(A_j) = \mathbb{P}(A_j | B)\mathbb{P}(B)$ . On voit qu'on peut donc s'amuser à conditionner par  $A_j$  ou par  $B$  et que toute cela n'est qu'un jeu d'écriture. Dans la formule de Bayes, on veut conditionner par  $B$  et retourner le conditionnement... pour montrer (2.5), on voit que seul le dénominateur reste à comprendre... La formule des probabilités totales dit que  $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \cap (\bigcup_{i \in I} A_i)) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(B \cap A_i)$ ; or ceci est égal à  $\sum_{i \in I} \mathbb{P}(B | A_i) \mathbb{P}(A_i)$ .  $\square$

**Exemple 2.6.** Supposons que dans une classe 34% des élèves sont des filles, 66% des garçons, et que 30% des filles fument, 25% des garçons fument. On écrit cela sous la forme  $\mathbb{P}(F) = 0.34$ ,  $\mathbb{P}(G) = 0.66$ , et  $\mathbb{P}(f | F) = 0.30$ ,  $\mathbb{P}(f | G) = 0.25$ . La formule de Bayes permet d'"inverser" des probabilités conditionnelles, et donc de calculer la probabilité d'être une fille sachant qu'on fume :

$$\mathbb{P}(F | f) = \frac{\mathbb{P}(F \cap f)}{\mathbb{P}(f)} = \frac{\mathbb{P}(f | F) \mathbb{P}(F)}{\mathbb{P}(f|F)\mathbb{P}(F) + \mathbb{P}(f|G)\mathbb{P}(G)} = \frac{0.3 \times 0.34}{0.3 \times 0.34 + 0.25 \times 0.66}.$$

On définit maintenant l'une des notions centrales de la théorie des probabilités : la notion d'indépendance.

**Définition 2.12.** Soit  $(\Omega, \mathbb{P})$  un espace probablisé. On dit que deux événements  $A$  et  $B$  sont indépendants si

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B). \quad (2.6)$$

Plus généralement, si  $(A_i, 1 \leq i \leq K)$  est une famille d'événements, il sont dits indépendants si pour toute partie  $I$  de  $\{1, \dots, K\}$ ,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(A_i). \quad (2.7)$$

**Remarque 2.13.** Notez que (2.7) n'est pas équivalent à  $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^K A_i\right) = \prod_{i=1}^K \mathbb{P}(A_i)$ ; c'est une condition nettement plus restrictive.

L'indépendance est une notion primordiale en probabilité comme on va le voir par la suite. Si  $A$  et  $B$  sont indépendants, par (2.2) on a :

$$\mathbb{P}(A | B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{P}(A).$$

(Ceci bien sûr si  $\mathbb{P}(B) \neq 0$ .) L'interprétation est la suivante : si  $A$  et  $B$  sont indépendants, savoir que  $B$  est réalisé ne modifie en rien la probabilité de réalisation (ou non) de  $A$ .

**Exemple 2.7.** Si on lance un dé juste, et si on note  $A = \{1, 3, 5\}$  (le résultat est impair),  $B = \{2, 4, 6\}$  (le résultat est pair),  $C = \{3, 6\}$  (le résultat est divisible par 3), alors  $A$  et  $C$  sont indépendants, et aussi  $B$  et  $C$  sont indépendants car

$$\mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(\{3\}) = \frac{1}{6} = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C) = \frac{3}{6} \times \frac{2}{6}$$

(même calcul pour  $B$  et  $C$ ) mais  $A$  et  $B$  ne le sont pas car

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0 \neq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \left(\frac{3}{6}\right)^2.$$

Intuitivement :  $A$  et  $B$  ne sont pas indépendants, car si  $A$  est réalisé alors on sait que  $B$  ne l'est pas. Donc, on a acquis une information qui change la probabilité de la réalisation de  $B$ . Maintenant,  $A$  et  $C$  sont indépendants : que  $A$  soit réalisé ou pas,  $C$  a une chance sur 3 de se réaliser... que l'on nous donne ou pas d'information sur la réalisation de  $C$ ,  $A$  a une chance sur 2 de se réaliser.

“Dans la vraie vie”, l'indépendance d'événements est souvent une question cruciale; en médecine par exemple, à cause de l'effet placebo et aussi, du fait que les traitements médicamenteux ne marchent souvent pas instantanément, ni à 100%, on se pose naturellement la question de savoir si la guérison est indépendante ou non de la prise d'un médicament. Seules des études statistiques permettent d'avancer sur ces questions car lorsqu'on demande aux gens s'ils pensent que la prise d'une poudre de perlimpinpin a soigné leur rhume, une bonne partie des gens va penser que “oui” en observant la disparition du rhume

concomitant à la prise de la poudre, en oubliant qu'un rhume passe aussi sans traitement (voir les études statistiques sur l'homéopathie).

Superstition et indépendance : On peut affirmer qu'une personne superstitieuse se distingue d'une non superstitieuse en ce qu'elle perçoit de la dépendance entre deux événements, là où la seconde n'en voit pas. La personne "non superstitieuse" ne pense pas qu'elle ne risque rien si elle croise un chat noir, mais pense que la probabilité qu'il lui arrive quelque chose de malheureux n'est pas modifiée par cette rencontre.

**Remarque 2.14.** *Si on se donne 3 événements  $A_1, A_2, A_3$ , ceux-ci peuvent être indépendants 2 à 2, sans être indépendants. Trouver un tel exemple de 3 événements est un bon exercice...*

**Remarque 2.15.** *Il y a de nombreux théorèmes de probabilité qui ont besoin de l'hypothèse d'indépendance de variables aléatoires ou d'événements. Comprendre pourquoi – que peut-il bien se passer sans cette hypothèse ? – est très formateur.*

## 2.2 Variables aléatoires

### 2.2.1 Introduction

**Définition 2.16.** Soit  $(\Omega, \mathbb{P})$  un espace probabilisé fini ou dénombrable. On appelle variable aléatoire sur  $\Omega$  toute application

$$\begin{aligned} X : \Omega &\longrightarrow \Omega' \\ \omega &\longmapsto X(\omega) \end{aligned}$$

où  $\Omega'$  est un autre ensemble.

**Exemple 2.8.** Par exemple, si  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , l'application  $X$  définie par  $X(i) = p$  si  $i$  est pair et  $X(i) = f$  si  $i$  est impair, est une variable aléatoire. L'espace  $\Omega'$  dans ce cas est  $\{p, f\}$ , ou, plus généralement, tout ensemble qui contient  $p$  et  $f$ .

**Remarque 2.17.** *Alors ici il faut quand même noter que la dénomination "variable aléatoire" n'est pas particulièrement bien choisie... En fait, même si la définition des variables aléatoires est un peu plus compliquée que celle présentée ici lorsque l'on travaille avec des espaces non discrets, on voit bien qu'une variable aléatoire est une fonction en non pas une variable... Elle n'est pas non plus aléatoire, elle ne dépend pas de  $\mathbb{P}$ . Par la suite, on verra tout de même pourquoi on peut comprendre un peu le choix de cette dénomination, source de nombreuses confusions.*

Avant même d'aller plus loin, regardons de près un exemple :

**Exemple 2.9.** Prenons  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  munie de l'équiprobabilité,  $1/6$  pour chaque élément. Soit  $X$  la variable aléatoire définie par  $X(a) = (a - 4)(a - 1)$ . On voit alors que

$$X(1) = 0, X(2) = -2, X(3) = -2, X(4) = 0, X(5) = 4, X(6) = 10.$$

Autrement dit : Alice et Bob jouent au dé, et pour une raison non divulguée ici, il a été décidé que si le dé tombait sur  $a$ , alors Alice donnerait  $X(a)$  euros à Bob. Maintenant, on voit que "l'aléa initial" qui concernait le résultat du dé est transporté par  $X$  sur l'aléa de la dette d'Alice.

L'espace image

$$X(\Omega) = \{X(i), i \in \Omega\} = \{0, -2, 4, 10\} \quad (2.8)$$

est l'ensemble des dettes possibles. Maintenant, il est clair que ces 4 dettes ne sont pas équiprobables, puisque 0 et  $-2$  sont chacun image de 2 éléments de  $\Omega$  ; ainsi, la probabilité que  $X$  prennent la valeur 0 est  $2/6$ , la valeur  $-2$ ,  $2/6$  aussi, et enfin, la probabilité que  $X$  prenne la valeur 4 est  $1/6$ , et même chose pour 10. Bien sûr, si le dé n'avait pas été juste, il aurait fallu modifier le calcul en tenant compte de la probabilité de chaque face du dé.

Bon, voilà, on va maintenant formaliser le cas général, mais toute l'idée est là : une variable aléatoire est définie sur un espace de probabilité ; on s'intéresse à l'image de cette variable aléatoire, et surtout à ce qu'on appelle la loi de cette variable : la probabilité sur l'espace image que  $X$  prenne telle ou telle valeur. Cette loi est une loi de probabilité, image de la probabilité initiale au sens suivant :

**Définition 2.18.** Soit  $(\Omega, \mathbb{P})$  un espace discret probabilisé, et  $X : \Omega \rightarrow \Omega'$  une variable aléatoire définie sur cet espace. L'ensemble image

$$X(\Omega) = \{X(\omega), \omega \in \Omega\}$$

est fini ou dénombrable. On appelle loi de  $X$ , la mesure de probabilité  $\mathbb{P}_X$  définie sur  $X(\Omega)$  par pour tout  $A \in \text{Parties}(X(\Omega))$ ,

$$\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(\{\omega, X(\omega) \in A\}) = \mathbb{P}(X^{-1}(A)) = \sum_{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A} \mathbb{P}(\{\omega\}). \quad (2.9)$$

**Remarque 2.19.** ■ La notation  $\mathbb{P}_X$  est classique ; il s'agit juste de donner un nom à cette loi image (on appelle parfois  $\mathbb{P}_X$  la probabilité image de  $\mathbb{P}$  par  $X$ ). On peut l'appeler  $\mathbb{P}'$  ou  $\mathbb{Q}$  si on préfère éviter ce "X" en indice qui ne joue aucun rôle particulier.

- Au lieu de noter  $\mathbb{P}_X(A)$  il est classique de noter  $\mathbb{P}(X \in A)$ . De même si  $A = \{a\}$ , un simple élément, on écrit  $\mathbb{P}_X(\{a\}) = \mathbb{P}(X = a)$ . On note aussi  $\mathbb{P}(X \leq x)$  au lieu de  $\mathbb{P}(X \in (-\infty, x])$ , etc. Du coup, c'est vrai qu'ici, dans les notations, on oublie un peu que  $X$  est une fonction, et on fait comme si  $X$  était une variable. Mais bon.
- Remarque un peu subtile : Puisque  $X$  est une fonction de  $\Omega$  dans  $\Omega'$ , on peut tout à fait voir  $\mathbb{P}_X$  comme une loi de probabilité sur  $\Omega'$  plutôt que sur  $X(\Omega)$ . Par exemple, dans le jeu d'Alice et Bob, on pourrait dire que  $X$  est une fonction à valeurs dans  $\mathbb{Z}$ , ou dans  $\mathbb{R}$ . Ça ne change rien au fait que  $\mathbb{P}_X$  n'attribue une masse positive qu'aux éléments de  $X(\Omega) = \{-2, 0, 4, 10\}$ , et que la loi se décrit "de manière économique" sur  $X(\Omega)$  plutôt. Mais si on travaille sur  $\Omega'$  au lieu de  $X(\Omega)$  on n'est plus forcément dans un cadre dénombrable et les ensembles  $\Omega'$  et  $\text{Parties}(\Omega')$  peuvent-être titanesques. De nouveau, ça ne pose pas ici de problème particulier. Dans le cas non discret, il faudra faire un peu plus attention.

### 2.2.2 Gommage de l'espace de probabilité

Il s'agit ici d'une réflexion un peu abstraite, mais qui permet de comprendre pourquoi on se permet parfois de parler de variables aléatoires, de leur loi, sans définir correctement l'espace initial  $(\Omega, \mathbb{P})$ .

Au début, nous avons discuté d'une mesure  $\mathbb{P}$  définie sur un ensemble  $\Omega$ . Maintenant, on voit que la loi  $\mathbb{P}_X$  de la variable aléatoire  $X$  est également une loi de probabilité. On peut se demander quelle est la différence de nature entre une loi de probabilité sur un espace  $\Omega$ , et la loi  $\mathbb{P}_X$  d'une variable  $X$ , mettons prenant ses valeurs dans un espace  $\Omega'$ ... En fait, il n'y a pas de différence de nature, ni de degré de généralité. Il y a plusieurs façons de voir cela. La plus simple, mais un peu abstraite, consiste à considérer la variable aléatoire identité, définie par  $X(\omega) = \omega$  définie sur  $\Omega$  et donc à valeurs dans  $\Omega$ . Si on prend comme loi initiale  $\mathbb{P}$ , alors on voit que la loi  $\mathbb{P}_X$  est égale à  $\mathbb{P}$  : en effet pour tout  $A$ ,

$$\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(\{\omega : X(\omega) \in A\}) = \mathbb{P}(\{\omega : \omega \in A\}) = \mathbb{P}(A).$$

Ainsi, on peut énoncer le résultat suivant, valable en toute généralité :

**Lemme 2.20.** Toute mesure de probabilité est la loi d'une variable aléatoire.

Dans nombre de situations on prendra directement une variable aléatoire dont on spécifiera la loi, plutôt que de définir d'abord un espace de probabilité. On se permettra donc de dire directement : "soit  $X$  une variable aléatoire uniforme sur  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ", sans spécifier que  $X$  est définie sur un espace  $(\Omega, \mathbb{P})$ , et surtout, sans spécifier  $\Omega$ ...

### 2.2.3 Variable aléatoire réelle

**Définition 2.21.** On appelle variable aléatoire réelle, une variable aléatoire définie sur un espace de probabilité  $(\Omega, \mathbb{P})$  et prenant ses valeurs dans  $\mathbb{R}$ , c'est-à-dire,  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Exemple 2.10.** Dans le jeu avec Alice et Bob ci-dessus (Exemple 2.9),  $X$  est une variable aléatoire réelle, mais ce n'est pas une variable réelle dans l'Exemple 2.8.

Les variables aléatoires réelles sont intéressantes en cela que dans nombre d'applications, ce sont effectivement des données aléatoires quantitatives qui apparaissent, mais aussi, car avec des nombres, on peut faire des calculs.

Pour une variable aléatoire discrète réelle  $X$ , la loi de  $X$  est entièrement décrite par l'ensemble des valeurs  $\mathbb{P}(X = x)$  pour  $x$  décrivant  $\mathbb{R}$ . Bien sûr, pour au plus un nombre dénombrable de  $x$ ,  $\mathbb{P}(X = x)$  peut être strictement positif. Ces " $x$ " qui ont une probabilité positive sont appelés *atomes* de la loi  $\mathbb{P}_X$ .

**Définition 2.22.** La fonction de répartition de  $X$  est la fonction définie par :

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R} &\longrightarrow [0, 1] \\ x &\longmapsto F(x) = \mathbb{P}(X \leq x). \end{aligned}$$

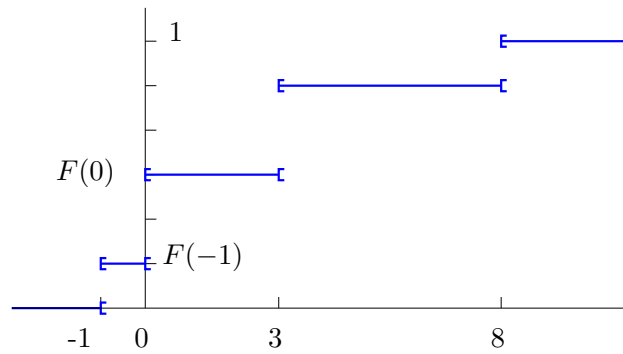


FIGURE 3 – Exemple d'une fonction de répartition

On voit clairement que la fonction de répartition est croissante. Ses limites sont 0 en  $-\infty$  et 1 en  $+\infty$ . La fonction de répartition est constante entre les atomes, et saute de  $\mathbb{P}(X = x)$  en un atome  $x$ .

**Définition 2.23.** Soit  $X$  une variable aléatoire réelle dont l'ensemble des atomes est  $\{x_i, i \in I\}$  (pour un ensemble d'indice  $I$  fini ou dénombrable). L'espérance mathématique de  $X$ , également appelée moyenne de  $X$ , est le nombre

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i \in I} x_i \mathbb{P}(X = x_i) \stackrel{(a)}{=} \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \mathbb{P}(\{\omega\}),$$

lorsque cette dernière quantité existe (et on décide qu'elle existe lorsque  $\sum_{i \in I} |x_i| \mathbb{P}(X = x_i) < +\infty$ ).

L'égalité (a) est juste la retranscription du fait que  $\mathbb{P}_X$  est la loi image de  $\mathbb{P}$  par  $X$ .

**Exemple 2.11.** ■ Dans l'histoire d'Alice est Bob, la dette moyenne d'Alice vaut donc

$$\mathbb{E}(X) = 0 \times \left(\frac{2}{6}\right) + (-2) \times \left(\frac{2}{6}\right) + 4 \times \left(\frac{1}{6}\right) + 10 \times \left(\frac{1}{6}\right) = \frac{10}{6}.$$

■ Lorsque l'espace est dénombrable, la somme comporte un nombre infini de termes, et l'espérance peut diverger, "ne pas exister" : par exemple, si  $\mathbb{P}(X = i) = \frac{6}{\pi^2 i^2}$  pour  $i \in \{1, 2, \dots\}$ . Alors

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i \geq 1} i \frac{6}{\pi^2 i^2} = \frac{6}{\pi^2} \sum_{i \geq 1} \frac{1}{i}$$

et cette somme est connue pour diverger ; dans ce cas on peut s'accorder pour dire que la moyenne vaut  $+\infty$ .

■ Dans la théorie des séries, on apprend que certaines séries ne convergent pas, n'ont pas de valeurs. Par exemple, si la loi de  $X$  est donnée par  $\mathbb{P}(X = i) = \frac{3}{\pi^2 i^2}$  pour  $i \in \mathbb{Z}^*$ , alors  $X$  ne possède pas de moyenne (la condition de non existence est le fait que  $\sum_{i: x_i \geq 0} p_i x_i = +\infty$  et  $\sum_{i: x_i < 0} p_i x_i = -\infty$ , si les  $x_i$  ont proba.  $p_i$ ).

**Proposition 2.24.** Soit  $X$  une v.a.r sur  $(\Omega, \mathbb{P})$  et soit  $\Psi$  une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . Alors  $\Psi(X)$  est une v.a.r. sur  $(\Omega, \mathbb{P})$  et

$$\mathbb{E}(\Psi(X)) = \sum_{\omega \in \Omega} \Psi(X(\omega)) \mathbb{P}(\omega) \quad (2.10)$$

$$= \sum_{x \in X(\Omega)} \Psi(x) \mathbb{P}(X = x) \quad (2.11)$$

(lorsque cette quantité existe).

**Exemple 2.12.** Dans l'affaire de la dette d'Alice  $X$ . Supposons qu'elle ait promis qu'elle donnerait  $\Phi(X) = X^2 - 3X - 4$  à sa grande tante, si  $X$  est sa dette après la partie avec Bob. On voit qu'on peut tout ré-exprimer en fonction de  $a$  sur  $\Omega$  puisque  $X(a) = (a-4)(a-1)$ . Ainsi on voit que  $\Phi(X)$  (on devrait écrire  $a \mapsto \Phi(X(a))$ ) définie par  $\Phi(X(a)) = ((a-4)(a-1))^2 - 3(a-4)(a-1) - 4$  est une variable aléatoire sur l'espace initial, et c'est cela qui donne la première formule : on peut sommer sur toutes les possibilités initiales, et pondérer par les probas initiales. Comme  $\Phi(X)$  est une fonction de  $X$  dont on connaît aussi la loi, on peut à la place, travailler sous la loi de  $X$  ce qui donne la 2ème formule. Finalement, on trouve

$$\mathbb{E}(\Phi(X)) = \sum_{a=1}^6 \frac{1}{6} \left( ((a-4)(a-1))^2 - 3(a-4)(a-1) - 4 \right),$$

qui vaut aussi, donc

$$\mathbb{E}(\Phi(X)) = \sum_{b \in \{-2, 0, 4, 10\}} \mathbb{P}(X = b) \Phi(b)$$

avec  $\mathbb{P}(X = -2) = \mathbb{P}(X = 0) = 2/6$ ,  $\mathbb{P}(X = 4) = 1/6$ ,  $\mathbb{P}(X = 10) = 1/6$  comme expliqué dans Exemple 2.9 page 14.

*Démonstration.* La preuve suit l'exemple ci-dessus. Il faut d'abord remarquer que  $\Psi(X)$  est une variable aléatoire. C'est pour cela qu'elle possède une espérance. Il s'agit de l'application  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  ;  $\omega \mapsto \Psi(X(\omega))$  ; la formule (2.10) suit directement cette observation. Maintenant (lorsque la somme converge absolument<sup>1</sup>), on peut rassembler les termes qui ont même image par  $X$  :

$$\begin{aligned} \sum_{\omega \in \Omega} \Psi(X(\omega)) \mathbb{P}(\omega) &= \sum_{x \in \mathbb{R}} \sum_{\omega \in \Omega : X(\omega) = x} \Psi(X(\omega)) \mathbb{P}(\omega) \\ &= \sum_{x \in \mathbb{R}} \Psi(x) \sum_{\omega \in \Omega : X(\omega) = x} \mathbb{P}(\omega) = \sum_{x \in \mathbb{R}} \Psi(x) \mathbb{P}(X = x). \end{aligned}$$

Une fois encore, dans la dernière somme, au plus un nombre dénombrable de  $x$  contribuent.  $\square$

1. Il faut justifier le fait qu'on a réarrangé l'ordre de sommation, car ce n'est pas une opération toujours valide : un critère dû à Fubini, dit qu'on peut réordonner si les éléments de la somme sont positifs ou si les sommes convergent lorsqu'on ajoute une valeur absolue autour de  $|\Psi(X)|$ .



**Proposition 2.25.** L'espérance est linéaire : si  $a$  et  $b$  sont des réels et  $X$  une variable aléatoire réelle qui possède une espérance, alors

$$\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b.$$

*Démonstration.* Il suffit d'utiliser Proposition 2.24 avec  $\Psi(X) = aX + b$ . □

**Remarque 2.26.** (i) Attention, en général on n'a pas  $\mathbb{E}(\Psi(X)) = \Psi(\mathbb{E}(X))$ .

(ii) En prenant  $a = 0$  dans cette formule, on voit que pour une constante  $b$ , on a  $\mathbb{E}(b) = b$ , formule que l'on a déjà utilisée plusieurs fois.

**Définition 2.27.** La variance de  $X$  (ou de la loi de  $X$ ) est définie par :

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2),$$

(lorsque cette quantité existe).

Une fois encore,  $\mathbb{E}(X)$  peut être non définie, donc dans ce cas la variance n'existe pas. Lorsque  $\mathbb{E}(X)$  existe,  $\text{Var}(X)$  peut ne pas exister (c'est-à-dire, elle peut être infinie).

La variance "mesure" la dispersion de  $X$  autour de sa moyenne. Notez qu'il s'agit des écarts quadratiques moyens ! Par exemple, si  $X$  mesure une certaine distance aléatoire exprimée naturellement en  $m$ , alors  $\text{Var}(X)$ , si on devait lui coller une unité, serait en  $m^2$ ... Et donc, comme c'est une moyenne quadratique, il faut aussi se souvenir qu'avant toute interprétation directe de la variance, un nombre  $x^2$  est beaucoup plus grand que  $x$  si  $x$  est grand, et beaucoup plus petit que  $x$ , si  $x$  est proche de 0.

Plus la variance est grande, plus la dispersion l'est également. La variance peut être infinie.

**Définition 2.28.** L'écart type de  $X$  est défini par

$$\sigma_X = \sqrt{\text{Var}(X)}$$

L'écart type semble plus naturel que la variance pour mesurer les écarts à la moyenne, car cette fois,  $\sigma_X$  a la bonne dimension. Il y en a encore plus naturel encore, comme l'écart absolu moyen  $\mathbb{E}(|X - \mathbb{E}(X)|)$ . Seulement, c'est bien la variance que la tradition probabiliste a consacrée<sup>2</sup>. La principale raison tient au fait que la variance se calcule bien et apparaît comme étant un paramètre naturel dans de nombreux modèles...

**Proposition 2.29.** [Propriétés de la variance]

Soit  $X$  est une v.a.r. sur  $(\Omega, \mathbb{P})$ ,  $a$  et  $b$  deux réels.

(i)  $\text{Var}(X) = \sum_x (x - \mathbb{E}(X))^2 \mathbb{P}(X = x)$

(ii)  $\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$

(iii)  $\text{Var}(aX + b) = a^2 \text{Var}(X)$

2. notez que l'écart moyen  $\mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X))$ , sans valeur absolue, vaut 0 et ne mesure rien du tout, puisque  $\mathbb{E}(X)$  étant une constante, par la Proposition 2.25,  $\mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X)) = \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X) = 0$

*Démonstration.* (i) On applique la Proposition 2.24 :  $\Psi(X) = (X - m)^2$  avec  $m = \mathbb{E}(X)$ .

(ii) On développe la formule dans définition 2.27 :  $\mathbb{E}((X - m)^2) = \mathbb{E}(X^2 + m^2 - 2Xm)$ . On utilise encore la linéarité de l'espérance ici (il suffit encore d'utiliser (2.11) pour montrer qu'on a bien le droit) : on obtient  $\mathbb{E}((X - m)^2) = \mathbb{E}(X^2) + m^2 - 2m \times m = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$ .

(iii) Tout d'abord, on sait que  $\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b$ . Ainsi,  $\mathbb{E}((aX + b - \mathbb{E}(aX + b))^2) = \mathbb{E}((aX - a\mathbb{E}(X))^2)$  et on conclut aisément.  $\square$

**Exemple 2.13.** Si  $X$  est une variable de loi  $\mathbb{P}(X = 1) = 1/3$ ,  $\mathbb{P}(X = 2) = 1/6$ ,  $\mathbb{P}(X = 4) = 1/2$ , alors

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{6} \times 2 + \frac{1}{2} \times 4 = 8/3,$$

et

$$\mathbb{E}(X^2) = \frac{1}{3} \times 1^2 + \frac{1}{6} \times 2^2 + \frac{1}{2} \times 4^2 = 9,$$

donc

$$\text{Var}(X) = 9 - (8/3)^2 = 17/9,$$

et l'écart type est  $\sigma_X = \sqrt{17/9}$ .

**Proposition 2.30.** Si  $X$  est une variable aléatoire telle que  $\text{Var}(X) = 0$  alors  $\mathbb{P}(X = \mathbb{E}(X)) = 1$  (on dit que  $X$  est égale à son espérance ou, en jargon probabiliste, presque sûrement égale à son espérance).

*Démonstration.* Utilisons la première formule de la Proposition 2.29 : puisque  $\text{Var}(X) = \sum_x (x - \mathbb{E}(X))^2 \mathbb{P}(X = x)$  est une moyenne pondérée de nombres positifs. Si cette moyenne est nulle c'est que les éléments de la somme sont nuls. Puisque  $\mathbb{E}(X)$  est constante, ça veut dire que ou bien  $x = \mathbb{E}(X)$ , ou bien  $\mathbb{P}(X = x) = 0$ . Donc, il y a un seul  $x$  pour lequel la proba  $\mathbb{P}(X = x)$  est non nul, c'est  $x = \mathbb{E}(X)$ .  $\square$

## 2.3 Deux inégalités...

### 2.3.1 Inégalité de Markov

Idée intuitive : si  $X$  est une variable positive de moyenne finie. La probabilité que  $X$  soit grand est petite.

**Proposition 2.31.** [Inégalité de Markov] Soit  $X$  une variable aléatoire positive sur  $\Omega$ . Pour tout  $x \in \mathbb{R}^+$ , on a :

$$\mathbb{P}(X \geq x) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{x}$$

*Démonstration.* Il s'agit d'une inégalité facile à démontrer :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \mathbb{P}(\omega) \geq \sum_{\omega \in \Omega: X(\omega) \geq x} X(\omega) \mathbb{P}(\omega) \geq \sum_{\omega \in \Omega: X(\omega) \geq x} x \mathbb{P}(\omega) = x \mathbb{P}(X \geq x).$$

$\square$

**Remarque 2.32.** Il y a des cas particuliers où on peut calculer directement  $\mathbb{P}(X \geq x)$ , par exemple, si  $X$  est une variable géométrique de paramètre  $p$ , alors, pour  $x \in \{1, 2, \dots\}$ ,

$$\mathbb{P}(X \geq x) = (1 - p)^x$$

(car ceci correspond à ce que toutes les premières tentatives ont échouées...). L'inégalité de Markov, dans ce cas donne juste

$$\mathbb{P}(X \geq x) \leq \mathbb{E}(X)/x = 1/(px)$$

qui est une inégalité de mauvaise qualité (car  $(1 - p)^x \ll 1/(px)$  pour  $x$  grand).

**Exemple 2.14.** Prenons une variable binomiale  $Y$  de paramètre  $(n, p)$ , donc de moyenne  $np$ . L'inégalité de Markov dit que  $\mathbb{P}(Y \geq x) \leq np/x$ . Cette inégalité n'a donc aucune utilité lorsque  $x \leq np$ . Si  $n = 200$  (200 expériences), et  $p = 1/2$  (une chance sur 2 de succès)

$$\mathbb{P}(Y \geq x) \leq 100/x$$

et l'inégalité devient non triviale pour  $x \geq 100$ .

### 2.3.2 Inégalité de Bienaymé-Tchebichev

Idée intuitive : plus la variance de  $X$  est petite, plus  $X$  a des chance d'être proche de sa moyenne :

**Proposition 2.33.** [Inégalité de Bienaymé-Tchebichev] Soit  $X$  une v.a.r. et  $x > 0$  un réel. On a :

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq x) \leq \frac{\text{Var}(X)}{x^2}.$$

Cette inégalité montre l'intérêt de la variance pour mesurer la dispersion d'une v.a..

*Démonstration.*

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq x) &= \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)|^2 \geq x^2) \\ &\stackrel{\text{Markov}}{\leq} \frac{\mathbb{E}(|X - \mathbb{E}(X)|^2)}{x^2} = \frac{\text{Var}(X)}{x^2}. \end{aligned}$$

□

**Exemple 2.15.** Reprenons  $X$  suivant la loi binomiale  $(n, p)$  : l'inégalité de Bienaymé-Tchebichev dit que, pour tout  $x > 0$ ,

$$\mathbb{P}(|X - np| \geq x) \leq \frac{\text{Var}(X)}{x^2} = \frac{np(1-p)}{x^2}$$

et donc, cette fois, dès que  $x \geq \sqrt{np(1-p)}$ , on a une info non triviale. Toujours pour  $(n, p) = (1000, 1/2)$ , on obtient, par exemple, pour  $x = 50$ ,

$$\mathbb{P}(|X - 500| \geq 50) \leq 250/50^2 = 1/10.$$

La vraie proba est 0.00173... donc, une fois encore, cette inégalité n'est pas super bonne... Si on prend  $x = 20$ , on trouve  $\mathbb{P}(|X - 500| \geq 20) \leq 250/20^2 = 0.625$  alors que  $\mathbb{P}(|X - 500| \geq 20) = 0.217...$  L'inégalité est plus performante ici sans être super précise non plus.

## 2.4 Lois discrètes importantes

### 2.4.1 loi de Bernoulli

$X$  est une variable de Bernoulli de paramètre  $p \in [0, 1]$  si

$$\mathbb{P}(X = 1) = p, \quad \mathbb{P}(X = 0) = 1 - p.$$

On note  $X \sim \mathcal{B}(p)$ .

$$\mathbb{E}(X) = p, \quad \text{Var}(X) = p(1 - p).$$

Pour le calcul de la variance, il faut remarquer que

$$\mathbb{E}(X) = p \times 1 + (1 - p) \times 0 = p, \quad \mathbb{E}(X^2) = p \times 1^2 + (1 - p) \times 0^2 = p$$

et donc

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = p - p^2 = p(1 - p). \quad (2.12)$$

**Exemple 2.16.** Toto lance une pièce où il y a une face 1, et une face 0. Chaque fois, il fait pile ou face avec proba  $1/2$ , et les résultats des lancers sont indépendants. Notons  $P$  le produit de 12 résultats successifs : Chaque lancer est une  $\mathcal{B}(1/2)$ , et  $P \sim \mathcal{B}(1/2^{12})$ .

### 2.4.2 Loi binomiale

$X$  est une variable binomiale de paramètre  $(n, p)$ ,  $p \in [0, 1]$  si

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} \text{ pour } k \in \{0, 1, \dots, n\} \text{ et } 0 \text{ sinon.} \quad (2.13)$$

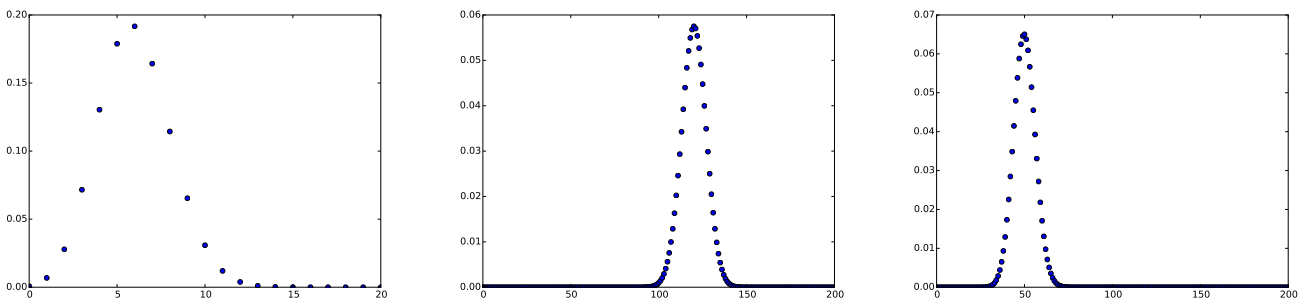


FIGURE 4 – Distribution binomial paramètres  $(20, 0.3)$ ,  $(40, 0.6)$  et  $(200, 0.25)$

**Lemme 2.34.** Si  $B_1, \dots, B_n$  sont des variables de Bernoulli de paramètre  $p$  indépendantes alors la loi de  $B_1 + \dots + B_n$  est la loi binomiale de paramètre  $(n, p)$ . Autrement dit, le nombre de succès lors de  $n$  expériences indépendantes de probabilité de succès  $p$  est une variable de loi  $B(n, p)$ .

*Démonstration.* Calculons  $\mathbb{P}(B_1 + \dots + B_n = k)$  pour un  $k$  dans  $\{0, 1, \dots, n\}$ . On voit que parmi les  $B_i$ ,  $k$  doivent valoir 1, et  $n - k$  doivent valoir 0. Puisqu'il y a  $\binom{n}{k}$  sous ensembles d'indices de cardinal  $n$ , et que la probabilité que  $k$   $B_i$ 's données valent 1 est  $p^k$  et que la proba pour les autres de valoir 0 est  $(1 - p)^{n-k}$ , on a bien  $\mathbb{P}(B_1 + \dots + B_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$ .  $\square$

On en déduit que pour  $X \sim B(n, p)$ .

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(B_1 + \dots + B_n) = np \quad (2.14)$$

et

$$\text{Var}(X) = \text{Var}(B_1 + \dots + B_n) = \text{Var}(B_1) + \dots + \text{Var}(B_n) = np(1 - p) \quad (2.15)$$

puisque les Bernoulli sont indépendantes.

### 2.4.3 Loi uniforme

$X$  est une variable uniforme sur  $\{1, \dots, n\}$  si

$$\mathbb{P}(X = i) = \frac{1}{n} \text{ pour tout } i \in \{1, \dots, n\}.$$

On note  $X \sim \mathcal{U}(\{1, \dots, n\})$ . On a

$$\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2}, \text{ et } \text{Var}(X) = \frac{n^2-1}{12}. \quad (2.16)$$

*Démonstration.*

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} = \frac{n(n+1)}{2n} = \frac{n+1}{2}$$

et

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$$

d'où

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{4} = \frac{n^2-1}{12}.$$

$\square$

### 2.4.4 Loi géométrique

$X$  est une variable géométrique de paramètre  $0 < p < 1$  si

$$\mathbb{P}(X = k) = p(1 - p)^{k-1} \text{ pour } k \geq 1.$$

On notera  $X \sim \text{Geo}(p)$  pour dire que  $G$  suit la loi géométrique de paramètre  $p$ .

**Lemme 2.35.** Soit  $(B_1, B_2, \dots)$  une suite de variables de Bernoulli de paramètre  $p$  indépendantes. Soit  $G = \min\{k : B_k = 1\}$  l'indice de la première Bernoulli qui vaut 1. On a

$$G \sim \text{Geo}(p).$$

*Démonstration.* On voit bien que  $G$  vaut  $k$  sssi  $B_1 = \dots = B_{k-1} = 0$  et  $B_k = 1$ . La probabilité de cet événement est  $(1-p)^{k-1}p$ .  $\square$

On a

$$\mathbb{E}(X) = 1/p, \quad \text{et} \quad \text{Var}(X) = (1-p)/p^2 \quad (2.17)$$

*Démonstration.* 1ere preuve : On remarque que  $G$  fait 1 avec proba  $p$ , et en cas d'échec a même loi que  $G' = 1 + G$  puisqu'il faut recommencer, mais on a déjà fait un lancer... On voit alors que

$$\mathbb{E}(G) = p + (1-p)\mathbb{E}(G') = p + (1-p) + (1-p)\mathbb{E}(G).$$

On résout et on trouve  $\mathbb{E}(G) = 1/p$ . Même chose, pour

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(G^2) &= p + (1-p)\mathbb{E}((1+G)^2) = p + (1-p)(\mathbb{E}(G)^2 + 2\mathbb{E}(G) + 1) \\ &= p + (1-p)(\mathbb{E}(G)^2 + 2/p + 1) \end{aligned}$$

On résout, on trouve  $\mathbb{E}(G^2) = (2-p)/p^2$ , puis on utilise  $\text{Var}(G) = \mathbb{E}(G^2) - \mathbb{E}(G)^2 = (1-p)/p^2$ .

2ème preuve : On peut faire le calcul en procédant comme suit :

$$\mathbb{E}(X) = p \sum_{k \geq 1} k(1-p)^{k-1}$$

Il s'agit de  $p$  fois une somme infinie; pour nous en sortir, il faut reconnaître dans cette somme une identité. Il faut oublier que  $p$  est une constante, et remplacer  $p$  par  $x$  et voir le résultat comme une fonction de  $x$  (une série entière) : On écrit

$$\sum_{k \geq 1} k(1-x)^{k-1} = \sum_{k \geq 0} (-(1-x)^k)' = -(1/x)' = 1/x^2$$

et maintenant, on voit donc que  $\mathbb{E}(X) = p/p^2 = 1/p$ . Pour la variance, même chose :

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X(X-1)) + \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X)^2. \quad (2.18)$$

on voit qu'on a besoin de calculer

$$\mathbb{E}(X(X-1)) = p(1-p) \sum_{k \geq 2} k(k-1)(1-p)^{k-2}$$

De nouveau, on introduit

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq 0} k(k-1)(1-x)^{k-2} &= \sum_{k \geq 0} ((1-x)^k)'' \\ &= (1/x)'' = \frac{2}{x^3} \end{aligned}$$

d'où  $\mathbb{E}(X(X-1)) = 2p(1-p)/p^3$  et enfin<sup>3</sup>

$$\text{Var}(X) = 2(1-p)/p^2 + 1/p - 1/p^2 = (1-p)/p^2.$$

$\square$

---

3. Pour rendre cette preuve rigoureuse, il faut bien sûr justifier le fait qu'on ait dérivé (puis intégré) ces séries terme à terme. On a "bien le droit", comme on l'apprend dans les cours sur les séries de fonctions, car on a affaire à des séries entières. La convergence est uniforme dans le disque de convergence ( $\mathcal{B}(0,1)$  ici) aussi bien pour  $\sum_{k \geq 1} k(1-x)^{k-1}$  que pour ses dérivées.

### 2.4.5 Loi de Poisson

$X$  suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda$ , (on note  $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ ) si

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} \text{ pour } k \in \mathbb{N} \quad (2.19)$$

On a

$$\mathbb{E}(X) = \lambda, \quad \text{Var}(X) = \lambda. \quad (2.20)$$

L'importance de cette loi apparaîtra plus tard.

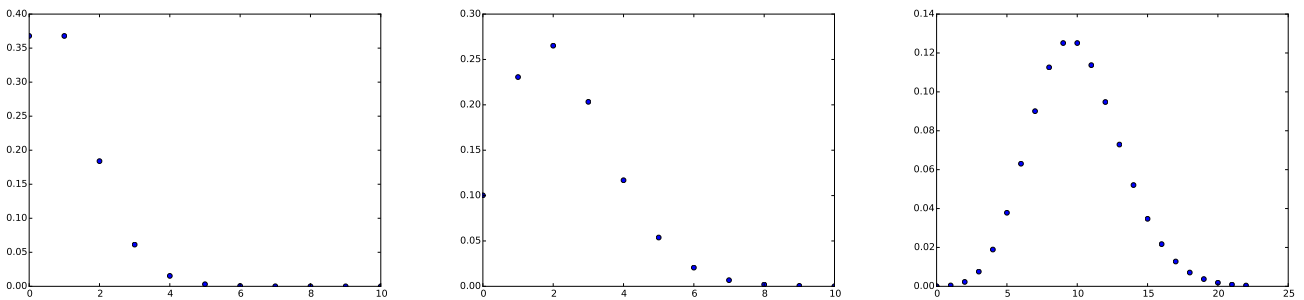


FIGURE 5 – Distribution de Poisson de paramètres 1, 2.3 et 10.

*Démonstration.* Tout d'abord, rappelons l'identité importante :

$$\exp(a) = \sum_{k=0}^{+\infty} a^k / k!, \text{ pour tout } a \in \mathbb{R}.$$

On a donc

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k \geq 0} \frac{k e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \lambda \sum_{k \geq 1} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda.$$

Ensuite, on écrit,

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X(X-1)) + \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X)^2.$$

Et donc, il reste à calculer

$$\mathbb{E}(X(X-1)) = e^{-\lambda} \sum_{k \geq 2} \frac{k(k-1)\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \lambda^2 \sum_{k \geq 2} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} = \lambda^2$$

d'où  $\text{Var}(X) = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$ . □

## 2.5 Loi d'un couple de v.a.

Prenons  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires définies sur un même espace de probabilité discret  $(\Omega, \mathbb{P})$  et à valeurs respectivement dans  $\Omega'$  et  $\Omega''$ . On s'intéresse à la paire  $(X, Y)$ , que l'on considère comme une variable aléatoire définie sur  $\Omega$  est à valeurs dans  $\Omega' \times \Omega''$  : c'est juste l'application

$$\begin{aligned} (X, Y) : \Omega &\longrightarrow \Omega' \times \Omega'' \\ \omega &\longmapsto (X(\omega), Y(\omega)) \end{aligned}$$

**Exemple 2.17.** Par exemple, dans le jeu du dé on peut imaginer qu'en plus d'Alice et Bob, 2 autres joueurs, Christophe et Denis ont décidé que si le dé tombait sur  $a$  alors Christophe donnerait  $Y(a) = (a-1)^2(a-4)$  à Denis. Maintenant, on voit que la paire  $(X, Y)$  est une variable aléatoire de  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^2$ .

	1	2	3	4	5	6
$X$	0	-2	-2	0	4	10
$Y$	0	-2	-4	0	16	50

L'ensemble des valeurs prises par  $X$  et  $Y$  est discret, et donc celles prises par  $(X, Y)$  aussi ; dans cet exemple, il s'agit de  $\{(0, 0), (-2, -2), (-2, -4), (4, 16), (10, 50)\}$ . La loi de la paire décrit une fois encore, pour chaque partie de l'ensemble image, la probabilité que  $(X, Y)$  soit dans cet ensemble. On a ici, par exemple :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}((X, Y) = (0, 0)) &= 2/6, \\ \mathbb{P}((X, Y) = (4, 16)) &= 1/6, \\ \mathbb{P}((X, Y) = (10, -2)) &= 0. \end{aligned}$$

Définissons le cadre général :

**Définition 2.36.** Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires définies sur un même espace de probabilité discret  $(\Omega, \mathbb{P})$  et à valeurs respectivement dans  $\Omega'$  et  $\Omega''$ . La loi du couple  $(X, Y)$  est la mesure de probabilité sur  $\Omega' \times \Omega''$  définie par

$$\mathbb{P}((X, Y) \in A) = \mathbb{P}(\{\omega : (X(\omega), Y(\omega)) \in A\}),$$

pour tout  $A \in \text{Parties}(X(\Omega) \times Y(\Omega))$ . Puisque  $(X, Y)$  est une variable aléatoire discrète, la loi de  $(X, Y)$  est caractérisée par  $\mathbb{P}((X, Y) = (x, y))$  pour tout  $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$ .

Si l'on connaît la loi de jointe du couple  $(X, Y)$  alors pour tout  $a \in \Omega'$  et tout  $b \in \Omega''$ , on a, par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = a) &= \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}((X, Y) = (a, y)) \\ \mathbb{P}(Y = b) &= \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}((X, Y) = (x, b)). \end{aligned}$$

Donnée la loi du couple  $(X, Y)$ , les lois de  $X$  et de  $Y$  s'appellent lois marginales. Ainsi, la loi du couple  $(X, Y)$ , détermine la loi de  $X$  et de  $Y$ , mais l'inverse est faux.



### Tableau de distribution

Pour deux variables discrètes, on peut représenter la loi de  $(X, Y)$  à l'aide d'une matrice potentiellement infinie  $\mathbb{P}((X, Y) = (x_i, y_j))$ , où  $x_i$  parcourt  $X(\Omega)$  et  $y_j$  parcourt  $Y(\Omega)$ . Il y a des choses que l'on peut bien voir dans ce tableau. Voici un exemple :

$X \setminus Y$	4	9	12	15	loi de $X$
0	0.1	0.05	0.02	0.12	0.29
1	0.07	0.1	0	0.08	0.25
2	0.02	0.06	0.14	0.04	0.26
3	0.05	0.1	0.04	0.01	0.20
loi de $Y$	0.24	0.31	0.20	0.25	1

Sommer sur les lignes, resp. sur les colonnes, donne la loi marginale de  $X$ , et celle de  $Y$ .

**Définition 2.37.** Soient  $X$  et  $Y$  deux variables discrètes. Les variables  $X$  et  $Y$  sont dites indépendantes, si pour tout  $A \in \text{Parties}(X(\Omega))$ , pour tout  $B \in \text{Parties}(Y(\Omega))$ ,

$$\mathbb{P}((X, Y) \in A \times B) = \mathbb{P}(X \in A) \mathbb{P}(Y \in B). \quad (2.21)$$

Ainsi, les variables  $X$  et  $Y$  sont dites indépendantes, si tout événement qui concerne la première est indépendant de tout événement qui concerne la seconde : pour tout  $A$  et tout  $B$  inclus respectivement dans  $\Omega'$  et  $\Omega''$ , l'événement  $\{\omega : X(\omega) \in A\}$  est indépendant de  $\{\omega : Y(\omega) \in B\}$ .

**Exemple 2.18.** En regardant un peu l'exemple 2.7, on voit que si on définit sur  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  les variables aléatoires  $X(a) = a \bmod 2$  et  $Y(a) = a \bmod 3$ , alors si  $\Omega$  est muni de l'équiprobabilité,  $X$  et  $Y$  sont indépendantes.

**Proposition 2.38.**  $X$  et  $Y$  sont indépendantes si et seulement si pour tout  $(a, b) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$

$$\mathbb{P}((X, Y) = (a, b)) = \mathbb{P}(X = a) \mathbb{P}(Y = b). \quad (2.22)$$

*Démonstration.* ■ D'abord, on voit que si on prend  $A$  et  $B$  réduits respectivement à  $\{a\}$  et  $\{b\}$ , la formule (2.21) implique (2.22).

■ Maintenant, pour la réciproque, notons que

$$\mathbb{P}((X, Y) \in A \times B) = \sum_{(a,b) \in A \times B} \mathbb{P}((X, Y) = (a, b)) = \sum_{a \in A} \sum_{b \in B} \mathbb{P}(X = a) \mathbb{P}(Y = b) \quad (2.23)$$

$$= \left( \sum_{a \in A} \mathbb{P}(X = a) \right) \left( \sum_{b \in B} \mathbb{P}(Y = b) \right) = \mathbb{P}(X \in A) \mathbb{P}(Y \in B) \quad (2.24) \quad \square$$

Dans la représentation de la loi par tableau de distribution, on voit qu'il y a indépendance si la masse d'une case égale le produit de la masse de la ligne et de la colonne qui la contiennent.

### Loi de la somme

Soit  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires réelles sur un même espace de probabilité  $(\Omega, \mathbb{P})$ . Notons  $Z$  la variable aléatoire définie par

$$Z = X + Y.$$

Alors pour tout  $c \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{P}(Z = c) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}((X, Y) = (x, c - x)) \quad (2.25)$$

Si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes, on a :

$$\mathbb{P}(Z = c) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = c - x).$$

La loi de  $Z$  est donnée par le produit de convolution de la loi de  $X$  par celle de  $Y$ . Bien sûr, on peut définir de la même manière la loi de n'importe quelle fonction de 2 variables aléatoires :

**Définition 2.39.** Soit  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires réelles discrètes définies sur un même espace de probabilité  $(\Omega, \mathbb{P})$ . Pour  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , on a

$$Z := f(X, Y)$$

est une variable aléatoire, et

$$\mathbb{P}(Z = z) = \mathbb{P}(f(X, Y) = z) = \sum_{(x,y):f(x,y)=z} \mathbb{P}((X, Y) = (x, y)).$$

**Proposition 2.40.** (Propriétés de l'espérance mathématique) Soient  $X$  et  $Y$  deux v.a.r. définie sur  $(\Omega, \mathbb{P})$ , et  $\lambda$  et  $c$  deux réels : L'espérance est linéaire : si  $X$  et  $Y$  ont tous deux une moyenne,

(i) On a  $\mathbb{E}(\lambda X) = \lambda \mathbb{E}(X)$

(ii) et  $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$ .

(iii) Si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes alors, si ces quantités existent

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y). \quad (2.26)$$

*Démonstration.* (i) Multiplier par  $\lambda$  commute avec la somme.

(ii)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X + Y) &= \sum_{(x,y)} (x + y)\mathbb{P}((X, Y) = (x, y)) = \sum_x \left( \sum_y (x + y)\mathbb{P}(X = x, Y = y) \right) \\ &= \sum_x \left( \sum_y x\mathbb{P}(X = x, Y = y) + \sum_y y\mathbb{P}(X = x, Y = y) \right) \\ &= \sum_x x\mathbb{P}(X = x) + \sum_y y\mathbb{P}(Y = y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) \end{aligned}$$

(iii) On écrit, une fois encore  $\mathbb{E}(XY) = \sum_{x,y} xy\mathbb{P}((X, Y) = (x, y)) = \sum_{x,y} xy\mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y) = (\sum_x x\mathbb{P}(X = x))(\sum_y y\mathbb{P}(Y = y)) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$ .  $\square$

Bon, on a mis un peu de poussière sous le tapis ici, disons que c'est comme cela que ça marche si on ignore les problèmes qui peuvent survenir quand on inverse les ordres de sommations. Pour faire proprement les détails on utilise Fubini et le décret que l'on a pris en définissant l'espérance mathématique Defi. 2.23 ce qui permet de s'assurer de la validité du réarrangement des sommes.

### 2.5.1 Probabilité conditionnelle. Indépendance de v.a.r.

**Définition 2.41.** Soient  $X$  et  $X$  deux v.a.r. définies sur le même espace de probabilité  $\Omega$  et à valeurs dans  $\Omega'$  et  $\Omega''$ . Soient  $x$  et  $y$  deux éléments de  $\Omega'$  et  $\Omega''$ . La probabilité conditionnelle de  $X = x$  sachant  $Y = y$  est définie pour  $(x, y) \in \Omega' \times \Omega''$  tels que  $\mathbb{P}(Y = y) > 0$  par :

$$\mathbb{P}(X = x | Y = y) = \frac{\mathbb{P}((X = x) \cap (Y = y))}{\mathbb{P}(Y = y)}.$$

**Remarque 2.42.** Notons que si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes, alors, si  $\mathbb{P}(Y = y) > 0$ , on a :

$$\mathbb{P}(X = x | Y = y) = \frac{\mathbb{P}((X = x) \cap (Y = y))}{\mathbb{P}(Y = y)} = \frac{\mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y)}{\mathbb{P}(Y = y)} = \mathbb{P}(X = x)$$

Une fois encore, en cas d'indépendance, on interprète les choses comme suit : quelle que soit l'information qu'on apprend concernant  $Y$ , la probabilité de n'importe quel événement concernant  $X$  (c'est-à-dire,  $X \in A$ ) est non modifiée.

**Proposition 2.43.** si  $X$  et  $Y$  sont deux v.a. de variance finie alors :

$$\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2\text{cov}(X, Y) \quad (2.27)$$

où  $\text{cov}(X, Y)$  est la covariance de  $X$  et  $Y$ ,

$$\text{cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) \quad (2.28)$$

$$= \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))), \quad (2.29)$$

et dans le cas où  $X$  et  $Y$  sont indépendants, la covariance est nulle et

$$\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y).$$

*Démonstration.* On écrit tout d'abord

$$\begin{aligned} \text{Var}(X + Y) &= \mathbb{E}((X + Y)^2) - (\mathbb{E}(X + Y))^2 \\ &= \mathbb{E}(X^2 + 2XY + Y^2) - \mathbb{E}(X)^2 - \mathbb{E}(Y)^2 - 2\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) \\ &= \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2(\mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)). \end{aligned}$$

où on identifie bien la formule (2.18) avec la première formule de la covariance. Pour la 2ème formule de covariance, il suffit de développer  $\mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))) = \mathbb{E}(XY - X\mathbb{E}(Y) - Y\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y))$  et utiliser la linéarité de l'espérance pour voir que cela  $= \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y)))$ .

Maintenant, dans le cas où  $X$  et  $Y$  sont indépendants.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(XY) &= \sum_{\Omega} \mathbb{P}(\omega) X(\omega) Y(\omega) \\ &= \sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} \mathbb{P}(X = x \cap Y = y) xy \\ &= \left( \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x) x \right) \left( \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}(Y = y) y \right) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).\end{aligned}$$

et donc  $\text{cov}(X, Y) = 0$  dans ce cas. □

En général,  $\text{Var}(X + Y) \neq \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$ .

**Exemple 2.19.** Reprenons l'exemple 2.17 du jeu de dé, avec les 2 variables  $X$  et  $Y$ . On a

$$\mathbb{E}(X + Y) = \frac{2}{6}(0 + 0) + \frac{1}{6}(-2 - 2) + \frac{1}{6}(-2 - 4) + \frac{1}{6}(4 + 16) + \frac{1}{6}(10 + 50) = \frac{35}{3}$$

et

$$\mathbb{E}((X + Y)^2) = \frac{2}{6}(0 + 0)^2 + \frac{1}{6}(-2 - 2)^2 + \frac{1}{6}(-2 - 4)^2 + \frac{1}{6}(4 + 16)^2 + \frac{1}{6}(10 + 50)^2 = \frac{2026}{3}$$

et donc

$$\text{Var}(X + Y) = \mathbb{E}((X + Y)^2) - \mathbb{E}(X + Y)^2 = \frac{2026}{3} - \left(\frac{35}{3}\right)^2 = 4853/9 = 539.222\dots$$

Par ailleurs, on peut calculer  $\mathbb{E}(X) = 5/3$ ,  $\mathbb{E}(X^2) = 62/3$ ,  $\mathbb{E}(Y^2) = 1388/3$ ,  $\mathbb{E}(Y) = 10$ ,  $\mathbb{E}(XY) = \frac{2}{6}(0 \times 0) + \frac{1}{6}(-2 \times (-2)) + \frac{1}{6}(-2 \times (-4)) + \frac{1}{6}(4 \times 16) + \frac{1}{6}(10 \times 50) = 96$ . La covariance est donc

$$\text{cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = 96 - 10 \times \frac{5}{3} = \frac{238}{3}$$

et on peut maintenant vérifier que le calcul de la variance  $\text{Var}(X + Y)$  pouvait se faire à l'aide de la covariance :

$$\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2\text{cov}(X + Y) = (62/3 - (5/3)^2) + (1388/3 - 10^2) + 2 \frac{238}{3} = 4853/9.$$

Le signe de la covariance est important. Lorsque le signe est positif,  $X$  et  $Y$  ont "tendance" à être du même côté de leur moyenne en même temps. On dit que  $X$  et  $Y$  sont corrélées positivement (négativement si  $\text{cov}(X, Y) < 0$ ). Lorsque  $\text{cov}(X, Y) = 0$ , on dit que  $X$  et  $Y$  ne sont pas corrélées (il peut arriver que  $\text{cov}(X, Y) = 0$  sans que  $X$  et  $Y$  soient indépendantes).

**Proposition 2.44.** Lorsque ces quantités existent, on a :

- (i)  $\text{cov}(X, Y) = \text{cov}(Y, X)$
- (ii)  $\text{cov}(X, X) = \text{Var}(X)$
- (iii)  $\text{cov}(aX + b, Y) = a \text{cov}(X, Y)$

*Démonstration.* Les 3 propriétés sont très simples à vérifier. □

**Proposition 2.45.** Quand  $X$  et  $Y$  sont deux variables aléatoires discrètes à valeurs dans un ensemble  $E$  (prenant un nombre fini ou dénombrable de valeurs) pour toute fonction  $f, g : E \rightarrow \mathbb{R}$ , si  $\mathbb{E}(|f(X)|) < +\infty$  et  $\mathbb{E}(|g(Y)|) < +\infty$  alors

$$\mathbb{E}(f(X)g(Y)) = \mathbb{E}(f(X))\mathbb{E}(g(Y)).$$

*Démonstration.* On écrit par exemple, en partant de la gauche

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(f(X)g(Y)) &=_{(1)} \sum_{(x,y)} \mathbb{P}((X, Y) = (x, y)) f(x)g(y) \\ &=_{(2)} \sum_{(x,y)} \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y) f(x)g(y) \\ &=_{(3)} \left( \sum_x f(x)\mathbb{P}(X = x) \right) \left( \sum_y g(y)\mathbb{P}(Y = y) \right) \\ &= \mathbb{E}(f(X))\mathbb{E}(g(Y)). \end{aligned}$$

Pour (1) : la somme porte sur toutes les valeurs  $(x, y)$  prises par  $(X, Y)$ . Pour (2) on utilise l'indépendance. Pour (3) on doit réarranger les termes : c'est ici que l'on utilise la finitude de  $\mathbb{E}(|f(X)|)$  et  $\mathbb{E}(|g(Y)|)$  qui est une condition suffisante pour le réarrangement des termes (par Fubini). Au passage la finitude de  $\mathbb{E}(|f(X)g(Y)|)$  est aussi suffisante, et d'ailleurs, c'est équivalent, mais souvent un peu moins facile à vérifier. □

## 2.6 Plus de 2 variables ?

On peut bien sûr définir la loi de  $k$  variables aléatoires définie sur le même espace comme la mesure de probabilité  $(\Omega, \mathbb{P})$ ,

$$\mathbb{P}((X_1, \dots, X_k) \in (A_1 \times \dots \times A_k)) = \sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}((X_1(\omega), \dots, X_k(\omega)) \in (A_1 \times \dots \times A_k)).$$

Une fois encore, cette loi est déterminée par les quantités  $\mathbb{P}((X_1, \dots, X_k) = (x_1, \dots, x_k))$  pour tout  $(x_1, \dots, x_k)$  de l'ensemble image. On définit encore l'indépendance de la famille par la propriété,

$$\mathbb{P}((X_{n_1}, \dots, X_{n_j}) \in (A_{n_1} \times \dots \times A_{n_k})) = \prod_{\ell=1}^j \mathbb{P}(X_{n_\ell} \in A_{n_\ell})$$

pour toute sous suite  $n_1 < \dots < n_j$ , et toutes parties  $A_{n_\ell} \in \text{Parties}(X_{n_\ell}(\Omega))$ .

Par contre, on n'étend pas la notion de covariance à plus de 2 variables.

## 2.7 Variables continues

On a vu jusque maintenant des variables aléatoires discrètes sur  $\mathbb{R}$ . La loi de telles variables aléatoires  $X$  est donnée par la probabilité que  $\mathbb{P}(X = x)$  pour tout  $x$  dans  $\mathbb{R}$ , un nombre au plus dénombrable de tels  $x$  possédant une probabilité strictement positive. On a vu également que la fonction de répartition  $x \mapsto F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$  caractérisait la loi de  $X$ .

Si on réfléchit en terme de fonction de répartition, on voit que cette fonction de répartition permet de calculer  $\mathbb{P}(X \in ]a, b]) = F(b) - F(a)$  pour tout intervalle  $]a, b]$ .

Maintenant, prenons une fonction  $F$  quelconque, croissante, valant 0 en  $-\infty$  et 1 en  $+\infty$ . Supposons aussi que  $F$  soit continue à droite (c'est juste pour tenir compte du fait que lorsque  $F$  présente un saut, c'est qu'il y a un atome en  $x$ ). Avec cette fonction  $F$ , on peut définir une loi de proba sur  $\mathbb{R}$ , en décrétant, que  $\mathbb{P}(X \leq x) = F(x)$ .

C'est plus général que le cas discret, car  $F$  peut très bien ne pas présenter de sauts. On peut démontrer que toute mesure de probabilité sur  $\mathbb{R}$  peut-être caractérisée de cette manière, à l'aide d'une fonction de répartition. Celle-ci va déterminer la probabilité que notre variable tombe dans un intervalle.

Il est facile de voir que si on se donne une fonction  $f$  positive ou nulle, d'intégrale 1, alors si on pose

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$$

alors  $F$  possède toutes les caractéristiques d'une fonction de répartition. Nous allons expliquer pourquoi cela détermine entièrement la loi d'une variable aléatoire  $X$  dont la fonction de répartition est  $F$ . La fonction  $f$  sera appelée densité de la loi de  $X$ , ou plus simplement densité de  $X$ .

**Définition 2.46.** Une fonction  $f$  continue par morceaux,

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

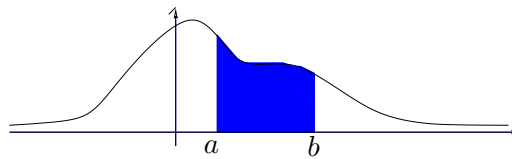
est une densité de probabilité si  $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1$  (on dit aussi, directement qu'une loi  $\mathbb{P}_X$  possède une densité si pour tout intervalle  $A$ ,  $\mathbb{P}_X(A) = \int_A f(x)dx$ ).

**Remarque 2.47.** ■ Ici on suppose une grande régularité pour la densité (continue par morceaux) ; en fait on peut définir des densités nettement moins régulières que cela, mais ça demande des mathématiques un peu avancées

■ Toutes les distributions sur  $\mathbb{R}$  ne possèdent pas forcément ou bien une densité, ou bien une loi discrète, mais cela nous ferait sortir du cadre de ce cours de décrire des exemples différents ici.

**Définition 2.48.** On dit qu'une v.a.  $X$  a pour densité  $f$  si :

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx \text{ pour tout } -\infty \leq a \leq b \leq +\infty.$$



Ainsi la densité  $f$  détermine entièrement la loi de  $X$ . De plus, deux densités  $f_1$  et  $f_2$  déterminant la même loi sont égales (“presque partout”).

**Proposition 2.49.** La fonction de répartition  $F$  de la v.a.  $X$  et sa densité sont liées par la formule

$$F'(x) = f(x).$$

*Démonstration.* (pour être précis, ce résultat n’est vrai que là où  $f$  est continue.)

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(u) du$$

d’où le résultat. □

**Remarque 2.50.** ■ *Lorsqu’une variable aléatoire admet une densité alors comme l’intégrale  $\int_a^a f(x)dx = 0$ , on voit que  $\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \mathbb{P}(a < X < b)$  et donc, la probabilité que  $X$  vaille précisément un certain  $a$  est 0 pour tout  $a$ . Ainsi, cette fois, la loi n’est pas caractérisée par la probabilité de valoir quelque  $a$  que ce soit, contrairement au cas discret.*

■ *On sait calculer la probabilité d’un intervalle. On voit bien qu’on peut calculer aussi la probabilité de l’union de deux intervalles, ou de l’union d’un nombre quelconque d’entre eux. Par contre, il y a une impossibilité générale d’affecter une probabilité à tous sous ensembles de  $\mathbb{R}$ . C’est pour cela que dans les cours avancés de probabilité, on fait appel à la notion de tribu et de Borélien pour désigner les ensembles pour lesquels on peut définir la probabilité. Cela introduit une complication technique importante, même si cela influe peu sur ce qu’on fait in fine. Ici, on va se contenter de calculer des probabilités d’intervalles, pour lesquels, aucun problème n’apparaît.*

## Espérance et Variance

Les sommes du cas discret sont remplacées par des intégrales :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \int_{\mathbb{R}} u f(u) du \\ \mathbb{E}(X^2) &= \int_{\mathbb{R}} u^2 f(u) du \\ \mathbb{E}(g(X)) &= \int_{\mathbb{R}} g(u) f(u) du \end{aligned}$$

Toutes les formules et propriétés du premier chapitre s’étendent ici.

## 2.8 Exemple de la loi normale

**Définition 2.51.** Soit  $m \in \mathbb{R}$  et  $\sigma^2 > 0$ . On dit que  $X$  suit une loi normale de paramètre  $m$  et  $\sigma^2$  si sa densité de probabilité est :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x &\longmapsto \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}. \end{aligned}$$

On note  $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ .

Ainsi définie  $f$  est bien une densité puisque elle est positive, continue et que son intégrale est 1. La preuve de ce dernier point est difficile à trouver seul(e) ! Tout d'abord, on fait un changement de variable, et on pose  $t = (x - m)/\sigma$ , on trouve  $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2/2} dt$ . Ensuite, on calcule le carré de l'intégrale, et on utilise un changement en coordonnées polaire :

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} dt \right)^2 &= \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx \right) \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} dy \right) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-(x^2+y^2)/2} dx dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} \rho e^{-\rho^2/2} d\theta d\rho = \int_{\rho \in \mathbb{R}^+} \rho e^{-\rho^2/2} d\rho = [-\exp(-\rho^2/2)]_0^{+\infty} = 1 \end{aligned}$$

**Proposition 2.52.** Soit  $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$  et  $Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$  :

- i)  $\mathbb{E}(X) = m$ ,  $\text{Var}(X) = \sigma^2$
- ii)  $X \stackrel{\text{loi}}{=} \sigma Y + m$

Preuve :

$$i) \mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} x \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} (\sigma t + m) e^{-t^2/2} dt = m$$

par le changement de variable  $t = (x - m)/\sigma$ .

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= \int_{\mathbb{R}} (x - m)^2 \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} dx \\ &= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} t^2 e^{-t^2/2} dt \\ &= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \left( \left[ -e^{-t^2/2} t \right]_{-\infty}^{+\infty} + \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2/2} dt \right) \\ &= \sigma^2 \end{aligned}$$

ii) Pour prouver ce deuxième point on montre que les fonctions de répartition de deux variables  $X$  et  $\sigma Y + m$  sont égales. Or, on a vu plus haut que ces f.r. déterminaient la loi.

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^x \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u-m}{\sigma}\right)^2}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} du.$$



$$\begin{aligned}
 F_{\sigma Y+m}(x) &= \mathbb{P}(\sigma Y + m \leq x) = \mathbb{P}\left(Y \leq \frac{x-m}{\sigma}\right) \\
 &= \int_{-\infty}^{\frac{x-m}{\sigma}} \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dt
 \end{aligned}$$

Le changement de variable  $t = \frac{u-m}{\sigma}$  dans cette dernière intégrale donne le résultat escompté.

**Corollaire 2.53.** Si  $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$  alors :

$$\frac{X - m}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

Ainsi tout calcul impliquant des normales se ramène à la loi normale centrée réduite.

La fonction de répartition de la loi normale ne possède pas de formule plus simple que

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dt.$$

On est donc "réduit" à utiliser des tables pour connaître  $F$ .

## 2.9 D'autres lois continues

### 2.9.1 Loi uniforme sur $[0, 1]$

La loi uniforme sur  $[0, 1]$  dont la densité est simplement  $f(x) = 1_{[0,1]}(x)$ , c'est à dire, la fonction valant 1 pour  $x \in [0, 1]$  et 0 sinon. On a alors pour  $0 \leq a \leq b \leq 1$ , pour  $U$  une v.a. suivant cette loi

$$\mathbb{P}(a \leq U \leq b) = \int_a^b 1 dx = b - a.$$

On a  $\mathbb{E}(U) = 1/2$ ,  $\text{Var}(U) = \mathbb{E}(U^2) - (1/2)^2 = 1/3 - 1/4 = 1/12$ .

On peut définir aussi une loi uniforme  $U_{a,b}$  sur un intervalle  $[a, b]$ ; elle vérifie

$$U_{a,b} = a + (b - a)U; \tag{2.30}$$

la densité bien sûr est  $1_{[a,b]}(x)/(b - a)$ , et on obtient par (2.30),

$$\mathbb{E}(U_{a,b}) = (a + b)/2, \quad \text{Var}(U_{a,b}) = (b - a)^2/12.$$

### 2.9.2 Loi exponentielle

On appelle loi exponentielle, la loi de densité

$$f(x) = e^{-x} 1_{[0,+\infty[}(x).$$

Si on note  $\xi$  une variable de cette loi, on obtient

$$\mathbb{E}(\xi) = \int_0^{+\infty} x e^{-x} dx = 1$$

et en faisant des intégrations par partie on trouve  $\mathbb{E}(\xi^2) = \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx = [-x^2 e^{-x}]_0^{+\infty} + 2 \int_0^{+\infty} x e^{-x} dx = 0 + 2$ . On obtient donc

$$\text{Var}(\xi) = 1.$$

La fonction de répartition est

$$F(x) = (1 - e^{-x}) 1_{[0, +\infty[}(x).$$

Il existe plus généralement, une loi exponentielle de paramètre  $m$  : une variable  $\xi_m$  de cette loi s'obtient en prenant

$$\xi_m = m\xi. \quad (2.31)$$

Pour s'en souvenir : le paramètre s'appelle  $m$  car c'est la moyenne et donc c'est par (2.31) qu'on l'obtient (dans les autres formules, qui suivent, c'est moins intuitif). Du coup, pour retrouver la fonction de répartition, c'est facile

$$\mathbb{P}(\xi_m \leq x) = \mathbb{P}(m\xi \leq x) = \mathbb{P}(\xi \leq x/m) = 1_{[0, +\infty[}(x) \left(1 - e^{-x/m}\right)$$

et donc sa densité est

$$f_m(x) = \frac{e^{-x/m}}{m} 1_{[0, +\infty[}(x).$$

Pour la moyenne

$$\mathbb{E}(\xi_m) = m, \quad \text{Var}(\xi_m) = m^2.$$

La loi exponentielle est appelée la loi sans mémoire, car elle vérifié la propriété suivante (quel que soit son paramètre) :

$$\mathbb{P}(\xi \geq t + s \mid \xi \geq s) = \mathbb{P}(\xi \geq t), \text{ pour tout } s, t \geq 0.$$

Autrement dit, si on voit  $\xi$  comme une durée de vie aléatoire d'un objet : la durée résiduelle de vie sachant que l'objet à déjà vécu  $s$ , a même loi qu'un objet qui neuf. C'est la seule loi à support  $\mathbb{R}^+$  qui à cette propriété (il y a une variable discrète, la loi géométrique, qui a la même probabilité).

### 2.9.3 Loi de Cauchy

Il s'agit de la loi de densité

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1 + x^2}.$$

Il s'agit d'une loi pour laquelle la moyenne n'existe pas (même si elle est symétrique, sa moyenne n'est pas définie). Si on note  $C_1, \dots, C_n$  des variables aléatoires de loi de Cauchy alors on peut montrer que leur moyenne

$$\frac{C_1 + \dots + C_n}{n}$$

est aussi une variable de Cauchy. On voit donc ici encore que  $\frac{C_1 + \dots + C_n}{n}$  ne converge pas vers une constante, comme c'est le cas par la loi des grands nombres pour des variables aléatoires qui ont une moyenne. Il est bon de se souvenir de ce cas : il existe des variables qui n'ont pas de moyenne !

### 3 ——— Rappels : Théorèmes limites en probabilité ———

#### Table des matières

3.1	Convergence en probabilité . . . . .	39
3.2	Loi faible des grands nombres . . . . .	39
3.3	Convergence en loi . . . . .	40

Les théorèmes limites en probabilité ont pour but de décrire le comportement asymptotique d'une suite de variables aléatoires  $(X_n, n \geq 1)$ , ou alors, le comportement asymptotique de la loi de  $X_n$  (par exemple, de sa fonction de répartition).

Il est maintenant bien connu que lorsque l'on reproduit une expérience aléatoire, comme par exemple, lancer une pièce, alors, un phénomène de régularisation apparaît : si on note  $p_n$  la proportion de pile à l'instant  $n$ , alors la suite aléatoire  $p_n$  converge... Ce phénomène est si bien intégré, que l'on pense souvent que la définition même de la probabilité d'avoir pile est la limite en question. On a déjà discuté de la difficulté de définir la probabilité en passant par là, nous n'y reviendrons pas. Mais, ces phénomènes de régularisation sont nettement plus généraux que cela, et concernent, pour ainsi dire tous les phénomènes aléatoires :

- par exemple le nombre de naissances en France, par année, de 2010 à 2014 : 830 000 puis 823 400, 821 000, 811 500, puis 818 600. C'est très régulier, non ? Et de même, le nombre de bacheliers fluctue peu, le nombre d'accidents domestiques ou de la route, etc.
- si on vide du sable sur le sol, les milliers de grains qui tombent aléatoirement vont former un joli tas régulier... et d'ailleurs, le temps d'écoulement lui même est tellement régulier qu'on a inventé des sabliers pour mesurer le temps,
- les phénomènes de désintégration nucléaire de l'uranium, totalement aléatoires, le sont globalement nettement moins quand on en amasse des centaines de kilos... On peut alors prédire les phénomènes, les contrôler (le plus souvent...), et fabriquer des centrales nucléaires.

Lorsqu'il a été remarqué au 18ème siècle que la mortalité annuelle fluctuait peu, et que plus précisément, la mortalité par âge fluctuait peu, des produits financiers ont été créés : les assurances décès. C'est semblait-il, l'une des premières études statistiques publiées, qui a fait grand bruit à l'époque, car cette régularité n'avait pas été perçue auparavant, et a donc beaucoup surpris.

Les modèles évoqués plus haut sont des phénomènes complexes, et bien sûr, on ne va pas les étudier ici. Par contre, ce qu'on va voir rapidement dans cette section c'est, dans des cas plus simples, ce que sont ces phénomènes de régularisation, appelés, "théorèmes limites" en théorie des probabilités. Il y en a de deux types<sup>4</sup>, et c'est important, conceptuellement, de les différencier.

- Le premier type de convergence, est la convergence en probabilité : il s'agit de la convergence d'une suite aléatoire  $(X_n)$  vers une limite, qui peut être aléatoire. La définition est donnée plus bas,
- Le deuxième type de convergence est la convergence en loi ; on devrait dire, convergence de la loi, pour éviter certaines confusions. L'idée est différente : on dit qu'une suite  $(X_n)$  converge en loi, lorsque la suite

---

4. il y en a en fait davantage, mais on peut toujours les classer dans les 2 familles exposées ici

des lois des  $X_n$  converge. Ainsi, ça ne veut pas dire que la suite  $(X_n)$  se régularise, mais que la suite de fonction de répartition associées  $(F_n)$  se régularise.

### 3.1 Convergence en probabilité

**Définition 3.1.** Soit  $X, X_1, X_2, \dots$  une suite de variables aléatoires définies sur un espace de probabilité. On dit que la suite de v.a.r.  $(X_n)$  converge en probabilité vers la variable aléatoire  $X$ , si pour tout  $\varepsilon > 0$

$$\mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

On note  $X_n \xrightarrow{\text{proba}} X$ .

**Exemple 3.20.** Prenons une suite  $(B_n, n \geq 1)$  de v.a. indépendante de Bernoulli  $B(p)$  (pour le  $p$  de votre choix). On construit pour tout  $n$ ,  $X_n = \sum_{j=1}^n B_j/2^j$ , et  $X$  la somme  $X = \sum_{j \geq 1} B_j/2^j$ . Autrement dit, en base 2,  $X$  possède des chiffres après la virgule aléatoires, indépendants, et uniformes. On obtient  $X_n$  en ne conservant que les  $n$  premiers chiffres. On voit alors que  $X_n$  converge vers  $X$  puisqu'on a  $|X_n - X| \leq 1/2^n$ , de sorte que pour  $\varepsilon > 0$  fixé,  $\mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) = 0$  pour  $n$  assez grand. (On peut voir autrement que la suite  $(X_n, n \geq 0)$  converge : elle est croissante, bornée par 1, et donc, elle converge). Ainsi la suite  $(X_n)$  converge en probabilité, et dans ce cas, la limite est aléatoire... c'est  $X$ .

**Lemme 3.2.** Soit  $X, X_1, X_2, \dots$  une suite de v.a. définies sur le même espace de probabilité telles que,

$$\lim_n \mathbb{E}((X_n - X)^2) = 0$$

alors

$$X_n \xrightarrow{\text{proba}} X.$$

*Démonstration.* Par Markov, on a :

$$\mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) = \mathbb{P}(|X_n - X|^2 \geq \varepsilon^2) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbb{E}((X_n - X)^2).$$

Donc, puisque par hypothèse le terme de droite tend vers 0, celui de gauche aussi...  $\square$

### 3.2 Loi faible des grands nombres

**Théorème 3.3.** (loi faible des grands nombres) Soit  $(X_n, n \geq 1)$  une suite de v.a. indépendantes et de même loi, et de moyenne  $m$ . On a

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(X_1) = m. \quad (3.1)$$

**Exemple 3.21.** Par exemple, si les  $X_j$  sont des variables aléatoires de Bernoulli indépendantes  $B(p)$ , alors  $\mathbb{E}(X_1) = p$ . On obtient

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \xrightarrow{\text{proba}} p.$$

Puisque  $\bar{X}_n$  est la proportion de Bernoulli qui valent 1, c'est la loi faible des grands nombres qui affirme que la proportion de *pile* dans une suite de pile ou face tend vers  $1/2$ . C'est donc la loi des grands nombres qui fait le lien entre la probabilité "abstraite"  $P$  d'un événement  $A$  que l'on a définie au début du cours, et la proportion empirique asymptotique des événements  $A$  obtenus dans une suite d'expériences aléatoires.

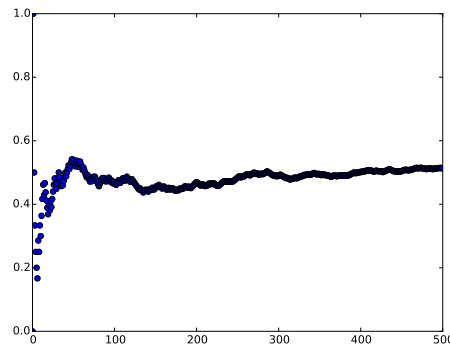


FIGURE 6 – Traçage du graphe  $n \mapsto p_n$ , avec  $p_n$  proportion à l'instant  $n$  du nb de piles dans une suite de pile-face aléatoires indépendants, avec proba de pile valant  $1/2$ . On perçoit sur le dessin la convergence annoncée.

*Démonstration.* On donne une preuve sous la condition supplémentaire de l'existence d'une variance finie : On suppose donc que  $\text{var}(X_1) = \sigma^2$ , et on note  $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$ . On a  $\mathbb{E}(\bar{X}_n) = m$  et  $\text{Var}(\bar{X}_n) = \frac{\sigma^2}{n}$ . Ainsi

$$\mathbb{E}((\bar{X}_n - M)^2) = \text{Var}(\bar{X}_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Ce qui montre que  $\bar{X}_n \xrightarrow{\text{proba}} m$  d'après le lemme précédent.  $\square$

### 3.3 Convergence en loi

**Définition 3.4.** Soit  $(X_n)_n$  une suite de v.a.r. de fonctions de répartition respectives  $F_n$ . On dit que la suite  $(X_n)_n$  converge en loi vers la v.a.r.  $X$  (de fonction de répartition  $F$ ) si :

$$\lim_n F_n(a) = F(a)$$

pour tout  $a$ , point de continuité de  $F$  (i.e. partout si  $F$  est la fonction de répartition d'une v.a. à densité).

Il s'agit donc de la convergence simple de la suite de fonctions de répartition  $F_n$  (sauf au plus sur l'ensemble des points de discontinuité de  $F$ ).

Une conséquence de cette définition est la suivante :

**Théorème 3.5.** Si  $(X_n)_n$  est une suite de variables discrètes, prenant ses valeurs sur  $\mathbb{N}$ ,

$$X_n \xrightarrow{\text{loi}} X$$

si pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$\mathbb{P}(X_n = k) \longrightarrow \mathbb{P}(X = k).$$

**Proposition 3.6.** (Convergence de la binomiale vers la loi de Poisson)

Soit  $X_n$  une suite de v.a. de loi binomiale de paramètre  $\mathcal{B}(n, \lambda/n)$  et  $X$  une v.a. de Poisson de paramètre  $\lambda$ . On a :

$$X_n \xrightarrow{\text{loi}} X.$$

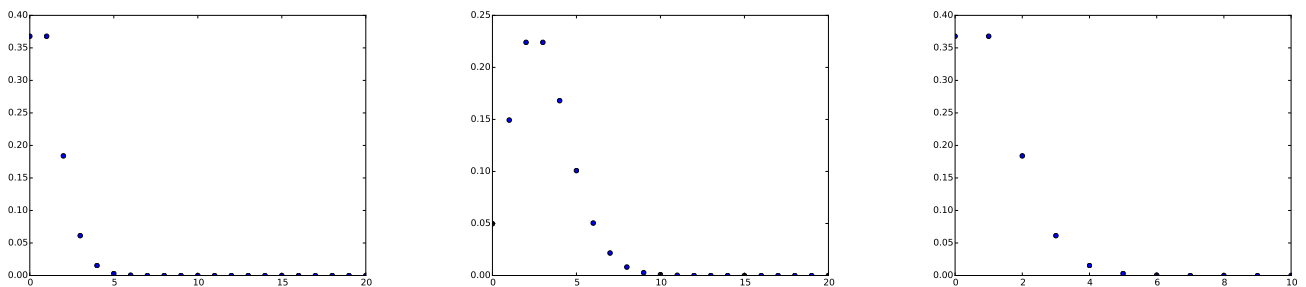


FIGURE 7 – Distribution de Poisson de paramètres 1, 3 et 10

*Démonstration.* Soit  $k$  fixé.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_n = k) &= \frac{n!}{(n-k)!k!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\ &= \frac{\lambda^k}{k!} \frac{n!}{(n-k)!n^k} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \end{aligned}$$

Le second terme du produit tend vers 1. Pour le troisième on fait un dl. On obtient :

$$\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = e^{(n-k) \ln(1 - \frac{\lambda}{n})} = e^{(n-k)(-\frac{\lambda}{n} - o(1/n))} = e^{-\lambda + o(1)}$$

d'où

$$\mathbb{P}(X_n = k) \longrightarrow \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$$

□

En pratique, lorsque que  $n$  est grand, on "approxime"  $\mathbb{P}(X_n = k)$  par  $\mathbb{P}(X = k)$ .

**Théorème 3.7.** (Théorème de la limite centrale ) Soit  $(X_n)$  une suite de v.a.r. indépendantes et de même loi, d'espérance finie  $m$  et de variance finie et non nulle  $\sigma^2$ . Notons  $S_n = X_1 + \dots + X_n$  la somme des  $n$  premières variables. On a, pour tout  $x < y$  (finis ou pas) :

$$\mathbb{P}\left(x \leq \frac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} \leq y\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^y \exp(-t^2/2) dt. \quad (3.2)$$

On dit aussi, théorème central limite, TCL, ou TLC. La fonction  $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-t^2/2)$  est appelée, courbe en cloche, courbe de Gauss, densité normale, ou densité Gaussienne.

En pratique, "lorsque  $n$  est grand", on approxime le membre de gauche dans (3.2) par celui de droite.

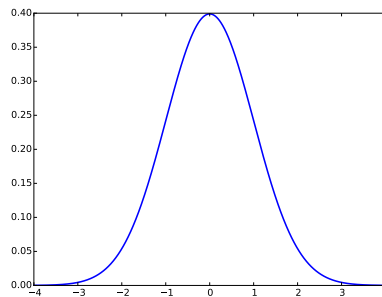


FIGURE 8 – Fonction  $x \mapsto \exp(-x^2/2)$  (bien sûr elle ne fait pas 0 à partir de 4...)

**Exemple 3.22.** Si on prend des  $B_i$  Bernoulli(1/2) indépendantes, alors pour  $S_n = B_1 + \dots + B_n$ , le TCL dit que (pour  $p = 1/2$  ici)

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq y\right) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^y \exp(-t^2/2) dt.$$

Si on trace le graphe  $n \mapsto \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ , alors on ne perçoit pas de régularisation : il n'y en a pas. C'est la fonction de répartition de  $\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$  qui converge ; pour le voir, il faut calculer la loi de cette variable... éventuellement, on peut le voir en faisant des milliers de simulations de  $S_n$  pour approcher sa fonction de répartition empirique, mais en tout cas, pas avec une seule.

**Exemple 3.23.** John joue chaque semaine à un jeu, où il mise 10 euros. Il peut gagner 0 avec proba 0.99, 10 euros, avec proba 0.005, 100 euros avec proba 0.0025 et 2000 euros avec proba 0.0025. Il joue cela pendant 20 ans, toutes les semaines : finalement, il joue 1000 fois. Quel est le bilan financier typique de cet acharnement ?

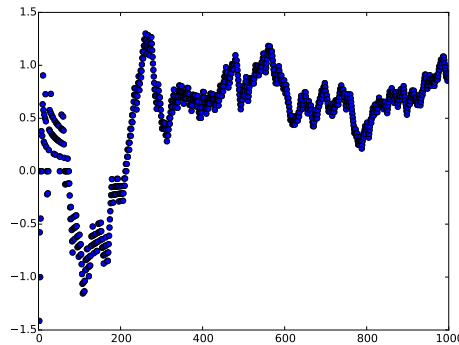


FIGURE 9 – Représentation de  $n \mapsto \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$

Bon, alors, on ne peut pas savoir combien John a gagné ou pas, mais on peut calculer la loi approximative de son gain grâce au TCL. On calcule la moyenne et la variance du gain :

$$\mathbb{E}(G') = 0 \times 0.99 + 10 \times 0.995 + 100 \times 0.0025 + 2000 \times 0.0025 = 5.3$$

mais son vrai gain moyen est  $\mathbb{E}(G) = 5.3 - 10 = -4.7$  car, il ne faut pas oublier dans le bilan financier, sa mise. Donc, en fait son gain est  $G = G' - 10$  ; la variance de  $G'$  et de  $G$  sont égales : on calcule

$$\mathbb{E}(G'^2) = 0 \times 0.99 + 10^2 \times 0.995 + 100^2 \times 0.0025 + 2000^2 \times 0.0025 = 10025.5$$

donc,  $\text{var}(G') = 100025.5 - 5.3^2 = 9997.41$ . Ces données sont typiques des jeux de grattage de la française des jeux : en moyenne la moitié de la mise est perdue, et on a une distribution des gains du type de celle évoquée. Le théorème de la limite centrale, dit que si on note  $B_n$  le bilan financier après  $n$  semaines, alors

$$\mathbb{P}\left(\frac{B_n + 4.7n}{\sqrt{n \text{var}(G)}} \leq x\right) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp(-t^2/2) dt \quad (3.3)$$

le membre de gauche coïncide avec  $\mathbb{P}(B_n \leq x\sqrt{n \text{var}(G)} - 4.7n)$ . Comment comprendre ce résultat ? Tout d'abord, la première formule dit que  $B_n$  se situe aux alentours de  $-4.7n$  avec des fluctuations typiques de  $\sqrt{n \text{var}(G)} \sim 100\sqrt{n}$ . Pour  $n = 1000$ ,  $\sqrt{n} = 31.62\dots$ , les fluctuations typiques sont donc, de l'ordre de 3100, et comme la moyenne de la perte est aux alentours de  $-4700$ , ces quantités sont du même ordre (ce ne serait plus vrai si on prenait  $n = 100000$ , par exemple, car la moyenne évolue linéairement avec  $n$ , alors que  $\sqrt{n \text{var}(G)}$  évolue comme la fonction  $x \mapsto \sqrt{x}$  qui tend vers l'infini moins vite). Si on reprend la formule (3.3), avec  $n = 1000$ , on obtient

$$\mathbb{P}\left(\frac{B_n + 4700}{3162} \leq x\right) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp(-t^2/2) dt \quad (3.4)$$

Quelle est la proba qu'il soit dans les négatifs ?  $\frac{B_n + 4700}{3162} \leq x \Leftrightarrow B_n \leq 3162x - 4700$ . C'est en prenant  $x = 4700/3162 = 1.486\dots$  qu'on peut évaluer  $\mathbb{P}(B_n \leq 0)$ , car on vient de voir que

$$\mathbb{P}\left(\frac{B_n + 4700}{3162} \leq 1.486\right) = \mathbb{P}(B_n \leq 0).$$



Le résultat est donc par le TCL proche<sup>5</sup> de  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{1.486} \exp(-t^2/2) dt = 0.9313$  (calcul par ordi). Bref, John a perdu de l'argent avec proba 0.9313. Puisque la limite est symétrique autour de 0, cela dit que l'on sait que John a grossièrement une chance sur 2 d'avoir perdu davantage que 4700 euros, et une chance sur 2 d'avoir perdu moins que cela.... La densité gaussienne permet d'aller plus loin dans l'analyse, en prenant le  $x$  de notre choix.

**Remarque 3.8. Pourquoi le TCL est-il un théorème important dans toutes les sciences ?**

*La plupart des sciences "ont une connaissance du monde de nature statistique" : elles observent d'abord la nature, font des mesures de telles ou telles quantités, et en déduisent des principes, des lois. Or, qui dit "mesure", dit, "erreur de mesure". Pour avancer, on doit donc quantifier quelle erreur on fait en faisant la moyenne des mesures obtenues par exemple. Eh bien, le TCL énonce que sous des hypothèses assez faibles (existence d'une variance, expériences indépendantes), la fonction de répartition de la variable  $(S_n - nm)/\sqrt{n \text{ var}(X_1)}$  converge. Or, la moyenne empirique dont dispose l'expérimentateur c'est  $S_n/n$  et la quantité recherchée est  $m$ . On écrit*

$$\frac{S_n - nm}{\sqrt{n \text{ var}(X_1)}} = \left( \frac{S_n}{n} - m \right) \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\text{var}(X_1)}},$$

puis donc

$$\mathbb{P} \left( x \leq \frac{S_n - nm}{\sqrt{n \text{ var}(X_1)}} \leq y \right) = \mathbb{P} \left( x \frac{\sqrt{\text{var}(X_1)}}{\sqrt{n}} \leq \frac{S_n}{n} - m \leq y \frac{\sqrt{\text{var}(X_1)}}{\sqrt{n}} \right);$$

comme ceci "converge" pour  $x$  et  $y$  fixés dans le sens dit plus haut, ça dit que  $\frac{S_n}{n} - m$  est de l'ordre de  $1/\sqrt{n}$  : on connaît donc la vitesse de convergence de la moyenne empirique, c'est  $1/\sqrt{n}$  quelle que soit l'expérience !! et donc, la moyenne inconnue  $m$  vaut  $S_n/n$  plus un terme d'erreur qui est de l'ordre de  $1/\sqrt{n}$ . Par dessus le marché, la loi de proba de l'erreur faite converge et ne dépend pas de la loi des expériences, mais seulement de la variance de celles-ci (qui peut d'ailleurs être également évaluée). Ce résultat est de nature très inhabituelle, car il révèle un principe d'invariance très général.

Si on note  $F(t) = P(X \leq t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t \exp(-x^2/2) dx$ , on voit alors, en utilisant les symétries de la densité gaussienne que  $F(-t) = 1 - F(t)$ . Il se trouve que  $\exp(-x^2/2)$  ne possède pas de primitive qui "s'exprime simplement à l'aide de fonctions classiques" et donc, il n'existe pas de formule plus simple pour  $F(t)$  que l'écriture de cette intégrale. Par contre, on peut calculer avec des méthodes d'analyse numérique ces intégrales pour un  $t$  donné. C'est crucial de pouvoir faire cela pour les applications statistiques ; on fabrique alors des tableaux, comme le suivant :

5. En fait, en toute rigueur, il faut déjà démontrer que l'approximation de  $\mathbb{P} \left( \frac{B_n + 4700}{3162} \leq x \right)$  par sa limite est valide, ce qu'on admet

$t$	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986

La case rouge du tableau : doit être comprise comme suit :  $\mathbb{P}(X \leq 1.35) = 0.9115$ , et oui, il s'agit bien d'une approximation à  $10^{-4}$  près de la vérité ; ce n'est pas vraiment égal donc, mais on fait "comme si", dans les applications.



## 4 ——— Simulation de variables aléatoires ———

De nombreux phénomènes aléatoires sont trop complexes pour être étudiés frontalement : on abandonne parfois l'idée de pouvoir "évaluer" exactement la probabilité d'un événement et on se contente de "simulations". Par exemple, si vous pensez avoir trouvé une stratégie pour gagner à un jeu aléatoire, vous pouvez faire un petit programme qui va simuler le jeu et la stratégie, et exécuter des centaines de millions de fois ce programme. Vous possédez alors une base de données sur laquelle vous pouvez commencer à voir si votre stratégie marche sans avoir à risquer vos deniers (bon, là, faut vraiment faire attention aussi de ne pas faire d'erreur de modélisation). On peut aussi savoir dans quelle mesure on peut faire confiance à ces simulations dans les cas simples, car les vitesses de convergence peuvent être établies à l'aide du théorème de la limite centrale.

L'esprit dans lequel on fait les simulations est donc celui là : les résultats obtenus par simulation permettent souvent de conjecturer ou d'approcher certaines valeurs d'intérêt. Les simulations (bien faites) sont suffisamment valables pour être utilisées dans toutes les sciences : elles permettent de tester des modèles, de faire des prédictions lorsqu'on a un modèle, et même de corriger des modèles (lorsque les simulations du modèle ne correspondent pas à ce qu'on observe), etc.

Les simulations sont notamment très utilisées en physique, météorologie, études de la circulation routière, théorie des files d'attente, mais aussi en mathématiques pour calculer des intégrales, chercher des solutions à des équations, chercher des solutions à des problèmes d'optimisation, et en probabilité et stat pour observer certains phénomènes aléatoires, pour faire de la prédiction statistique, corriger des modèles, etc... En informatique, la génération de variables aléatoires est utilisée de manière industrielle : l'aléa est utilisé pour briser des symétries en algorithmique, dans des méthodes telles que le deep learning (apprentissage profond), pour construire des images ou de la musique (dans les jeux notamment), et résoudre les problèmes cités plus haut, qui sont tous traités de manière informatique, bien sûr.

**Le point de départ :** simulation de la variable uniforme  $U \sim [0, 1]$ .

La plupart des logiciels de programmation met à notre disposition une variable "uniforme"  $U$  sur  $[0,1]$ . (Appelée souvent par l'instruction "random" ou "ran").

Voici un exemple de générateur de "nombres aléatoires" : on pose

$$g(u) = 16807u \text{ modulo } 2147483647,$$

et  $u_0$  un nombre dans  $\{1, \dots, 2147483647\}$ , et pour  $n \geq 1$ ,  $u_n = g(u_{n-1})$ . Les variables  $(U_n)_n$  successivement renvoyées par l'ordinateur sont :

$$U_n = u_n/2147483647.$$

Les limites de ce générateur sont claires : les nombres  $U_i$  ne sont pas aléatoires, ne sont pas indépendants, ne sont pas uniformes sur  $[0, 1]$  (seuls les nombres du type  $a/2147483647$  avec  $a$  entiers sont atteints). Néanmoins, ce générateur est suffisant pour de nombreuses applications. Il existe maintenant des générateurs plus efficaces mais qui ont tous les mêmes défauts (à d'autres échelles).

En quoi les variables sont uniformes ? Comme on l'a dit au début du cours, une loi de proba est une masse, et le hasard n'est pas défini dans la théorie. Le statut des simulations n'est pas super clair. Le "hasard algorithmique" produit par le générateur aléatoire a des caractéristiques statistiques proches de

variables aléatoires uniformes :

– si on simule un grand nombre de  $(U_i, 1 \leq i \leq n)$  et que l'on prend 2 intervalles  $[a, b]$  et  $[c, d]$  distincts, alors la proportion  $p_{a,b}(n)$  et  $p_{c,d}(n)$  de variables tombant dans  $[a, b]$  et  $[c, d]$  convergent vers  $b - a$  et  $d - c$ . La proportion de  $i$  t.q.  $U_i \in [a, b]$  et  $U_{i+1} \in [c, d]$  converge vers  $(b - a)(d - c)$  ce qui signifie que deux tirages consécutifs se comportent en temps long comme s'ils étaient indépendants (dans ce sens). D'autres propriétés statistiques des échantillons de variables aléatoires indépendantes sont également obtenues ("indépendances" à distance plus longues, fluctuation en  $\sqrt{n}$ , etc). Bref, les générateurs de variables aléatoires fournissent une source d'aléa qui pour beaucoup d'applications va avoir de suffisamment bonnes propriétés. Il arrive (rarement) que l'on observe dans certaines simulations des biais provenant de la non exactitude du générateur aléatoire.

Dans la suite, on suppose que le générateur fournit une suite de v.a. indépendantes  $(U_i)_{i \geq 1}$ , uniformes sur  $[0, 1]$ . Ce qui est remarquable, indépendamment des simulations, c'est qu'avec les variables  $U_i$ , on peut simuler toutes les lois uni et même multi-dimensionnelles (avec une seule variable  $U_i$  on peut même simuler toute une famille dénombrable de variables aléatoires dans  $\mathbb{R}$  : par exemple, en prenant un décimal sur 10 de la suite  $U_i$ , on peut simuler 10 variables uniformes indépendantes si on veut).

#### 4.1 Simulation de v.a. discrètes

On souhaite construire une variable aléatoire t.q.

$$\mathbb{P}(X = x_k) = p_k, k = 0, 1, \dots \quad (4.1)$$

pour deux suites  $(x_k, k \geq 0)$  et  $(p_k, k \geq 0)$  fixées. On doit bien sûr avoir  $\sum_k p_k = 1$  et les  $p_k$  positifs ou nuls. Ces suites peuvent-être finies ou infinies.

##### Méthode de simulations de variables aléatoires discrètes :

On tire une v.a. uniforme  $U$  :

(a) Si  $U \leq p_0$  on décide  $X = x_0$

(b) Sinon, on cherche le  $k \geq 0$  pour lequel

$$p_0 + \dots + p_k < U \leq p_0 + \dots + p_k + p_{k+1}$$

et on prend  $X = x_{k+1}$  (pour  $k \geq 0$ ).

**Note :** Comme  $\sum p_k = 1$ , la méthode retourne toujours un  $x_j$ .

**Lemme 4.1.** Cette méthode fournit une variable aléatoire  $X$  de loi donnée par (4.1).

*Démonstration.* On a  $\mathbb{P}(U \leq p_0) = p_0$  car  $U$  est uniforme, donc  $X = x_0$  avec proba  $p_0$ . Maintenant, pour tout  $k \geq 0$ , on voit que  $X = x_{k+1}$  avec proba  $\mathbb{P}(p_0 + \dots + p_k < U \leq p_0 + \dots + p_k + p_{k+1}) = p_{k+1}$ . En effet,  $U$  tombe dans un intervalle avec proba égale à la longueur de l'intervalle.  $\square$

Voici un programme C qui fait le job :

```

1 #include <stdio.h>
2 #include <stdlib.h>
3 #include <time.h>
4 #include <math.h>
5 #define nbatomes 6 // déclaration du nb d'atomes
6
7 double Unif(){ return (double)rand() * 1./ RAND_MAX ;} // Unif sur [0,1]
8 /////// Simulation d'une variable de la loi Loi/////
9 int simu(double Loi[], int NbAtomes)
10 { double U = Unif(), valeur = 0;
11   int index = -1;
12   while(valeur <U)
13     { index ++;
14     valeur = valeur + Loi[index]; }
15   return (index); // renvoie le premier index t.q. p[0]+...+p[index]>U
16 }
17 /////////////// fin de l'algo de simulation ///////////////
18 int main() {
19   srand(time(NULL)); // pour changer la graine du générateur aléatoire
20   int NbSimu = 100000000, i, v; // Nb de simulations
21   double loi[nbatomes] = {0.1, 0.4, 0.1, 0.1, 0.2, 0.1}; // Le poids de 6
22     atomes
23   // Simulation d'un grand nombre de variables pour faire des mesures
24   int Nb[nbatomes]; // Pour compter le nb de variables valant i
25   for (i = 0; i < nbatomes; i++) { Nb[i] = 0; } // Initialisation
26
27   for(i = 0; i < NbSimu; i++) { v = simu(loi, nbatomes); Nb[v]++;}
28     //Simulation
29   //affichage
30   for(i = 0; i < nbatomes; i++)
31     printf("simulation = %f, proba réelle = %f \n" , Nb[i]*1./NbSimu,
32         loi[i]);
33 }

```

PROGRAMME/Simu\_Loi\_discrete.c

Si le fichier s'appelle Nom.c; dans un terminal (linux) taper :  
 Pour compiler : gcc -O3 -lm Nom.c -o Nom  
 Pour lancer le programme : ./Nom

Le programme simule  $100 \times 10^6$  variables aléatoires d'une loi donnée, et on l'applique à une loi à 6 atomes;

sur mon portable, ça prend 2.007s; et les fréquences empiriques comparées aux fréquences réelles :

simulation = 0.100002, proba réelle = 0.100000

simulation = 0.400026, proba réelle = 0.400000

simulation = 0.099982, proba réelle = 0.100000

simulation = 0.100012, proba réelle = 0.100000

simulation = 0.200004, proba réelle = 0.200000

simulation = 0.099974, proba réelle = 0.100000

## 4.2 Simulation de v.a. admettant une densité

Si on note  $F_X$  la fonction de répartition de  $X$  alors  $F_X(X)$  suit la loi uniforme. En effet, montrons que  $F_X(X)$  (qui est une v.a.) a même fonction de répartition que  $U$  :

$$\mathbb{P}(F_X(X) \leq x) = \mathbb{P}(X \leq F_X^{-1}(x)) = F_X(F_X^{-1}(x)) = x,$$

où  $F_X^{-1}$  est la réciproque généralisée de  $F_X$ , c'est-à-dire :

$$F_X^{-1}(x) = \inf\{y \mid F_X(y) \geq x\}.$$

**Lemme 4.2.**  $F_X^{-1}(U)$  a même distribution que  $X$ .

*Preuve :* Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(F_X^{-1}(U) \leq x) &= \mathbb{P}(\inf\{y, F(y) \geq U\} \leq x) \\ &= \mathbb{P}(U \leq F(x)) = F(x) \quad \square \end{aligned}$$

Ainsi, si on sait inverser la fonction de répartition d'une v.a., on sait la simuler.

**Exemple 4.24.** La fonction  $f$  définie par

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{pour } x \in [0, 1], \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est une densité car c'est une fonction positive, et  $\int_0^1 f(x)dx = [x^2]_0^1 = 1$ ; sa fonction de répartition vaut  $F(x) = x^2$  entre 0 et 1 (elle vaut 0 avant, et 1 après). L'inverse est  $F^{-1}(x) = \sqrt{x}$  (pour trouver l'inverse on pose  $y = F(x)$ , on résout en  $x$  : ici ça donne  $y = x^2$ , et donc facile,  $x = \sqrt{y}$ ). Du coup on vient d'établir que si on prend une uniforme  $U$  sur  $[0, 1]$ ,  $\sqrt{U}$  a pour densité  $f$ .

Voici un programme qui fait le job :

```
1 #include <stdio.h>
2 #include <stdlib.h>
3 #include <time.h>
4 #include <math.h>
5
```

```

6 double Unif(){ return (double)rand() * 1./ RAND_MAX ;} // Unif sur [0,1]
7 // Simulation d'une variable de densité 2x sur [0,1]
8 double simu() {return(pow( Unif(), 0.5));}
9
10 int main() {
11     srand(time(NULL)); // pour changer la graine du générateur aléatoire
12     printf("%f \n", simu()); //afficher une valeur engendrée
13 }

```

PROGRAMME/densite\_2x.c

On peut contrôler que cela marche bien en faisant un histogramme des valeurs obtenues.

**Exemple 4.25.** La loi exponentielle a pour fonction de répartition

$$F(x) = \int_0^x \exp(-t)dt = 1 - \exp(-x).$$

On calcule l'inverse : si  $y = 1 - \exp(-x)$  alors,  $\exp(-x) = 1 - y$  et donc  $x = -\ln(1 - y)$ . Selon le Lemme 4.2, on a donc que  $-\ln(1 - U)$  est une variable exponentielle de paramètre 1. Comme  $1 - U$  a même loi que  $U$ , on a donc trouvé que

$$-\ln(U) \text{ suit la loi exponentielle de paramètre 1.}$$

### 4.3 Méthode de rejet

C'est une méthode utilisée pour simuler des variables aléatoires de densité  $f$  dans le cas où on ne sait pas calculer la fonction de répartition de  $f$  ; par contre, pour utiliser cette méthode on doit être capable de trouver une densité  $g$  simulable et une constante  $C$  finie (!) telle que

$$f(x) \leq Cg(x) \text{ pour tout } x. \quad (4.2)$$

c'est-à-dire  $\sup_x f(x)/g(x) \leq C$ . Comme  $f$  et  $g$  sont deux densités, la constante  $C$  vaut au moins 1 (si on intègre à droite et à gauche (4.2) on trouve  $1 \leq C \times 1$ ).

**Méthode de rejet :** Deux étapes (a) et (b)

(a) On tire une variable aléatoire  $X$  de densité  $g$ , et une variable uniforme  $U$  sur  $[0, 1]$  indépendante de  $X$ . On passe à (b).

(b) Si  $UCg(X) \leq f(X)$  alors on pose  $Y = X$ , et on s'arrête (le résultat renvoyé est  $Y$ ) ; sinon, on recommence (on retourne en (a)).

**Lemme 4.3.** La méthode de rejet finit avec proba 1 après un nombre fini d'étapes, de moyenne  $C$  ; la variable  $Y$  renvoyée a la densité recherché  $f$ .



*Démonstration.* Pourquoi  $Y$  a pour densité  $f$ ? D'abord, on voit que l'étape (b) sera la dernière étape avec probabilité  $\mathbb{P}(f(X) \geq UCg(X))$ , donc échoue avec proba  $\mathbb{P}(f(X) \leq UCg(X)) = \mathbb{P}(U \geq f(X)/(Cg(X))) = 1 - \mathbb{E}(f(X)/(Cg(X))) = 1 - \int_y \frac{f(y)}{Cg(y)}g(y)dy = 1 - 1/C$ . Bref, on recommence avec proba  $1 - 1/C$ , et donc il va falloir un nombre géométrique d'essais de paramètre  $1/C$  avant de terminer (donc de moyenne  $C$ ). Maintenant, si on calcule  $\mathbb{P}(X \in [a, b] | f(X) \leq UCg(X))$  qui est la proba de s'arrêter, et que  $Y = X$  soit dans  $[a, b]$  lorsque l'algo s'arrête

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \in [a, b] | f(X) \leq UCg(X)) &= \frac{\mathbb{P}(X \in [a, b], f(X) \leq UCg(X))}{\mathbb{P}(f(X) \leq UCg(X))} \\ &= \frac{\int_a^b \left( \int_0^{f(y)/(Cg(y))} du \right) g(y) dy}{1/C} \\ &= \frac{\int_a^b \frac{f(y)}{Cg(y)} g(y) dy}{1/C} = \int_a^b f(y) dy \end{aligned}$$

et là, on voit que  $Y$  a bien la densité visée.  $\square$

**Exemple 4.26.** Si on veut simuler une Gaussienne  $\mathcal{N}(0, 1)$  on peut procéder par rejet : la densité est  $f(x) = e^{-x^2/2}/\sqrt{2\pi}$ . Elle tend vers 0 très vite en  $\pm\infty$ . La variable exponentielle a densité  $\exp(-x)$  sur  $\mathbb{R}^+$  (et 0 sur  $\mathbb{R}^-$ ) et elle tend moins vite vers 0 en  $\pm\infty$ . On va prendre alors la densité sur  $\mathbb{R}$  valant

$$g(x) = \exp(-|x|)/2.$$

On pourrait pu prendre une autre fonction  $g$  : tant qu'on arrive à trouver un  $C$  fini, tout est permis. On obtient une variable  $X$  de cette densité en simulant une exponentielle usuelle est en ajoutant un signe aléatoire (+ ou -) avec proba 1/2.

Maintenant, il suffit de prendre un  $C$  tel que

$$f(x) \leq Cg(x) \text{ pour tout } x.$$

(Enfin, à ce moment, on ne sait pas encore si un  $C$  fini fait l'affaire). Comme les deux fonctions sont paires, on peut juste travailler sur  $\mathbb{R}^+$ . On cherche donc à majorer le quotient

$$q(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \frac{\exp(-x^2/2)}{\sqrt{2\pi} \exp(-x)/2} = \exp(-x^2/2 + x) \frac{2}{\sqrt{2\pi}}$$

sur  $\mathbb{R}^+$ . Comme  $\exp$  est une fonction croissante, il suffit de chercher le max de  $h(x) = -x^2/2 + x$ . La dérivée est  $-x + 1$  : Donc,  $h$  croît entre 0 et 1 et décroît ensuite. Son max est atteint en  $x = 1$ , et on a  $h(1) = 1/2$ . Donc  $\max q(x) = \exp(1/2) \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \sim 1.3154\dots$  Donc  $C = 1.32$  fait l'affaire (comme la proba de recommencer la boucle est  $1 - 1/C$  on a intérêt à prendre le  $C$  le plus petit possible ; en l'état on fera en moyenne 1.32 simulation d'exponentielle par Gaussienne obtenue).

```
1 #include <stdio.h>
2 #include <stdlib.h>
3 #include <time.h>
4 #include <math.h>
```

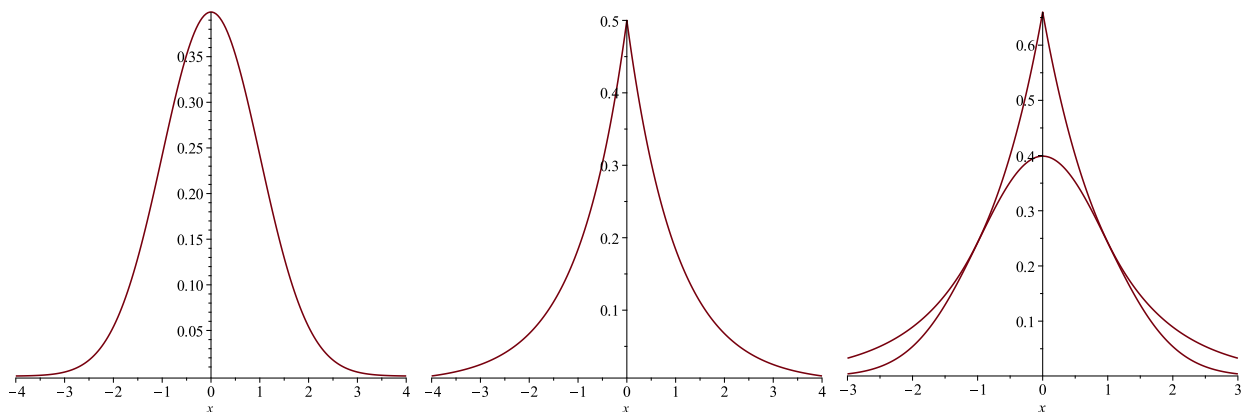


FIGURE 10 – Densité  $f$  de la Gaussienne, densité  $g$  de l'exponentielle avec signe aléatoire, de l'exemple 4.26.  
Dessin de  $1.32g$  et de  $f$  sur le même dessin

```

5
6 double Unif(){ return (double)rand() * 1./ RAND_MAX ;} // Unif sur [0,1]
7
8 int Rademacher() // Signe +1 ou -1 proba 1/2
9 {if(Unif())>0.5)
10   {return(1);}
11   return (-1) ; }
12
13 double Expo() // Simulation d'une exponentielle avec signe aléatoire
14 { return( -log( Unif() ) * Rademacher() ); }
15
16 double f(double x){ return( exp(-x*x/2)/pow(2*M_PI,0.5)); }
17
18 double g(double x){ return( exp(-abs(x)/2)); }
19
20 double Gaussienne()
21 { double C=1.32, X ;
22   while(1) // On ne s'arrête jamais !
23     { X = Expo();
24       if(Unif()*C*g(X)<f(X))
25         return(X); // "return" tue la boucle while en sortant}
26 }
27
28 int main() {
29   srand(time(NULL)); // pour changer la graine du générateur aléatoire
30   printf("%f \n", Gaussienne());

```

31 }

PROGRAMME/Gaussienne.c

#### 4.4 Estimation d'une intégrale : méthode de Montecarlo

Il s'agit ici d'une méthode permettant d'estimer l'aire d'un domaine borné  $D$ , et donc la méthode s'applique au calcul de l'intégrale d'une fonction  $f$  sur un intervalle  $[a, b]$  (sans calculer de primitive). Cette méthode peut-également être utilisée pour évaluer un volume dans  $\mathbb{R}^3$  ou même en dimension supérieure.

On va expliquer comment on s'y prend dans  $\mathbb{R}^2$  et on expliquera ensuite comment adapter cela dans  $\mathbb{R}^3$ .

**Ce dont on a besoin :** - Un domaine  $D$  borné dans  $\mathbb{R}^2$ ; on suppose que l'on connaît un rectangle  $[a, b] \times [c, d]$  qui contient  $D$ . L'aire de ce rectangle  $R$  est donc  $(b - a)(d - c)$ , et bien sûr l'aire de  $D$  est une fraction de cette aire. On a donc

$$\text{Aire}(D) = p(b - a)(d - c).$$

On va expliquer comment estimer  $p$  : si on tire un point  $U$  uniformément dans le rectangle  $R$ , celui-ci va tomber dans  $D$  avec probabilité  $p$ . Si on tire  $U_1, \dots, U_n$  i.i.d. uniformément dans  $R$ , le nombre  $N_n$  de ceux qui tombent dans  $D$  est une variable binomiale  $B(n, p)$ . Ainsi, par la loi des grands nombres, si on note  $p_n = N_n/n$  la proportion des  $U_i$  tombés dans  $D$  satisfait

$$p_n \xrightarrow[n]{proba} p.$$

Donc si  $n$  est grand,  $p_n$  est proche de  $p$ .

**La méthode** consiste donc juste à choisir  $n$  points uniformes indépendants dans le rectangle  $R$ , trouver la proportion  $p_n$  de ceux qui tombent dans  $D$  et "renvoyer"  $p_n \times \text{Surface}(R)$ .

Par le théorème de la limite centrale on va estimer l'erreur faite en prenant  $p_n$  comme estimation de  $p$ ; une fois encore, l'intuition quand on utilise le théorème de la limite centrale est que la vitesse de convergence est en  $1/\sqrt{n}$ . Voyons cela; on a :

$$\frac{N_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} = (p_n - p) \sqrt{\frac{n}{p(1-p)}} \xrightarrow[n]{loi} \mathcal{N}(0, 1).$$

"On voit déjà que  $p_n - p$ " doit être de l'ordre de  $1/\sqrt{n}$  puisqu'il faut bien que le terme  $p_n - p$  compense le facteur  $\sqrt{\frac{n}{p(1-p)}}$  pour avoir convergence! Pour aller plus loin on a besoin de connaître " $p(1-p)$ "; comme on ne connaît pas  $p$ , dans les applications, on va utiliser  $p_n$  à la place de  $p$  (on sait que  $p_n \xrightarrow[n]{proba} p$ ), et donc utiliser que

$$(p_n - p) \sqrt{\frac{n}{p_n(1-p_n)}} \xrightarrow[n]{loi} \mathcal{N}(0, 1),$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left((p_n - p)\sqrt{\frac{n}{p_n(1-p_n)}} \in [-a, a]\right) &= \mathbb{P}\left(p_n - a\sqrt{\frac{p_n(1-p_n)}{n}} \leq p \leq p_n + a\sqrt{\frac{p_n(1-p_n)}{n}}\right) \\ &\rightarrow \int_{-a}^a \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dt \end{aligned}$$

En utilisant le tableau page 44, pour  $a = 1.96$ , cette intégrale fait environ 0.95 (et pour  $a = 2.58$ , ça fait 0.99). Ceci donne donc un intervalle de confiance effectivement de largeur de l'ordre de  $1/\sqrt{n}$  pour  $p$ .

Pour tirer un point uniformément dans le rectangle  $R$ , on prend 2 variables uniformes et indépendantes  $U_1$  et  $U_2$ , sur  $[0, 1]$  et on prend le point  $U$  de coordonnées  $(a + (b - a)U_1, c + (d - c)U_2)$ .

Ainsi pour calculer  $\pi/4$  (l'aire du quart de cercle de rayon 1), on peut faire le petit programme suivant :

```

1 #include <stdio.h>
2 #include <stdlib.h>
3 #include <time.h>
4 #include <math.h>
5
6 #define NbSimu 100000000
7
8 double Unif(){ return (double)rand() * 1./ RANDMAX ;} // Unif sur [0,1]
9
10 int main(int argc, char *argv[]) {
11     srand(time(NULL)); // pour changer la graine du générateur aléatoire
12     int i, co=0;
13     for(i=0; i < NbSimu; i++)
14         if(pow(Unif(),2)+pow(Unif(),2)<1)
15             co++;
16
17     printf("\n %f %f \n" , co*1./NbSimu, M_PI*1./4);
18
19 }
```

PROGRAMME/MonteCarlo.c

On simule avec  $n = 10^8$ . Ça prend 0.157 s sur mon portable et renvoie 0.785308 au lieu de 0.785398. Donc, 4 décimales correctes. Notez que la vitesse n'a rien à voir avec la régularité de la courbe qui définit le domaine, alors que lorsqu'on programme les méthodes habituelles de calcul d'intégrale, c'est le cas.

En 3D : supposons qu'on cherche le volume dans  $\mathbb{R}^3$  de l'ellipsoïde d'équation

$$4x^2 + 3y^2 + 8z^2 \leq 7. \quad (4.3)$$

On n'a besoin de rien pour faire le programme : On voit que  $|x| \leq A := \sqrt{7/4}$ ,  $|y| \leq B := \sqrt{7/3}$ ,  $|z| \leq C := \sqrt{7/8}$ , donc on travaille dans le parallélépipède rectangle de côté  $[-A, A] \times [-B, B] \times [-C, C]$ . On va donc tirer des points dans ce domaine et trouver la proportion de ceux qui vérifient (4.3). Voici le programme

```

1 #include <stdio.h>
2 #include <stdlib.h>
3 #include <time.h>
4 #include <math.h>
5
6 double Unif() { return (double)rand() * 1./ RANDMAX ;} // Unif sur [0,1]
7
8 int main() {
9     srand(time(NULL)); // pour changer la graine du générateur aléatoire
10
11     int NbSimu = 100000000, co=0, i;
12     double A = pow(7*1./4,0.5), B = pow(7*1./3,0.5), C = pow(7*1./8,0.5);
13     double u1,u2,u3;
14     for(i=0; i < NbSimu; i++)
15         { u1 = - A + 2 * A * Unif();
16           u2 = - B + 2 * B * Unif();
17           u3 = - C + 2 * C * Unif();
18           if(4 * pow(u1,2) + 3 * pow(u2,2) + 8 * pow(u3,2) < 7)
19               co++;
20         }
21     printf("\n simulation = %f, résultat exact = %f \n" ,
22           co*1./NbSimu*(2*A)*(2*B)*(2*C), M_PI*4./3*pow(7*7*7*1./4/3/8,0.5));

```

PROGRAMME/MonteCarlo-2.c

Dans des vieux grimoires, on trouve que le volume est  $V = (4/3)\pi abc$  si on écrit l'équation de l'ellipsoïde sous la forme

$$\left\{ (x, y, z) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} < 1 \right\}.$$

Donc si on fait le calcul explicite, on doit diviser dans (4.3) par 7 et mettre tout au dénominateur avec un carré, et ça donne

$$\frac{x^2}{\sqrt{7/4}^2} + \frac{y^2}{\sqrt{7/3}^2} + \frac{z^2}{\sqrt{7/8}^2} \leq 1. \quad (4.4)$$

d'où on trouve que  $V = (4/3)\pi\sqrt{7/4}\sqrt{7/3}\sqrt{7/8} \simeq 7.917718$ .

Si on lance le programme avec  $\text{NbSimu} = 100 \times 10^6$ , durée exécution = 2.22 s sur mon portable, et le résultat donne simulation = 7.917953, résultat exact = 7.917718; de nouveau 4 bonnes décimales, pour 2 s de calcul et 5 minutes de programmation. Difficile à battre : dans  $\mathbb{R}^3$  même pour une surface lisse comme celle là, il n'existe pas de méthodes numériques plus simples.

**Remarque 4.4.** • *Le coût de la simulation ne dépend pas directement de la dimension (un peu car on doit simuler une variable dans un parallélépipède rectangle de  $\mathbb{R}^d$ , donc typiquement on a besoin de  $d$  uniformes par point) : il dépend plutôt, dans les faits, de la difficulté à tester si un point tiré dans le parallélépipède est dans  $D$  ou pas. Si le domaine est très complexe, ça peut coûter cher. Ceci dit, les autres moyens numériques seront également coûteux, dans ce cas.*

• *Pour avoir un résultat avec une erreur relative de  $1/\sqrt{n}$  on a besoin de  $n$  simulations quelle que soit la dimension. D'autres méthodes numériques reposent sur le fait de prendre une sous grille (voir méthode "éléments finis"). L'erreur dépend alors de la régularité de l'enveloppe de  $D$  ; par contre le coût de l'utilisation d'une sous grille est énorme : si on coupe par exemple le parallélépipède en 1000 selon chaque côté, on a un coût en  $1000^d$ , donc déjà pour  $d = 3$  ça va prendre pas mal de temps, et dans les faits, pour  $d = 5$ , ça ne finira pas si on n'a pas des moyens de calculs énormes. La méthode compte donc le nb de points de la grille dans  $D$ , et leur donne la masse  $1/1000^d$ . L'erreur que l'on fait dépend typiquement du nb d'hypercubes qui sont partiellement dans  $D$ , et ça, ça dépend vraiment de la régularité de  $D$ . La méthode de MonteCarlo est donc compétitive en dimension = 2 et vraiment compétitive en dimension  $\geq 3$  : sa vitesse ne dépend pas de la régularité de la surface.*



## 5 ——— Chaînes de Markov ———

### 5.1 Chaîne de Markov avec espace d'état fini

**Définition 5.1.** Soit  $(X_k, k \geq 0)$  un processus stochastique à valeurs dans un espace fini ou dénombrable  $E$ . Soit  $\nu$  la loi de  $X_0$ . On dit que  $(X_k, k \geq 0)$  est une chaîne de Markov si pour  $k \geq 1$ , tout  $(e_0, \dots, e_{k+1}) \in E^{k+2}$ ,

$$P(X_{k+1} = e_{k+1} \mid X_k = e_k, \dots, X_1 = e_1, X_0 = e_0) = \mathbb{P}(X_{k+1} = e_{k+1} \mid X_k = e_k). \quad (5.1)$$

Autrement dit : un processus est une chaîne de Markov si la loi du futur sachant le passé et le présent, ne dépend que du présent. L'espace d'état est l'espace  $E$  dans lequel les variables  $X_i$  prennent leur valeur.

Pour une chaîne de Markov, on a donc

$$\mathbb{P}(X_0 = e_0, X_1 = e_1, \dots, X_n = e_n) = \nu(e_0) \prod_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(X_{k+1} = e_{k+1} \mid X_k = e_k). \quad (5.2)$$

On trouve souvent la formulation suivante, qui est bien aussi : un processus est une chaîne de Markov, si, conditionnellement au présent, la loi du futur et du passé sont indépendants.

**Exemple 5.27.** (i) Un joueur joue au casino à chaque instant 10 euros à la roulette, sur le 7. Sa fortune après  $k$  parties, est notée  $F_k$ . Si on imagine que les résultats de la roulette sont indépendants, et que les règles ne changent pas entre les parties (la loi du gain est constante) alors  $(F_k, k \geq 0)$  est une chaîne de Markov : peu importe la suite  $(F_0, \dots, F_k)$ , la fortune du joueur au temps  $k+1$  ne dépend que de  $F_k$  : on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(F_{k+1} = f_{k+1} \mid F_k = f_k, \dots, F_0 = f_0) &= \mathbb{P}(F_{k+1} = f_{k+1} \mid F_k = f_k) \\ &= \mathbb{P}(\text{gagner } f_{k+1} - f_k \text{ en jouant 10 euros sur le 7}). \end{aligned}$$

La loi du gain en 1 coup (en misant 10 euros),  $\mathbb{P}(G = g)$  est la quantité déterminante ici

(ii) Un joueur joue au casino la somme de  $f/2$  euros à la roulette sur le 7 lorsque sa fortune est  $f$ . Au temps 0 il dispose de  $F_0 = 214$  euros. Ici aussi, la suite de fortunes  $(F_k, k \geq 0)$  du joueur après  $k$  parties est une chaîne de Markov (la fortune au temps  $k+1$  "ne dépend pas" de la suite  $(F_0, \dots, F_k)$ , mais juste de  $F_k$  (les guillemets autour de "ne dépend pas" vient du fait, que dit comme cela, c'est faux : ça dépend bien de la suite, mais la quantité finale  $F_k$  contient toute l'information nécessaire).

(iii) Les chaînes précédentes sont homogènes en temps : la loi de  $F_{k+1}$  sachant  $F_k$  ne dépend pas de  $k$  ; il existe aussi des chaînes non homogènes : par exemple, si le joueur décide de jouer au temps  $k+1$  une proportion  $1/k$  de sa fortune obtenue au temps  $k$ , alors, il s'agit encore d'une chaîne de Markov (la loi du processus  $(F_k, k \geq 0)$  satisfait (5.1), mais par contre, la loi de  $F_{k+1}$  sachant  $F_k = f$  dépend de  $k$ ).

(iv) Un exemple de processus qui n'est pas une chaîne de Markov : soit  $(F_k, k \geq 0)$  les fortunes successives d'un joueur au casino, qui joue à chaque tour sur le 7. Supposons que le joueur au



temps  $k$  mise la somme  $\sum_{j=0}^k |F_j|/2^{k-j+1}$  (la moitié de la valeur abso. de sa fortune présente + le quart de la valeur abso. de sa fortune au temps précédent + le huitième ... etc.) On voit que la loi de  $F_{k+1}$  sachant  $(F_0, \dots, F_k)$  dépend de tout le vecteur : on ne peut l'exprimer à l'aide de la connaissance de  $F_k$  seule) : ce n'est pas une chaîne de Markov.

**Définition 5.2.** Une chaîne de Markov  $(C_k, k \geq 0)$  à valeurs dans un espace fini ou dénombrable  $E$  est dite homogène si, pour tout  $k \geq 0$ , tout  $e, f \in E$ ,

$$\mathbb{P}(C_{k+1} = e \mid C_k = f) = \mathbb{P}(C_1 = e \mid C_0 = f).$$

Autrement dit : la loi de transition de la chaîne ne dépend pas du temps  $k$ .

L'homogénéité est celle de l'évolution, des transitions. Elle n'implique pas que  $C_k$  et  $C_1$  ont même loi par exemple. Dans les exemples 5.27 (i) et (ii), on a affaire à des chaînes homogènes ; mais la loi de  $F_0, F_1, F_2$ , etc sont toutes différentes.

**Définition 5.3.** On appelle matrice de transition une matrice

$$M = \left[ M_{e_i, e_j} \right]_{e_i, e_j \in E}$$

indexée par les états  $e_i, e_j$  de l'espace d'état  $E$  et qui vérifie  $M_{e_i, e_j} \geq 0$  pour tout  $i, j$ , et t.q. pour tout  $i$ ,  $\sum_{e_j} M_{e_i, e_j} = 1$  (sur chaque ligne, la somme des entrées vaut 1).

Ainsi, à toute chaîne de Markov on peut associer une suite de matrices de transition  $(M^{(k)})$ , en posant

$$M_{e_i, e_j}^{(k+1)} = \mathbb{P}(C_{k+1} = e_j \mid C_k = e_i). \quad (5.3)$$

Lorsque la chaîne est homogène en temps, toutes ces matrices sont égales.

**Rappel :** On dit qu'une matrice  $M$  est une  $n \times m$ -matrice si elle a  $n$  lignes et  $m$  colonnes ; si les  $M_{i,j}$  sont les "entrées" de  $M$ , alors  $M$  s'écrit

$$M = \begin{bmatrix} M_{1,1} & \cdots & M_{1,m} \\ M_{2,1} & \cdots & M_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ M_{n,1} & \cdots & M_{n,m} \end{bmatrix}. \quad (5.4)$$

Ainsi le coin en haut à gauche est le coin 1,1. Attention cette convention d'écriture est la convention internationale, celle de tous les livres, de tous les logiciels, avec laquelle on écrit toutes les formules : cette convention est **non négociable** ! L'indice des lignes est le premier et de colonne le 2ème.

Une matrice  $1 \times m$  est une matrice ligne, une matrice  $n \times 1$  est une matrice colonne.

**Exemple 5.28.** Un exemple d'une chaîne à deux états : Bob a un régime particulier ; chaque soir, il dîne soit du menu 1, soit du menu 2 (pour info, menu 1 = la fameuse recette huître-vodka-paprika fumé de sa

grand-tante, menu 2 = riz blanc).

- Sachant qu'il a mangé le menu 1 un jour  $j$ , le jour  $j + 1$  il prend le menu 2 avec probabilité 80% ;
- sachant qu'il a pris le menu 2, le lendemain il prend le menu 1 avec probabilité 40 %. On note  $E = \{m_1, m_2\}$  l'espace d'état de la chaîne. Et on note  $R_j$  son repas au jour  $j$  : La matrice de transition de la chaîne est

$$M = \begin{bmatrix} \mathbb{P}(R_{j+1} = m_1 | R_j = m_1) & \mathbb{P}(R_{j+1} = m_2 | R_j = m_1) \\ \mathbb{P}(R_{j+1} = m_1 | R_j = m_2) & \mathbb{P}(R_{j+1} = m_2 | R_j = m_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.8 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

ça correspond donc au proba. de transition de  $\begin{bmatrix} m_1 \rightarrow m_1 & m_1 \rightarrow m_2 \\ m_2 \rightarrow m_1 & m_2 \rightarrow m_2 \end{bmatrix}$ .

## 5.2 Chaîne de Markov et marche aléatoire sur un graphe

Soit  $F$  un ensemble fini ou dénombrable,  $M = (M_{e,f}, e, f \in F)$  une matrice de transition indexée par  $F$  (c'est-à-dire à valeurs dans l'espace d'états  $F$ ). Pour bien comprendre les aspects matriciels de la théorie des chaînes de Markov, il est vraiment très utile de faire un peu de théorie des graphes.

On va considérer des graphes orientés : l'ensemble des sommets du graphe est  $F$  ; on met une arête de  $e$  vers  $f$ , si  $M_{e,f} > 0$  : en d'autres termes s'il la probabilité de passer de  $e$  à  $f$  en une étape de la chaîne de Markov est strict. positive.

**Exemple 5.29.** Voici un exemple de matrice de transition et son graphe associé dans un cas où  $F = \{f_1, \dots, f_6\}$  :

$$M = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 1/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/8 & 0 & 0 & 1/8 \\ 0 & 0 & 0 & 2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (5.6)$$

On voit beaucoup de choses sur le graphe (lorsqu'il est petit) :

**Définition 5.4.** Soit  $E$  un espace d'état fini et  $M$  un matrice de transition sur  $E$ . On dit qu'une chaîne de Markov de matrice de transition  $M$  est irréductible si, pour tout  $e$  et  $f$  dans  $E$ , il existe un chemin allant de  $e$  à  $f$  dans le graphe associé à  $M$ .

Dans l'exemple 5.29, la chaîne n'est pas irréductible car il n'y a pas de chemin allant de  $f_1$  à  $f_3$ . On voit aussi que la marche finira pas se retrouver coincée soit sur " $f_6$ " seul, soit sur  $\{f_4, f_5\}$ .

**Définition 5.5.** Soit  $E$  un espace d'état fini et  $M$  un matrice de transition sur  $E$ . On dit qu'un état  $x$  de  $E$  est récurrent, si une chaîne de Markov  $(X_i, i \geq 0)$  de transition  $M$  démarrant en  $x$  revient en  $x$  avec probabilité 1 :

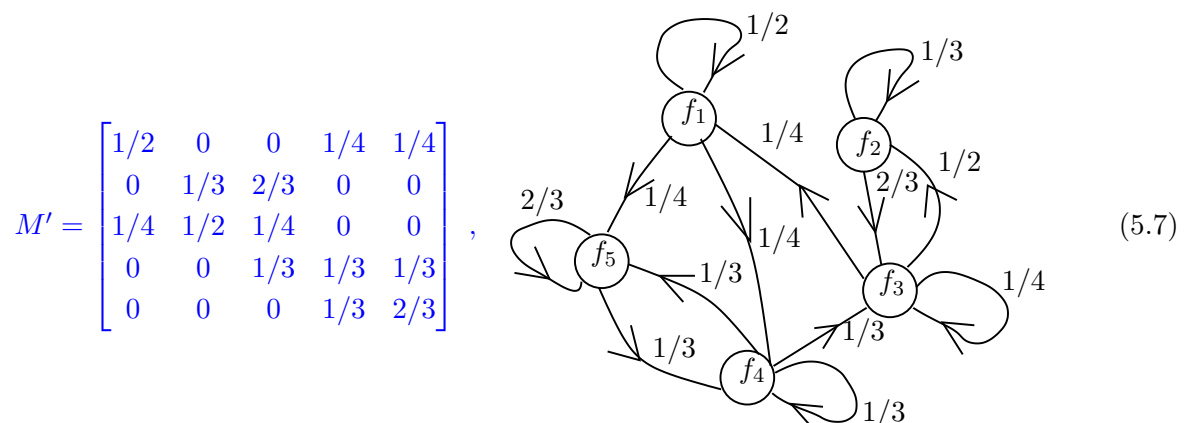
$$\mathbb{P}(\exists t > 0, X_t = x \mid X_0 = x) = 1.$$

Un état non récurrent est dit transient.

Un état absorbant est un état  $e$  t.q. si  $X_j = e$  alors  $X_{j+1} = e$  avec probabilité 1 (l'état  $f_6$  dans l'exemple 5.29).

Lorsqu'un état  $x$  est récurrent, la chaîne va le visiter un nombre infini de fois avec probabilité 1 (si elle démarre au temps 0 de ce point... sinon, il est possible qu'elle n'y passe pas du tout!). Dans l'exemple 5.29, une chaîne partant de  $f_6$  visitera  $f_6$  un nombre infini de fois avec probabilité 1 (donc  $f_6$  est récurrent), par contre, une chaîne démarrant en  $f_5$  ne le visitera pas, et en partant de  $f_3$ , la marche ne visitera  $f_6$  avec une probabilité inférieure à 1. Dans cet exemple, les autres états récurrents sont  $f_1$ ,  $f_5$  et  $f_4$  (mais ce n'est pas totalement évident à prouver, même si c'est intuitif). Voici un exemple de matrice de transition d'une chaîne irréductible :

**Exemple 5.30.**



**Lemme 5.6.** Lorsqu'une chaîne est irréductible, ses états sont tous récurrents.

*Éléments de preuve.* L'espace d'état est fini, donc l'ensemble des paires  $(i, j)$  avec  $i$  et  $j$  dans  $E$  est fini. On a dit que toutes les états communiquent : pour tout  $(i, j)$  il existe un chemin de longueur  $n_{i,j}$  fini, de proba  $p_{i,j} > 0$  (produit de proba de transitions le long du chemin) permettant d'aller de  $i$  à  $j$ . Prenons donc, un tel chemin par paire  $(i, j)$ , et donc

$$N := \max_{i,j} n_{i,j} < +\infty, \quad p := \min_{i,j} p_{i,j} > 0,$$

et interprétons ces nombres comme suit : quels que soient  $x, y \in E$ , chaque fois que l'on fait  $N$  pas, quand on part de  $x$  quelconque, on a une probabilité au moins  $p$  de passer par  $y$  (car les  $n_{x,y} \leq N$  premiers pas ont déjà probabilité au moins  $p$  d'aller en  $y$ ).

Maintenant prenons un point de départ  $x$ , et montrons que la probabilité de revenir en  $x$  est 1. Prenons les intervalles de temps  $I_k := [kN + 1, (k + 1)N]$ ; ces intervalles de temps sont disjoints. Et appelons  $q_k$  la probabilité que la chaîne de Markov soit passée en  $x$  dans l'intervalle  $I_k$ . Par définition de  $N$  et de  $p$ , on a

$$q_k \geq p,$$

et cette borne est valable même si on conditionne par la position de la chaîne à la fin de l'intervalle  $I_{k-1}$ , et d'ailleurs, quoiqu'il se soit passé avant l'intervalle  $I_k$ . Ainsi, la chaîne a probabilité au moins  $p$  de passer en  $x$  dans chaque intervalle  $I_k$  indépendamment de ce qu'il se passe dans les autres. Si on note  $K$  le premier indice  $k$  pour lequel la chaîne passe en  $x$  dans l'intervalle  $I_k$ , alors  $K$  est inférieure à une géométrique de paramètre  $p$ ; or une géométrique de paramètre  $p$  est finie avec probabilité 1, donc  $K$  aussi, donc la marche passe en  $x$  avec probabilité 1 en un temps fini.  $\square$

**Lemme 5.7.** Soit  $(X_k, k \geq 0)$  une chaîne de Markov sur un espace d'état fini  $E$ , et  $x \in E$  récurrent : l'état  $x$  est visité un nombre infini de fois avec probabilité 1, si la chaîne part de  $x$  (si  $X_0 = x$ ).

*Démonstration.* On note  $N$  la variable aléatoire qui compte le nombre de retours en  $x$  (donc  $N$  appartient à  $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ ). La chaîne partant de  $x$  revient en  $x$  avec probabilité 1. Après ce temps de retour, la chaîne se comporte comme une chaîne qui vient de commencer de  $x$ , et donc elle va revenir en  $x$ , un nombre  $N'$  de fois, avec  $N'$  ayant la même loi que  $N$ . Donc  $N$  a même loi que  $1 + N'$ . Donc

$$\mathbb{P}(N = k) = \mathbb{P}(1 + N' = k) = \mathbb{P}(N' = k - 1). \quad (5.8)$$

Or  $\mathbb{P}(N' = -1) = 0$ , donc  $\mathbb{P}(N = 0) = 0$ . Par récurrence : appelons  $\mathcal{P}_i$  la propriété " $\mathbb{P}(N = i) = 0$ ". On a déjà vu que  $\mathcal{P}_0$  est vraie; montrons que  $\mathcal{P}_n$  vraie implique  $\mathcal{P}_{n+1}$  vraie, ce qui suffit pour déduire  $\mathcal{P}_n$  vraie pour tout  $n$ . Supposons donc  $\mathcal{P}_n$  vraie, c'est-à-dire,  $\mathbb{P}(N = n) = 0$ . Or en prenant  $k = n + 1$  dans (5.8), on voit  $\mathbb{P}(N' = n) = \mathbb{P}(N = n + 1) = 0$  (car  $\mathbb{P}(N' = n) = 0$ , puisque  $N'$  et  $N$  ont même loi).

Ainsi comme  $N$  ne prend que des valeurs dans  $\mathbb{N}$  ou  $+\infty$  et que  $\mathbb{P}(N = n) = 0$  pour tout  $n$  fini, on en déduit que  $\mathbb{P}(N = +\infty) = 1$ .  $\square$

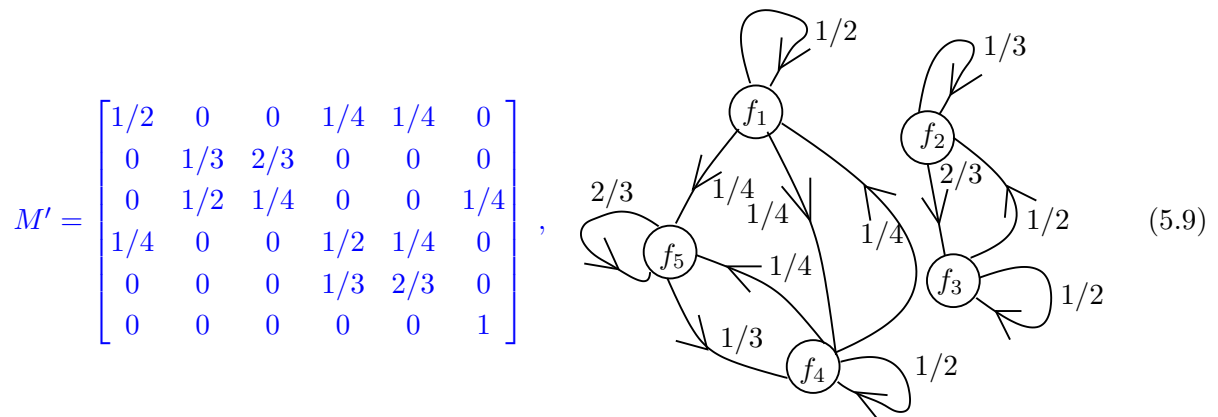
**Définition 5.8.** [Classe de récurrence] Soit  $(X_k, k \geq 0)$  une chaîne de Markov sur un espace d'état fini  $E$ ; soit  $S$  le sous ensemble de  $E$  des états récurrents de la chaîne. Alors,  $S$  peut-être partitionné en sous-ensembles  $S_1, \dots, S_m$  disjoints tels que :

- dans une composante  $S_i$ , tous les états communiquent (il existe un chemin sur le graphe associé entre toutes paires  $(x, y)$  d'éléments de  $S_i$ ,
- les composantes différentes  $S_i$  et  $S_j$  ne communiquent pas (pour tout  $x$  dans  $S_i$  et  $y$  dans  $S_j$ , il n'existe pas de chemin allant de  $x$  à  $y$  dans le graphe associé).

On appelle ces sous ensembles, des classes de récurrence pour la chaîne  $X$ .

**Exemple 5.31.** Dans l'exemple 5.29, il y a deux classes de récurrence :  $\{f_6\}$  et  $\{f_1, f_4, f_5\}$ ; sur l'exemple 5.30 il n'y en a qu'une qui contient tous les sommets. Intuitivement : si  $x$  est récurrent, une chaîne partant de  $x$  va revenir infiniment souvent en  $x$ . Ainsi, elle va visiter aussi infiniment souvent tous les sommets qui sont accessibles depuis  $x$ . La classe de récurrence qui contient  $x$  contient alors tous les points qui sont accessibles depuis  $x$  : si  $y$  est dans cette classe, alors,  $x$  est forcément accessible depuis  $y$ , sans quoi, on ne serait pas sûr de revenir en  $x$  et donc...  $x$  ne serait pas récurrent.

**Exemple 5.32.**



Voici une chaîne de Markov apériodique, qui n'est pas irréductible, mais dont tous les états sont récurrents.

Ainsi, les classes de récurrence sont des sous-ensembles de l'espace d'états qui communiquent 2 à 2 (dans les 2 directions), et qui sont maximum pour cette propriété. Dans un graphe orienté, on dit qu'un sous ensemble  $S$  des sommets est fortement connexe, si toute paire  $u, v$  de sommets pris dans  $S$ , il existe un chemin orienté allant de  $u$  à  $v$  dans le graphe. On appelle composante fortement connexe, les ensemble fortement connexes maximum pour l'inclusion : ainsi  $S$  est une composante fortement connexe, si  $S$  est fortement connexe et si on ne peut pas trouver un ensemble fortement connexe  $S'$  qui contient strictement  $S$ .

**Lemme 5.9.** Les classes de récurrence d'une chaîne de matrice de transition  $M$  coïncident avec les composantes fortement connexes du graphe associé à  $M$ .

**Lemme 5.10.** Soit  $(X_k, k \geq 0)$  une chaîne de Markov sur un espace d'état  $E$ .

- (i) Supposons que  $y \in E$  est transient : alors le nombre de retours en  $y$  en partant de  $y$  est fini avec probabilité 1, et l'espérance du nombre de retour en  $y$  est également fini.
- (ii) Toute chaîne de Markov sur un espace d'état fini  $E$  possède au moins un état récurrent.

*Démonstration.* (i) La chaîne est transiente, donc la probabilité de revenir en  $y$  en partant de  $y$  est un nombre  $p_y < 1$ . Le nombre de retours est donc une géométrique  $G$  de paramètre  $1 - p_y$  (en fait, c'est une géométrique  $-1$ , on ne revient jamais avec proba  $1 - p_y$ ). La moyenne de cette géométrique  $-1$  est  $1/(1 - p_y) - 1 < +\infty$ .

- (ii) Par l'absurde, supposons qu'il n'y ait pas d'état récurrent : tous les états sont donc transients. Mais selon (i), on sait que le temps passé en chaque site est fini avec probabilité 1<sup>6</sup> Or ce n'est pas possible, globalement, la chaîne vit un temps infini ! L'espérance du temps passé par la chaîne quelque part est donc  $+\infty$ , mais c'est aussi la somme sur tous les sommets  $v$  du graphe, du temps moyen passé sur  $v$ . Donc, il n'est pas possible que toutes ces espérances soient finies, il n'est donc pas possible que tous les sommets soient transients.  $\square$

### 5.3 Pourquoi s'embêter avec des matrices ?

Si vous n'êtes pas trop familier avec les matrices, il faut savoir que représenter des lois de transition par des matrices n'est pas juste un caprice... Les matrices ne sont pas que des tableaux de nombres : l'ensemble des matrices de taille  $k \times k$  est muni d'une loi de multiplication associative (mais non commutative) ; multiplier 2 matrices  $A$  et  $B$  de taille  $k \times k$  donne une matrice de taille  $k \times k$  définie comme suit :

Si

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,k} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{k,1} & \cdots & A_{k,k} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_{1,1} & \cdots & B_{1,k} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ B_{k,1} & \cdots & B_{k,k} \end{bmatrix}, \quad \text{alors } C = AB = \begin{bmatrix} C_{1,1} & \cdots & C_{1,k} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ C_{k,1} & \cdots & C_{k,k} \end{bmatrix},$$

avec

$$C_{i,j} = \sum_{\ell} A_{i,\ell} B_{\ell,j}; \quad (5.10)$$

il s'agit du produit scalaire de la ligne  $i$  de  $A$  avec la colonne  $j$  de  $B$ . On peut voir que cela correspond à aller de  $i$  à  $j$  en 2 pas : un pas allant de  $i$  à  $\ell$  de "poids"  $A_{i,\ell}$ , puis un pas de  $\ell$  à  $j$  de poids  $B_{\ell,j}$ ... et on somme sur tous les  $\ell$  possibles.

Maintenant, on peut aussi multiplier des vecteurs par des matrices : les règles sont les suivantes ; soit c'est un vecteur colonne, et on le multiplie à droite, soit c'est un vecteur ligne, et on le multiplie à gauche ; comme ça :

6. c'est vrai si on part de  $x$ , le temps passé en  $x$  est fini : si on ne part pas de  $x$ , alors c'est aussi le cas : il y a des chances qu'on n'y passe jamais, et si on y va, à partir du moment où on y est, la chaîne se comporte comme une chaîne qui démarre de  $x$ .

$$\begin{bmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,k} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{k,1} & \cdots & A_{k,k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \cdots \\ \rho_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_j A_{1,j} \rho_j \\ \cdots \\ \sum_j A_{j,k} \rho_j \end{bmatrix}$$

et

$$\begin{bmatrix} \rho_1 & \cdots & \rho_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,k} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{k,1} & \cdots & A_{k,k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_j \rho_j A_{j,1} & \cdots & \sum_j \rho_j A_{j,k} \end{bmatrix}. \quad (5.11)$$

Interprétation en terme de graphe pour cette dernière quantité : une masse de  $\rho_i$  est disponible sur le sommet  $i$  du graphe. On en déplace une proportion  $A_{i,j}$  en  $j$ . On fait cela pour toutes les arêtes du graphe simultanément : la masse en  $j$  est donc  $\sum_i \rho_i M_{i,j}$ . Mais on reconnaît ici le calcul que l'on fait pour trouver la loi au temps 1 d'une chaîne de Markov de loi initiale  $\rho$  et de matrice de transition  $A$  :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(C_1 = j) &= \sum_{i \in E} \mathbb{P}(C_1 = j, C_0 = i) = \sum_{i \in E} \mathbb{P}(C_1 = j \mid C_0 = i) \mathbb{P}(C_0 = i) \\ &= \sum_{i \in E} \rho_i M_{i,j} = (\rho M)_{1,j} \end{aligned}$$

où ici  $\rho M$  est un vecteur ligne, et l'indice  $(1, j)$  permet d'extraire l'entrée de la ligne 1 (la seule) et l'état correspondant à  $j$ .

Maintenant si on cherche la loi de  $Z_2$  dans une chaîne de Markov, en partant de  $Z_0$  suivant une loi  $\mu$ , on va écrire, par la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z_2 = j) &= \sum_{i, \ell} \mathbb{P}(Z_2 = j, Z_1 = \ell, Z_0 = i) \\ &= \sum_{i, \ell} \mathbb{P}(Z_2 = j \mid Z_1 = \ell, Z_0 = i) \mathbb{P}(Z_1 = \ell, Z_0 = i) \\ &= \sum_{i, \ell} \mathbb{P}(Z_2 = j \mid Z_1 = \ell) \mathbb{P}(Z_1 = \ell \mid Z_0 = i) \mathbb{P}(Z_0 = i) \\ &= \sum_i \mu(i) M_{i, \ell}^{(1)} M_{\ell, j}^{(2)} = \sum_i \mu(i) (M^{(1)} M^{(2)})_{i, j} = \left( \rho M^{(1)} M^{(2)} \right)_{1, j} \end{aligned}$$

Ce que l'on voit ici, c'est que le calcul matriciel est l'outil qu'il faut pour faire des calculs sur les lois de Markov ; ces calculs probabilistes et la représentation par graphe, permettent également d'appréhender une partie de l'algèbre linéaire et comprendre ce que sont certaines opérations matricielles.

Avec le même genre de calcul fait juste au dessus, on montre facilement le résultat suivant :

**Proposition 5.11.** Soit  $(Z_j, j \geq 0)$  une chaîne de Markov homogène de matrice de transition  $M$  et de loi initiale  $\rho = (\rho_0, \dots, \rho_k)$ . La loi de  $Z_0$  est  $\rho$ , la loi de  $Z_1$  est  $\rho M$ , la loi de  $Z_2$  est  $\rho M^2$ , et plus généralement, la loi de  $Z_k$  est donnée par  $\rho M^k$  pour tout  $k \geq 1$ .

**Remarque 5.12.** Si  $(Z_j, j \geq 0)$  est une chaîne de Markov non homogène, alors en notant  $M^{(k)}$  la matrice  $M^{(k)} = (M_{e_i, e_j}^{(k)})_{e_i, e_j \in E}$  telle que

$$\mathbb{P}(Z_{k+1} = e_j \mid Z_k = e_i) = M_{e_i, e_j}^{(k+1)}$$

la loi de  $Z_k$  est  $\rho M^{(1)} \dots M^{(k)}$ .

**Remarque 5.13** (Irreductibilité). Selon la définition 5.4, une chaîne est irréductible si pour tout  $e, f \in E$  il existe un chemin de poids positif dans le graphe associé à  $M$ . Il est maintenant facile de voir que l'existence d'un chemin de taille  $\ell$  entre  $e$  et  $f$  dans le graphe associé correspond au fait que  $(M^\ell)_{e, f} > 0$ .

■ Ainsi, une chaîne est irréductible si pour tout  $e, f \in E$ , il existe  $\ell$  t.q.  $(M^\ell)_{e, f} > 0$ . On ne demande pas que le même  $\ell$  marche pour toute paire  $(e, f) \in E^2$ .

■ De la même façon, pour  $e$  et  $\ell$  fixé,  $(M^\ell)_{e, e}$  est la probabilité qu'une chaîne de Markov de matrice de transition  $M$  partant de  $e$  soit de retour en  $e$  après  $\ell$  pas.

## 5.4 Simulation d'une chaîne de Markov discrète

On se donne donc une loi initiale  $\rho = (\rho_{e_i}, 1 \leq i \leq n)$  à support dans un espace  $E = \{e_1, \dots, e_n\}$  fini ou dénombrable, et une matrice de transition  $M = (M_{e_i, e_j})_{e_i, e_j \in E}$ . Supposons que l'on veuille simuler  $(Z_k, 0 \leq k \leq T)$  avec  $T = 100$  (ou n'importe quel autre nombre).

■ La loi initiale  $\rho$  de  $Z_0$  est une loi discrète : on la simule comme expliqué dans la Section 4.1, page 48.

■ Une fois que  $Z_0 = e_r$  est connu (autrement dit, sachant  $Z_0 = e_r$ ) la loi de  $Z_1$  a pour loi la  $r$ ème ligne de  $M$  : en effet,

$$(\mathbb{P}(Z_1 = e_1 \mid Z_0 = e_r), \dots, \mathbb{P}(Z_1 = e_n \mid Z_0 = e_r)) = (M_{e_r, e_1}, \dots, M_{e_r, e_n}).$$

Plus généralement, sachant  $Z_{k-1} = e_r$ , la loi de  $Z_k$  est donnée par la  $r$ ème ligne de  $M$ .

Simuler la loi de  $Z_1$  se fait donc en utilisant la valeur  $e_r = Z_0$ , simulée ; ça nous donne la loi que l'on doit utiliser pour simuler  $Z_1$ . Puis on simule successivement  $Z_2, Z_3, \dots$  en utilisant à chaque fois la valeur précédente obtenue, de la même manière.

## 5.5 Chaîne apériodique, loi stationnaire

De manière informelle : une chaîne est périodique si elle possède un état  $x$  t.q. partant de  $x$ , les temps de retour en  $x$  sont tous multiples d'un entier  $> 1$ . Elle est apériodique, s'il n'y a pas d'état périodique. Formellement :

**Définition 5.14.** Soit  $M$  la matrice de transition d'une chaîne de Markov  $(X_k, k \geq 0)$  sur un espace fini ou dénombrable  $E$ . Pour tout  $e$  dans  $E$  on note

$$\text{Période}(e) = \text{pgcd} \left( \left\{ \ell > 0, (M^\ell)_{e, e} > 0 \right\} \right).$$

On dit que l'état  $e$  est périodique si  $\text{Période}(e) \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ , et sinon, l'état  $e$  est dit apériodique. Une chaîne est dite apériodique si tous ses états sont apériodiques. [Par convention, on pose  $\text{pgcd}(\emptyset) = +\infty$  : si on n'a aucune chance de revenir en  $e$ ,  $e$  est apériodique]



En particulier, si  $M_{e,e} > 0$ , le graphe possède une boucle de  $e$  vers  $e$ ; cet état est alors apériodique.

**Proposition 5.15.** Si  $e$  et  $f$  deux états dans la même classe de récurrence (même composante fortement connexe), alors  $\text{Période}(f) = \text{Période}(e)$ .

*Démonstration.* Prenons un chemin  $C_1$  de  $f$  vers  $e$  et un chemin  $C_2$  de  $e$  vers  $f$  dans le graphe associé à la matrice  $M$ . Le chemin obtenu en faisant  $C_1$  puis  $C_2$  est un chemin de  $f$  vers  $f$ ; en faisant  $C_2$  puis  $C_1$  on a un chemin de  $e$  vers  $e$ . Par définition,  $\text{Période}(e)$  divise  $n_1 + n_2$ , et  $\text{Période}(f)$  divise  $n_1 + n_2$  aussi. L'ensemble des chemins de  $e$  vers  $e$  contient donc les chemins de longueurs  $n_1 + n_2$  plus tout chemin de  $f$  vers  $f$ . On doit donc avoir<sup>7</sup>  $\text{Période}(e)$  divise  $n_1 + n_2 + \text{Période}(f)$ , donc  $\text{Période}(e)$  divise aussi  $\text{Période}(f)$ . Par symétrie, on a  $\text{Période}(f)$  divise  $\text{Période}(e)$ , d'où on déduit  $\text{Période}(f) = \text{Période}(e)$ .  $\square$

**Exemple 5.33.** ■ Considérons  $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$  et la chaîne de Markov démarrante sur un des états de  $E$  uniformément et t.q. pour tout  $i$ , les seuls éléments non nuls de la  $i$ ème ligne de la matrice de transition  $M$  sont

$$M_{i,(i+1) \bmod 6} = M_{i,(i-1) \bmod 6} = 1/2.$$

Si on part de  $i$ , alors, tout d'abord, on voit qu'on peut revenir en  $i$  avec proba.  $> 0$  au temps 2. Ensuite, comme la parité change à chaque pas, on ne peut pas revenir en un temps impair. Le pgcd des temps de retour possibles fait donc 2 (et cela est vrai pour tout  $i$ ). Tous les états sont périodiques, de période 2. (Notez qu'on se moque totalement de la loi initiale : elle ne participe pas à la définition de la période).

■ Si au lieu de cela on prend  $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  et la matrice de transition t.q. pour tout  $i$ ,

$$M_{i,(i+1) \bmod 7} = M_{i,(i-1) \bmod 7} = 1/2,$$

alors cette fois la chaîne est apériodique : partant de  $i$ , on peut revenir en  $i$  au temps 2, et au temps 7 (en faisant le tour). Donc, les temps de retour contiennent 2 et 7 : on en sait assez pour déduire que le pgcd des temps de retours possibles est 1. Ce raisonnement est valide pour tout  $i$  : La chaîne est apériodique.

**Définition 5.16.** Soit  $M$  une matrice de transition d'une chaîne de Markov  $(Z_k, k \geq 0)$  à espace d'état fini  $E = \{e_1, \dots, e_K\}$ . Une mesure de probabilité  $\rho = (\rho_{e_1}, \dots, \rho_{e_K})$  est dite stationnaire ou invariante pour cette chaîne (ou pour  $M$ ) si, dans le cas où  $Z_0$  a pour loi  $\rho$ , alors  $Z_1$  aussi loi  $\rho$ . D'un point de vue matriciel, cela s'écrit sous la forme

$$\rho = \rho M. \tag{5.12}$$

Cela est équivalent à,

$$\rho_e = \sum_{f \in E} \rho_f M_{f,e}, \quad \text{pour tout } e \in E. \tag{5.13}$$

7. Si  $a$  divise  $b$  et  $a$  divise  $b + c$  alors  $a$  divise  $c$

**Proposition 5.17.** Si  $M$  est une matrice de transition d'une chaîne de Markov sur un ensemble fini  $E$  alors il existe une mesure stationnaire pour cette chaîne.

L'existence d'une mesure stationnaire peut se démontrer de plusieurs façons, mais ce n'est pas trivial. Avant de donner quelques éléments de compréhension, on annonce d'ores et déjà, que la loi stationnaire n'est pas toujours unique.

### Quelques éléments d'algèbre linéaire

Si on se donne une matrice  $A$  carrée, de taille  $n \times n$ , on appelle valeur propre  $\lambda$  de  $A$  tout nombre complexe pour lequel

$$\text{Determinant}(A - \lambda \text{Id}_n) = 0$$

où  $\text{Id}_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$  est la matrice  $n \times n$  ayant toutes ses entrées nulles, exceptées celles sur la diagonale, qui valent 1. Le déterminant se calcule de diverses manières, et en tout cas, il est facile de voir (quelle que soit la formule utilisée) que

**Lemme 5.18.**  $\text{Determinant}(A - \lambda \text{Id}_n)$  est un polynôme de degré  $n$  en  $\lambda$ . On l'appelle polynôme caractéristique de la matrice  $A$ .

Par le Théorème de d'Alembert-Gauss qui dit qu'un polynôme de degré  $n$  à  $n$  racines dans  $\mathbb{C}$  si on tient compte des multiplicités<sup>8</sup>,  $\text{Determinant}(A - \lambda \text{Id}_n) = 0$  possède  $n$  racines :

**Définition 5.19.** On appelle les racines du polynôme caractéristique de  $A$  les valeurs propres de  $A$ .

Si  $\lambda$  est une valeur propre, alors  $\text{Determinant}(A - \lambda \text{Id}_n) = 0$ . Des raisonnements simples de l'algèbre linéaire permettent de déduire l'existence d'un vecteur<sup>9</sup> non nul  $v$  (à coordonnées dans  $\mathbb{C}$ ) t.q.

$$(A - \lambda \text{Id}_n)v = 0_n, \tag{5.14}$$

où  $0_n$  désigne le vecteur nul dans  $\mathbb{R}^n$ . On dit que  $v$  est un vecteur propre (à droite) associé à la valeur propre  $\lambda$ . L'équation (5.14) s'écrit également

$$Av = \lambda v.$$

8. autrement dit, on peut écrire tout polynôme  $P(\lambda)$  de degré  $n$  sous la forme  $P(\lambda) = C \prod_{j=1}^n (\lambda - r_j)$  pour  $C \neq 0, r_1, \dots, r_n$  des nombres complexes

9. si  $v$  est un vecteur propre alors  $cv$  est aussi vecteur propre pour tout  $c > 0$ ; on parle souvent "d'espace propre engendré par  $v$ "

Ce qu'on vient de dire possède une réciproque : si on a une matrice  $B$ , un vecteur  $v$  non nul et un nombre  $c$  t.q.

$$Bv = cv$$

alors  $(B - c\text{Id}_n)v = 0$ . De cela, on peut déduire que  $\text{Determinant}(B - c\text{Id}_n) = 0$  et donc que  $c$  est une racine du polynôme caractéristique et donc une valeur propre.

**Remarque 5.20.** *Le calcul explicite des valeurs propres est en toute généralité difficile car il s'agit de trouver les racines d'un polynôme. Par contre, lorsqu'une valeur propre est connue, alors, trouver un vecteur propre associé est relativement aisé.*

On a discuté des vecteurs propres à droite : mais exactement la même chose peut-être dite pour les vecteurs propres à gauche : si  $\text{Determinant}(A - \lambda\text{Id}_n) = 0$  alors, il existe un vecteur propre ligne  $w$ , à gauche, telle que

$$wA = \lambda A \quad \Leftrightarrow \quad w(A - \lambda\text{Id}_n) = 0.$$

**Remarque 5.21.** *Pour une matrice  $A$  donnée, les valeurs propres à droite et à gauche sont les mêmes (en fait elles sont définies seulement à l'aide du polynôme caractéristique, et donc, elle ne dépendent pas du fait qu'on s'intéresse aux vecteurs propres à droite ou à gauche); les vecteurs propres à droite et à gauche en toute généralité sont différents.*

Maintenant on a le lemme suivant :

**Lemme 5.22.** Si  $M$  est une matrice de transition (de taille  $n \times n$ ) alors  $M$  a 1 pour valeur propre.

*Démonstration.* La raison est simple : la propriété que la somme des "entrées" sur chaque ligne fait 1 peut s'écrire sous forme matricielle sous la forme :  $M \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$ ; ceci implique que  $\begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$  est vecteur propre à gauche de  $M$  associé à la valeur propre 1. Donc 1 est valeur propre.  $\square$

L'équation (5.12) satisfaite par la loi stationnaire, révèle que  $\rho$  est un vecteur propre à gauche associé à la valeur propre 1. Pourtant, on ne peut pas encore conclure qu'il existe une mesure stationnaire, car on n'a pas établi que le vecteur propre à gauche associé à la valeur propre 1 (qui existe on le sait) peut-être pris égal à une mesure de probabilité.

On va énoncer et admettre le fameux et important théorème de Perron-Frobeniüs<sup>10</sup>.

10. Il est plus général que ce qui est énoncé ici, mais ce qui est dit ici suffit pour les chaînes de Markov

**Théorème 5.23.** [Perron-Frobeniüs] Soit  $M$  une matrice de transition irréductible d'une chaîne de Markov sur un espace fini  $E = \{1, \dots, n\}$ . Alors cette chaîne de Markov n'admet qu'une seule mesure invariante, qui en plus, charge tous les états (donne une probabilité strict. positive à tous les états). Techniquement, cela signifie que 1 est une valeur propre simple pour  $M$ , et  $M$  possède un vecteur propre à gauche unique  $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_n)$  qui peut-être normalisé de sorte que toutes ses entrées sont strict. positives, et  $\sum_{i=1}^n \rho_i = 1$ .

■ Si la chaîne est apériodique et irréductible, alors  $M^n$  converge vers la matrice dont toutes les lignes sont égales au vecteur  $\rho$ . Cela implique que pour tout loi initiale  $\nu$ , la loi  $\nu M^n$  de la chaîne à l'instant  $n$ , converge vers  $\rho$  : pour toute loi initiale, tout  $j \in E$ ,

$$\mathbb{P}(X_n = j) \xrightarrow[n]{} \rho_j, \quad \text{pour tout } j \in E.$$

**Remarque 5.24.** Par exemple, si on prend  $M = \begin{bmatrix} 1/5 & 2/5 & 2/5 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \end{bmatrix}$ , il est facile de voir que cette matrice est irréductible et apériodique : on sait qu'il existe une loi invariante unique par le théorème de Perron-Frobeniüs. On peut le calculer et on trouve

$$v = \left[ \frac{5}{13} \quad \frac{16}{65} \quad \frac{24}{65} \right] = \left[ 0.3846153846 \quad 0.2461538462 \quad 0.3692307692 \right]$$

Par le théorème de Perron-Frobeniüs, on sait que la loi de  $X_n$  va converger vers  $v$ , quelle que soit la loi initiale ; Si on calcule les puissances de  $M$ , on trouve (en approché)

$$M^2 = \begin{bmatrix} 0.44 & 0.18 & 0.38 \\ 0.35 & 0.325 & 0.325 \\ 0.35 & 0.2625 & 0.387. \end{bmatrix}, \quad M^3 = \begin{bmatrix} 0.368 & 0.271 & 0.361 \\ 0.395 & 0.221. & 0.383. \\ 0.395 & 0.236. & 0.368. \end{bmatrix}, \quad M^{12} = \begin{bmatrix} 0.3846. & 0.2461. & 0.3692. \\ 0.3846. & 0.2461. & 0.3692. \\ 0.3846. & 0.2461. & 0.3692. \end{bmatrix}$$

avec une convergence de chaque ligne de  $M^n$  vers  $v$  super rapide (à vitesse exponentielle). Si  $\rho$  est la loi initiale, alors la loi à l'instant  $n$  est  $\rho M^n$ . Si on regarde ce qu'est celle loi, alors, si chaque ligne de  $M^n$  est proche de  $v$ , on voit que  $\rho M^n$  est proche de  $v$ , quel que soit  $\rho$ .

**Remarque 5.25.** ■ On a annoncé dans la Proposition 5.17 que toute chaîne possédait une loi stationnaire : dans le théorème précédent on a vu que c'était vrai pour les chaînes irréductibles. Si la chaîne n'est pas irréductible, alors, on peut extraire des classes de récurrence ; prenons une chaîne ayant une matrice de transition  $M$ , et soit  $C \subset E$  une classe de récurrence ; si on prend une loi initiale sur  $C$ , la chaîne reste dans  $C$ , et se comporte comme une chaîne de Markov irréductible ayant pour espace d'état  $C$  : elle possède donc une loi invariante qui ne charge que  $C$  ; c'est vrai sur chacune des composantes irréductibles, et donc, s'il y en a plusieurs, il y a plusieurs lois invariantes (et d'ailleurs, si on a 2 lois invariantes  $\nu$  et  $\nu'$  alors  $c\nu + (1-c)\nu'$  est aussi invariante pour tout  $c \in [0, 1]$ ).

Le théorème suivant permet de voir que la convergence en loi des chaînes de Markov concerne également la proportion du temps passé en un état :

**Théorème 5.26.** [théorème ergodique] Soit  $(X_n)$  une chaîne de Markov sur un espace d'état fini  $E$ , de matrice de transition  $M$ , irréductible et aperiodique. On note  $\rho$  son unique mesure invariante. Pour tout  $e \in E$  et  $n \geq 1$ , on note  $p_n(e)$  la proportion du temps passée par la chaîne à la position  $e$  :

$$p_n(e) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{1}_{X_k=e}.$$

Soit  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction quelconque. On a les propriétés suivantes :

- pour tout  $e \in E$ ,  $p_n(e) \rightarrow \rho(e)$  (convergence presque sûre),
- on a convergence de la somme pondérée suivante :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(X_k) = \sum_{e \in E} p_n(e) f(e) \rightarrow \sum_{e \in E} \rho(e) f(e) \quad (\text{convergence presque sûre}). \quad (5.15)$$

Le 2ème point est en fait une conséquence du 1er. Il s'agit dans le 2ème point de faire une moyenne pondérée des temps de passage (on pondère un passage en  $e$  par le "poids  $f(e)$ ).

## 5.6 Chaîne de Markov de mémoire $> 1$

Soit  $(X_n, n \geq 0)$  un processus à valeurs dans un ensemble  $E$  fini ou dénombrable. Soit  $m \geq 1$  un entier. On dit que  $(X_n, n \geq 0)$  est une chaîne de Markov de mémoire  $m$ , si pour tout  $n \geq m$ ,

$$\mathbb{P}(X_n = e_n \mid X_{n-1} = x_{n-1}, \dots, X_0 = x_0) = \mathbb{P}(X_n = e_n \mid X_{n-1} = x_{n-1}, \dots, X_{n-m} = x_{n-m}). \quad (5.16)$$

Une chaîne de Markov de mémoire 1 est donc une chaîne de Markov classique.

Il y a plusieurs façons d'étudier les chaînes de Markov de mémoire  $m > 1$ . La plus répandue et qui suffit bien souvent est la suivante : il s'agit de faire des paquets d'états successifs : pour toute suite  $(y_j, j \geq 0)$ , et pour tout  $k \geq m - 1$ , notons  $\vec{y}_k = (y_{k-(m-1)}, \dots, y_{k-1}, y_k)$  le paquet formé des  $m$  états consécutifs, terminant en  $k$  ; on voit que l'information contenue dans  $(X_0, \dots, X_{n-1})$  coïncide avec celle dans  $(\vec{X}_{m-1}, \dots, \vec{X}_{n-1})$ . L'équation (5.16) se réécrit alors

$$\begin{aligned} \frac{\mathbb{P}(X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n)}{\mathbb{P}(X_0 = x_0, \dots, X_{n-1} = x_{n-1})} &= \frac{\mathbb{P}(X_{n-m} = x_{n-m}, \dots, X_n = x_n)}{\mathbb{P}(X_{n-m} = x_{n-m}, \dots, X_{n-1} = x_{n-1})} \\ &\parallel \\ \frac{\mathbb{P}(\vec{X}_{m-1} = \vec{x}_{m-1}, \dots, \vec{X}_n = \vec{x}_n)}{\mathbb{P}(\vec{X}_{m-1} = \vec{x}_{m-1}, \dots, \vec{X}_{n-1} = \vec{x}_{n-1})} &= \frac{\mathbb{P}(\vec{X}_{n-1} = \vec{x}_{n-1}, \vec{X}_n = \vec{x}_n)}{\mathbb{P}(X_{n-1} = \vec{x}_{n-1})} \\ &\parallel \\ \mathbb{P}(\vec{X}_n = \vec{x}_n \mid \vec{X}_{m-1} = \vec{x}_{m-1}, \dots, \vec{X}_{n-1} = \vec{x}_{n-1}) &= \mathbb{P}(\vec{X}_n = \vec{x}_n \mid \vec{X}_{n-1} = \vec{x}_{n-1}). \end{aligned}$$

Sur cette formule on voit que le processus  $(\vec{X}_k, k \geq m)$  – codant les paquets – est une simple chaîne de Markov ! On peut donc l'étudier comme telle, puis transférer les résultats sur le processus  $(X_j, j \geq 0)$  ensuite, si nécessaire.

### 5.7 Chaîne de Markov avec espace d'état infini

La principale différence avec les chaînes de Markov avec espace d'état fini, est le fait que même sous des hypothèses d'irréductibilité et d'apériodicité, une chaîne peut ne pas avoir de loi stationnaire : on voit cela en regardant par exemple, la chaîne de Markov à espace d'état  $\mathbb{Z}$ , t.q. pour tout  $i \in \mathbb{Z}$ , la "matrice de transition  $M$ " a comme éléments non nuls sur sa  $i$ ème ligne :

$$M_{i,i} = 1/4, \quad M_{i,i-1} = 1/4, \quad M_{i,i+1} = 1/2.$$

Ca revient à dire que si au temps  $t$  la marche est en  $i$ , au temps  $t + 1$  elle sera en  $i + X$  avec  $X$  ayant pour loi :

$$\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(X = -1) = 1/4, \quad \mathbb{P}(X = 1) = 1/2.$$

La moyenne de l'incrément est  $1/4$ , donc, par la loi des grands nombres (quelle que soit la loi initiale de la chaîne),  $X_k/k \xrightarrow[n]{p.s.} 1/4$  : en d'autres termes, avec probabilité 1, la marche  $X_k$  tend vers l'infini, et donc, il ne peut pas y avoir de loi stationnaire (ce n'est pas si facile à démontrer formellement... essayez !)

On ne va pas aller beaucoup plus loin dans l'analyse de ces phénomènes. On peut juste retenir à ce niveau qu'il peut exister ou pas une loi invariante pour une chaîne sur un espace d'état infini. En général, c'est assez difficile de le savoir, même s'il existe des cas où une étude complète est possible.



## 6 ——— Processus de décision markovien ———

### 6.1 Introduction

Un processus de décision markovien (MDP) est une sorte de chaîne de Markov couplée à un système de décision : un opérateur par une suite de décisions cherche à optimiser une récompense “sur le long terme”. Le hasard intervient de différentes manières : soit car la décision a un résultat aléatoire, soit car l’environnement est lui même aléatoire (par exemple : le nombre de clients est aléatoire quelles que soient les décisions du vendeur).

Avant de rentrer dans le formalisme, il est probablement nécessaire de réfléchir un peu sur ce qu’est une décision, en toute généralité, et sur ce qu’est, une bonne décision.

**Décider**, c’est choisir entre différentes options, différentes actions. Pour savoir si une décision est bonne – ou optimale – on doit se donner une manière de mesurer sa qualité. Ici, un aspect comptable va nous aider : la valeur sera toujours numérique<sup>11</sup>. On va se donner comme paramètres du problème de décision, un moyen de mesurer de manière quantifiable le coût/récompense immédiate des décisions, et le plus souvent, on cherchera à estimer les effets à long terme de ces décisions. On parlera de la **valeur d’une suite de décisions** ou d’une politique de décision lorsqu’on fera le total des récompenses sur un certain intervalle de temps. Au passage, on parlera de **récompense** même si cette récompense est négative.

Le cadre est donc celui-ci :

- (i) on va mesurer un phénomène de manière régulière (par exemple, le résultat des ventes chaque semaine, la quantité d’objets produits chaque jour), etc.
- (ii) la décision que l’on prend et/ou l’environnement auront un effet aléatoire, mais cet effet sera supposé indépendant des choix/récompenses précédentes : l’effet dépendra juste de l’état actuel de la situation et de la décision. C’est pour cela que l’on parle de processus de décision markovien.

**Exemple 6.34.** (i) On classe les états d’une machine de 1 (neuve) à 5 (en panne). Chaque jour on peut essayer d’améliorer l’état de la machine, décider de ne rien faire ou d’en acheter une neuve : ça fait 3 décisions  $D_1, D_2, D_3$ . On connaît la probabilité  $T(s, d, s')$  de passer de l’état  $s$  à l’état  $s'$  pour chacune de ces décisions  $d$ . Il y a également un coût pour chacune de ces décisions  $C_d$  (coût de la machine si on en achète une neuve, coût de la réparation si on répare, rien si on ne fait rien). – Supposons que la rentabilité de la machine en état  $s$  est  $X_s$ . – Ainsi le jour  $j+1$ , notre décision de la veille au soir a entraîné un nouvel état  $s'$ , et une récompense  $R_{d,s'} = C_d + X_{s'}$  qui cumule le coût direct de la décision  $C_d$  et la rentabilité du jour suivant. On suppose bien sûr que sont connus tous les  $C_d, T(s, d, s')$  et  $X_{s'}$ . Comment optimiser la décision que l’on doit prendre ? Eh bien, ça dépend de l’objectif : si on souhaite optimiser le gain (moyen par exemple) que l’on aura demain soir, on ne prendra pas forcément la même décision que si on veut optimiser le gain dans une semaine, ou dans un mois, ou dans 10 ans.

- (ii) On cherche à contrôler un stock : stocker a un coût sur les plans suivants :
  - . immobilisation de capital, risque de vol, et dans certains cas, les produits stockés peuvent se

---

11. Dans tout ce qui n’est pas comptable – autrement dit, dans tout ce qui est important dans la vie – l’absence d’un cadre probabiliste clair et l’impossibilité de comparer les effets de telle ou telle décision rendent très difficile la prise de décision, et même l’évaluation de la qualité de la décision prise.



dégrader (produits alimentaires), devenir obsolètes, passer de mode, etc...

Chaque réapprovisionnement à un coût :

. frais de livraison, immobilisation de capital, temps de traitement.

Avoir un stock trop faible risque de faire manquer des ventes ce qui entraîne un manque à gagner (bénéfices potentiels perdus).

On peut imaginer de nombreux modèles raisonnables et importants économiquement de ce type : **la décision** du marchand, que l'on peut imaginer quotidienne ou hebdomadaire, porte sur la quantité  $k$  d'items commandés, pour  $0 \leq k \leq b$ , avec  $b$  une borne quelconque.

Comme **source d'aléa** : naturellement, le nombre de clients  $N_j$  pour le produit stocké au jour  $j$  (par exemple, Poisson de paramètre 5). Mais il y a plein d'autres sources d'aléa que l'on peut vouloir prendre en compte : tous les facteurs du problème discutés au dessus, presque (probabilité pour un vol de  $j$  produits, par jour, probabilité que la livraison n'arrive pas à la date prévue, etc).

La **récompense** elle va tenir compte des ventes réalisées et des coûts engendrés par les décisions et par les événements aléatoires du problème ; on devra tenir compte dans certains cas de dépréciation d'actif (si on stocke des produits alimentaires, on peut juger utile de diminuer la valeur des produits stockés de  $x\%$  chaque jour, par exemple). Ce type de problème, avec par exemple pour objectif de **maximiser le gain annuel** est un processus de décision markovien.

Pour écrire un cadre général on abstrait un petit peu :

**Définition 6.1.** Un processus de décision markovien est défini à l'aide de 4 paramètres  $(S, A, T, R)$ .

- L'ensemble  $S = \{S_1, \dots, S_k\}$  est l'**espace des états** du système ( $S$  pour "states"), (ici espace fini)
- L'ensemble  $A = \{a_1, \dots, a_{|m|}\}$  des **décisions/actions possibles**,
- La fonction  $T : S \times A \times S \rightarrow [0, 1]$  : la valeur  $T(s, a, s')$  est la **probabilité que le système passe de l'état  $s$  à l'état  $s'$  lorsque la décision  $a$  est prise**,
- la **fonction récompense**  $R : S \times A \times S \rightarrow \mathbb{R}$  ; la valeur  $R(s, a, s')$  est la récompense immédiate lorsque l'action entreprise est  $a$  et que le système saute de  $s$  à  $s'$ . Dans certains problèmes, naturellement, la récompense peut ne dépendre que de  $a$  ou de  $s'$  ou d'une partie des paramètres  $\{s, a, s'\}$ .

Il existe des variantes où les transitions ou récompenses dépendent en plus du temps ; une partie de ce qui suit est adaptable à ce cadre.

Bon, alors, ce qu'on va dire concernant les processus de décision Markovien n'est pas super compliqué... Seulement, avant de commencer, on va discuter un peu du cas déterministe : il y a aussi des cas où on doit prendre des décisions dans un cadre totalement déterministe pour optimiser "aussi une récompense" : par exemple, quand on choisit une route pour aller de  $A$  à  $B$ . On doit choisir, à chaque carrefour la direction qu'on va prendre, pour minimiser, par exemple, le temps du parcours, ou le nombre de km.

Un certain nombre de problèmes de ce type se traite par ce qu'on appelle de la programmation dynamique, qui est vraiment l'analogie déterministe des processus de décision Markovien

**Remarque 6.2.** *En général, on cherchera toujours à "maximiser" la récompense (plutôt que "minimiser"); bien sûr, tout problème de minimisation peut s'écrire sous la forme d'un problème de*

maximisation en remplaçant chaque récompense  $R$  par  $-R$  (minimiser dans le problème initial, c'est maximiser dans le second).

## 6.2 Programmation dynamique

On commence par une **définition un peu informelle** : On dit qu'on résout un problème d'optimisation par la méthode de programmation dynamique, lorsqu'on résout ce problème en le décomposant sous la forme de petits sous problèmes d'optimisation (le plus souvent triviaux). L'une des composantes de cette méthode algorithmique est le stockage (en mémoire de l'ordinateur) des solutions des petits sous problèmes que l'on a introduits. On parle parfois de technique de "mémorisation" ou "mémorisation" pour désigner ce stockage (malin) de calculs intermédiaires en programmation dynamique, et de manière plus générale, en algorithmique.

Pour comprendre, il faut voir un exemple. En voici donc un.

On se donne une grille carrée  $G_n := \{0, 1, \dots, n\} \times \{0, 1, \dots, n\}$ . On suppose que chaque sommet  $u$  de  $G_n$  est muni d'une valeur numérique  $\text{Val}(u)$ . On s'intéresse aux chemins allant de  $u_0 = (0, 0)$  à  $u_{2n} = (n, n)$  constitués uniquement de pas Est ou Nord. Formellement, l'ensemble des chemins est

$$\mathcal{C}_n = \{(u_0, u_1, \dots, u_{2n}) : u_{i+1} - u_i \in \{(1, 0), (0, 1)\}, \text{ pour } i \in \{0, 2n - 1\}\}.$$

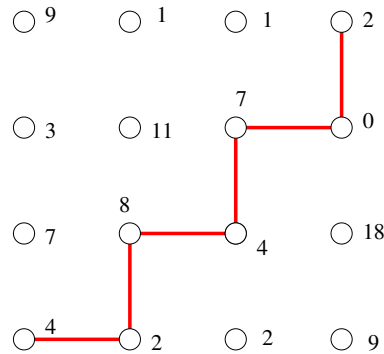


FIGURE 11 – Grille  $G_n$  avec sommets portant des valeurs. Le chemin rouge a poids 27. Ce n'est pas le chemin de poids maximal...

Le poids d'un chemin  $C = (C_0, \dots, C_{2n})$  est défini par

$$\text{poids}(C) = \sum_{i=0}^{2n} \text{Val}(C[i]),$$

c'est-à-dire la somme des valeurs des sommets le long du chemin. On note

$$M = \max_{C \in \mathcal{C}_n} \text{poids}(C),$$

le poids d'un chemin de poids maximal.

On s'intéresse à la question suivante : peut-on trouver un algorithme "efficace" permettant de calculer le poids maximum  $M$ ? Peut-on donner un algorithme efficace trouvant un chemin de poids maximal?

En fait, le nombre de chemins dans une telle grille est  $\binom{2n}{n}$  car chaque chemin peut-être codé par un mot de type ENNNNEENE avec  $2n$  lettres,  $n$  lettres E et  $n$  lettres N (Est et Nord). Ce nombre de chemins grandit très vite avec  $n$ . Pour  $n = 20$ , ça fait 137 846 528 820 chemins, pour  $n = 25$ , il y en a 126 410 606 437 752. Inutile de dire qu'on ne peut pas faire une boucle avec autant de cas à traiter.

La programmation dynamique consiste à traiter ce problème d'optimisation "en tranche". Au lieu de ne chercher à trouver que la valeur d'un chemin optimal qui va de  $(0, 0)$  à  $(n, n)$  on va chercher la valeur d'un chemin optimal qui va de  $(0, 0)$  à tout sommet  $(i, j)$  ! Il s'agit de quelque chose d'apparence nettement plus difficile, qui contient en gros  $n^2$  problèmes du même type que le précédent. Seulement ces problèmes d'optimisations sont liés, et c'est l'existence de ce lien qui fait que chacun de ces problèmes devient "trivial".

Si on note  $M[i, j]$  le poids maximal d'un chemin allant de  $(0, 0)$  à  $(i, j)$  alors on a clairement pour  $1 \leq i, j \leq n$

$$M[i, j] = \text{Val}(i, j) + \max\{M[i - 1, j], M[i, j - 1]\}, \quad (6.1)$$

et pour les points au bord du carré Sud et Ouest du carré :

$$\begin{cases} M[i, j] = \text{Val}(i, j) + M[i - 1, j] & \text{si } j = 0, i > 0 \\ M[i, j] = \text{Val}(i, j) + M[i, j - 1] & \text{si } i = 0, j > 0. \end{cases} \quad (6.2)$$

Bref, on doit percevoir qu'on a résolu le problème ici : car si on connaît  $M[i - 1, j]$  et  $M[i, j - 1]$  alors on connaît  $M[i, j]$  ! Donc il suffit de parcourir intelligemment "le tableau", voir Fig. 12! (il y a plusieurs façons de faire). Calcul de  $M[i, j]$  pour tout  $(i, j) \in G_n$  :

**Calcul de  $M[i, j]$  pour tout  $(i, j) \in G_n$**

$M[0, 0] := \text{Val}(0, 0)$

Pour  $h = 1$  à  $2n$  %%%  $h$  joue le rôle de  $i + j$

    Pour  $i = \max\{0, h - n\}$  à  $\min\{h, n\}$ ,

$j := h - i$

        si  $j \leq n$

            Si  $j = 0$  alors  $M[i, j] = M[i - 1, j] + \text{Val}(i, j)$

            Sinon, si  $i = 0$  alors  $M[i, j] = M[i, j - 1] + \text{Val}(i, j)$

            Sinon  $M[i, j] = \max\{M[i, j - 1] + M[i - 1, j]\} + \text{Val}(i, j)$

Bon voilà, juste 2 boucles de taille globale inférieure à  $2n(n + 1)$ , donc, juste  $2n^2 + 2n$  petits calculs : c'est presque gratuit et on a trouvé la valeur optimale  $M[i, j]$  de toutes les cases du tableau... Mais on n'a trouvé que la valeur max : on n'a pas stocké le chemin qui réalise le max. Pour ce deuxième but, il suffit d'enrichir un peu le programme ; on crée un tableau  $A = (A[i, j], 0 \leq i, j \leq n)$  qui va enregistrer pour chaque case  $(i, j) \neq (0, 0)$  l'origine le dernier pas réalisant le max comme cela :

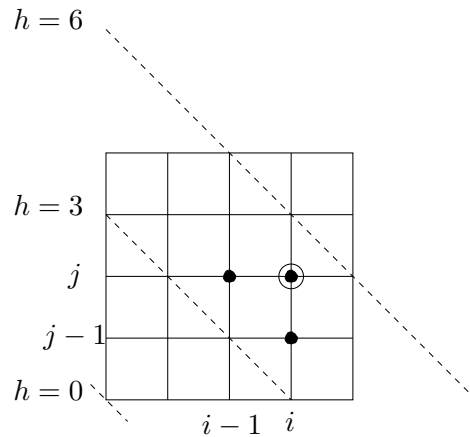


FIGURE 12 – . La valeur sur le point entouré se calcule à l'aide des 2 autres points; donc, la valeur des points sur une diagonale se calcule à l'aide des points sur la diagonale juste en dessous. Ici,  $n = 4$ . Tant que  $h$  est  $\leq n = 4$ ,  $i$  varie de 0 à  $h$ , puis lorsque  $h$  varie de  $n + 1$  à  $2n$ ,  $i$  varie de  $h - n$  à  $n$ ; ceci permet de voir que  $i$  varie de  $\max\{0, h - n\}$  à  $\min\{h, n\}$

```

1 #include <stdio.h>
2 #include <stdlib.h>
3 #include <time.h>
4 #include <math.h>
5 #define n 11 // on va de 0 a n-1 par la suite : plus facile en C
6 // Pour le problème du cours avec n=100, prendre n=101 ici
7 double Unif(){ return (double)rand() * 1./ RANDMAX ;} // Unif sur [0,1]
8
9 void Grille( int G[]) // on tire une grille aléatoire avec des +1 ou -1
    unif.
10 { // sur laquelle on va faire marcher notre algo.
11     int i, j;
12     for(i=0; i < n ; i++)
13         for(j=0; j < n ; j++)
14             { if(Unif() < 0.5) {G[i*n+j] = -1;}
15             else {G[i*n+j] = 1; }}
16 }
17
18 int Case(int i, int j){return(i*n+j);} // Codage d'un tableau 2 D par un
    tableau 1D
19
20 int iCase(int m) {return( (m-(m % n)) / n); } // abscisse de la case m
21 int jCase(int m) {return( m % n);} // ordonnée de la case m
22
23 int max (int x, int y) {if (x > y) {return (x);} return(y);}

```

```

24 int min (int x, int y) {if (x > y) {return (y);} return(x);}
25
26 void RCM( int G[] ) // Main function: Recherche Chemin Max
27 {
28     int *M=malloc(n*n*sizeof(int)); // Tableaux pour le max et l'argmax
29     int *A=malloc(n*n*sizeof(int));
30     int i , j , k , h , C;
31     M[Case(0,0)] = G[Case(0,0)]; // initialisation
32     for(h=1; h < 2*n-1; h++) // joue le rôle de i+j
33         for(i = max(h-(n-1),0); i < 1+min(h,n-1); i++) // le vrai n est n-1.
34             { j = h - i;
35             if(j < n ) // faut que (i,j) soit dans la grille
36                 {if(i > 0 && j > 0) // au centre
37                     {
38                         M[Case(i , j) ] = G[Case(i , j)]+ max(M[Case(i-1,j)] ,M[Case(i , j-1)]);
39                         if (M[Case(i-1,j)] > M[Case(i , j-1)]) // On regarde d'où vient le max
40                             {A[Case(i , j)] = Case(i-1,j);}
41                         else
42                             {A[Case(i , j)] = Case(i , j-1);}
43                     }
44                     else if(i > 0) // au bord Ouest
45                         {
46                             M[Case(i , j) ]=G[Case(i , j)]+M[Case(i-1,j)];
47                             A[Case(i , j)] = Case(i-1,j);
48                         }
49                     else // Au bord Sud
50                         {
51                             M[Case(i , j) ] = G[Case(i , j)]+M[Case(i , j-1)];
52                             A[Case(i , j)] = Case(i , j-1); }
53                     }
54             }
55
56     printf("le poids du chemin max est = %d \n", M[Case(n-1,n-1)]);
57     printf("un chemin realisant le max est  \n");
58
59     C = Case(n-1,n-1); // On suit les argmax... et on découvre le chemin
60     for(k=0; k < 2*n-2; k++)
61         {i = iCase(C); j = jCase(C);
62         printf("[%d, %d], ", i , j);
63         C= A[Case(i , j)];
64         }
65     printf("[0,0]\n"); // pour ne pas avoir de "," après le résultat

```

```

66 free (M) ; free (A) ;
67 }
68
69 int main() {
70 srand(time(NULL)); // pour changer la graine du générateur aléatoire
71
72 int * G = malloc( n*n*sizeof(int)); // allocation de la mémoire au
    tableau
73 Grille(G); // Simulation Grille
74 RCM(G); // Recherche Chemin Max
75 free (G); // libération de la mémoire
76 }

```

PROGRAMME/Chemin\_poids\_minimal.c

A la fin du programme, on voit qu'on utilise le tableau  $A$  pour retrouver le chemin max : On commence en  $u_{2n} = (n, n)$  qui est un point qui appartient à chaque chemin optimal (**dans d'autres problèmes, on devrait prendre un point terminal qui réalise le max recherché; il n'est pas toujours unique**). Pour reconstituer le chemin de poids max, on va ensuite sur le sommet  $u_{2n-1} = A[n, n] = A(u_{2n})$ , puis en  $u_{2n-2} = A(u_{2n-1})$ , etc., jusqu'à aller ensuite en  $u_0 = A(u_1)$ .

**Remarque 6.3.** *Ce programme, sur un PC standard, sur un tableau de taille  $1001 \times 1001$ , trouve le chemin de poids max en 0.04 s (de 0 à 1000) : ce chemin a masse 1633 (pour un tableau de taille  $10001 \times 10001$ , ça dure 11.5 s (poids max 16357)). Voir Fig. 13 pour les chemins de poids max.*

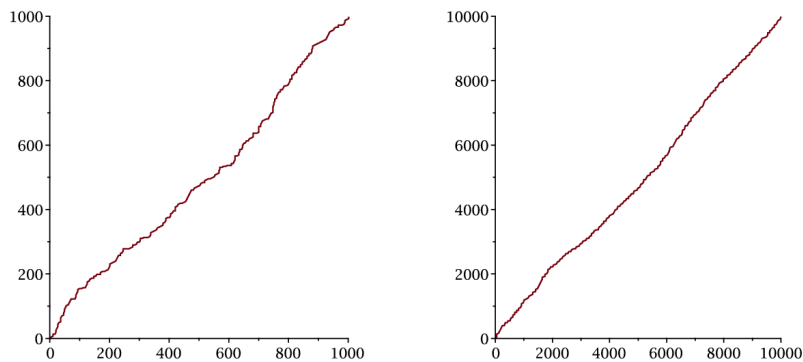


FIGURE 13 – Chemin de poids max correspond à un tableau de taille  $1001 \times 1001$  et un autre de taille  $10001 \times 10001$  où les cases ont été choisies indépendantes,  $\pm 1$  avec proba  $1/2$ .

En fait on peut représenter les choses de manière un plus mathématique, de manière à faire apparaître la fonction  $\text{Argmax}$  qui est le concept important ici. Pour une fonction  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  définie sur un ensemble  $E$  quelconque,

$$\text{Argmax}(f) = \{x \in E : f(x) = \max_u f(u)\}.$$

Ce qu'on appelle  $\text{Argmax}(f)$  c'est l'ensemble des valeurs de l'ensemble de définition réalisant le max de  $f$ .

Ici la case du tableau  $A[i, j]$  code justement l'endroit où une certaine fonction réalisait son max. En effet, au détail de bord près

$$M[i, j] = \max\{M[i, j - 1] + \text{Val}(i, j), M[i - 1, j] + \text{Val}(i, j)\}.$$

On peut étendre cette propriété au bord, en disant que pour tout  $(x, y)$  extérieur à la grille,  $M[x, y] = -\infty$ . Ainsi, si on définit la fonction

$$f_{i,j} : (x, y) \mapsto M[x, y] + \text{Val}(i, j)$$

sur l'ensemble  $\{(i - 1, j), (i, j - 1)\}$ , on a pour ce point de vue

$$M[i, j] = \max f_{i,j}, \tag{6.3}$$

$$A[i, j] \in \text{Argmax}(f_{i,j}). \tag{6.4}$$

Le signe "∈" dans cette dernière ligne provient du fait qu'on peut choisir, pour notre chemin optimal, n'importe quel élément  $A[i, j]$  dans l'ensemble  $\text{Argmax}(f_{i,j})$ .

**Remarque 6.4.** ■ *Trouver les solutions d'un problème d'optimisation avec un algorithme de programmation dynamique n'est bien sûr pas toujours possible. Il faut réussir à décomposer le problème initial de manière satisfaisante, et même lorsque c'est possible, il est souvent très difficile de s'en apercevoir.*

■ *Lorsque c'est possible, il peut y avoir plusieurs façons de faire différentes. Par exemple, dans le problème qu'on a regardé, on aurait pu aussi parcourir le tableau depuis la fin (le coin Nord-Est). On aurait alors stocké différemment les "argmax" : c'est ce qu'on va faire plus bas, lorsqu'on va présenter les MDP. On aurait également pu parcourir le tableau colonne par colonne, obtenant ainsi un programme plus simple.*

On appelle programmation dynamique ce type de problèmes dans lequel on résout un problème d'optimisation en **le découpant** en petits problèmes d'optimisation (plus ou moins triviaux) : ici les petits morceaux sont les fonctions  $M[i, j]$ , où  $f_{i,j}$ . La valeur recherchée  $M[n, n]$  est alors trouvée, et l'état (le chemin) réalisant le maximum est obtenue en **"remontant"** le découpage. Un point important, est **le stockage des solutions des petits problèmes** : on produit donc des "algorithmes rapides" qui contiennent nettement moins de calculs qu'une approche exhaustive, mais qui peuvent utiliser "beaucoup de mémoire", ce qui crée également des limitations. Il est important de comprendre que la programmation récursive (avec appels de fonctions récursives) ne marche pas ici, car, si les résultats "précédents ne sont pas stockés", la programmation récursive va finalement faire un calcul par possibilités donnant une complexité énorme.

Si on voit chaque pas qu'il faut faire depuis  $(0, 0)$  pour arriver en  $(n, n)$ , comme une suite de décisions permettant d'obtenir la masse maximale, on voit que dans ce cas très simple, trouver le chemin de valeur max ne peut pas se faire "sans parcourir", d'une façon ou d'une autre, tout le tableau... Ce cas très simple est absolument révélateur des problèmes de décisions : la meilleure décision dépend de tout l'espace sur lequel on travaille, et non pas de détails locaux, ni d'optimisations locales.

### 6.3 MDP : résolution à horizon fini

Une fois encore, le cadre est le suivant :

$S = \{S_1, \dots, S_n\}$  = ensemble des états du système,

$A = \{A_1, \dots, A_m\}$  = ensemble des actions/décisions possibles,

$T : S \times A \times S$  la fonction de transition,

$R : S \times A \times S \rightarrow \mathbb{R}$  la récompense immédiate.

De nouveau, un MDP représente toujours une suite d'états  $s_0, s_1, \dots$ , possiblement infinie, pour lequel on prend des décisions  $a_0, a_1, \dots$

**Exemple 6.35.** ■  $S$  = l'ensemble des niveaux possibles d'un certain stock ; mettons  $S = \{0, 1, \dots, 25\}$ .

■  $A$  = ensemble constitué du nb d'items que l'on peut commander chaque jour ; mettons  $A = \{0, \dots, 20\}$  : on décidera toujours de commander entre 0 et 20 items,

■ La valeur  $T(s, a, s')$  donne la proba. de passer de l'état  $s$  à  $s'$  lorsqu'on prend l'action  $a$ . La probabilité  $T(s, a, s')$  fait partie des données du problème, et provient d'une modélisation qui peut être assez complexe et qui n'est pas toujours discutée dans les énoncés. Dans notre problème de gestion de stock, la modélisation va tenir compte des ventes de la journée et aussi, du fait que si on commande  $a$  items, il est possible qu'on en reçoive qu'une partie (vols/casses lors du transport). Par exemple

$T(10, 12, 22) = 0.8$  (on a commandé 12 alors qu'on avait 10, en stock, on a été livré et on n'a rien vendu),

$T(10, 12, 21) = 0.1$  (on a commandé 12 alors qu'on avait 10, et 1 produit s'est évaporé ou a été vendu),

$T(10, 12, 20) = 0.1$  (on a commandé 12 alors qu'on avait 10, et 2 produits évaporés ou vendus).

Bien sûr, on doit spécifier chaque nombre  $T(s, a, s')$  pour bien spécifier le modèle. Il peut néanmoins arriver qu'on ne souhaite pas prendre certaines actions dans certains états : il faut au moins que pour tout  $s$ , pour au moins un  $a$ ,  $T(s, a, \cdot)$  soit bien défini. Par exemple, ici, on ne veut pas stocker plus que 25 items : si on en a 17 en stock, on ne s'autorisera que les décisions  $\{0, \dots, 8\}$ , et on a donc le droit de ne spécifier  $T(17, a, s')$  que pour  $a \in \{0, \dots, 8\}$  et pour tout  $s'$  pour bien définir le problème d'optimisation.

■ la récompense  $R(s, a, s')$  est l'une des données du problème : elle donne la récompense obtenue lorsqu'on était dans l'état  $s$ , qu'on a commandé  $a$ , et qu'on se retrouve dans l'état  $s'$  ; une fois encore, c'est une donnée du problème et parfois la façon dont est obtenu  $R(s, a, s')$  n'est pas discutée. Dans notre problème, on pourrait avoir  $R(10, 12, 22) = -1250$  (on a acheté 12 items à 100 euros + livraison 50 euros, on n'a rien vendu),  $R(10, 12, 21) = -1070$  (modélisée comme récompense moyenne :  $-1250 + 200 \times 0.9 + 0 \times 0.1$  : on a acheté 12 items à 100 euros + livraison 50 euros, une vente à 200 euros avec proba 0.9, un produit cassé/évaporé avec proba 0.1).

On est dans un cas où on doit prendre  $N$  décisions avec  $N$  fini. Au début, le système est dans un état  $s_0$ . On va prendre des décisions  $a_0, \dots, a_{N-1}$ . L'état va passer à l'état  $s_1, \dots, s_N$ . La récompense globale sera

$$\text{RecGlo}(N) = \left( \sum_{j=0}^{N-1} R(s_j, a_j, s_{j+1}) \right) + V_N(s_N). \quad (6.5)$$

La valeur  $V_N(s_N)$  n'est pas toujours présente : elle représente la valeur terminale de notre système lorsqu'on est dans l'état  $s_N$ .



Comme tout est aléatoire ici, **c'est en fait l'espérance de la récompense globale qu'on va optimiser**. Dans les faits,  $s_0$  peut-être aléatoire ou déterministe, et en général  $s_1, \dots, s_N$  seront le plus souvent aléatoires. Les décisions elles, vont être déterministes : plus précisément sachant l'état  $s$  où on est au temps  $t$ , la décision prise  $a_t$  à l'instant  $t$  sera déterministe. En général, "la meilleure" décision à prendre à l'instant  $t$  dépend de l'état où on est en  $t$ , et dépend de  $t$  aussi!<sup>12</sup>

On va donc avoir besoin de chercher les meilleures décisions ( $A_j, 0 \leq j \leq N-1$ ) où  $A_j$  est la décision à l'instant  $j$ ; on parle parfois de **politique** pour désigner la fonction qui associe une action  $a(s)$  à prendre pour tout état  $s$ . Par exemple, dans l'exemple 6.35, on pourra donner un nom à la politique qui consiste à commander  $\max\{20, 25 - k\}$  items lorsqu'on en a  $k$  en stock : par exemple, la politique "compléter le stock le plus rapidement possible". Par la suite, on va s'intéresser aux **politiques optimales, celles qui permettent d'optimiser l'espérance de la récompense globale**<sup>13</sup>.

Une fois encore, on raisonne en partant des "dernières décisions". On suppose donc qu'au temps  $N-1$ , on est dans l'état  $s_{N-1}$  (on va faire une boucle sur tous les états  $s_{N-1} \in S$  possibles).

Si au temps  $N-1$ , alors qu'on doit prendre notre dernière décision on est dans l'état  $s$  et qu'on prend la décision  $a_{N-1} = a$ , on va se retrouver dans l'état  $s'$  avec probabilité  $T(s, a, s')$ . Dans ce cas notre récompense immédiate est  $R(s, a, s')$ . Il peut y avoir une valeur  $V_N(s')$  associée à l'état final  $s'$ . On a donc comme espérance de récompense provenant de la dernière période si on prend la décision  $a$

$$\sum_{s' \in S} T_{s,a,s'} (R_{s,a,s'} + V_N(s')).$$

Si on veut optimiser notre gain moyen sur cette dernière période, en partant de  $s_{N-1} = s$ , on doit donc prendre la décision qui maximise cette valeur :

$$\begin{cases} V_{N-1}(s) = \max_{a \in A} \sum_{s' \in S} T_{s,a,s'} (R_{s,a,s'} + V_N(s')) \\ A_{N-1}(s) \in \text{Argmax}_{a \in A} \sum_{s' \in S} T_{s,a,s'} (R_{s,a,s'} + V_N(s')). \end{cases} \quad (6.6)$$

Ainsi  $V_{N-1}(s)$  représente la valeur maximale de la moyenne de **la récompense future** au temps  $N-1$ , lorsqu'on est dans l'état  $s$  au temps  $N-1$ , et  $A_{N-1}(s)$  donne une décision pour laquelle ce max est réalisé. **On stocke ces valeurs**. La fonction  $A_{N-1}$  est une politique, car elle associe à chaque valeur  $s$ , une décision à prendre.

On va remonter dans le temps et considérer successivement – à l'aide d'une boucle – les temps  $j = N-2, N-3, \dots, 0$ . Puisqu'on souhaite tenir compte de l'espérance des récompenses futures optimales (comme précédemment) on a pour tout  $j$  allant de  $N-2$  à  $0$  :

$$\begin{cases} V_j(s) = \max_{a \in A} \sum_{s' \in S} T_{s,a,s'} (R_{s,a,s'} + V_{j+1}(s')) \\ A_j(s) \in \text{Argmax}_{a \in A} \sum_{s' \in S} T_{s,a,s'} (R_{s,a,s'} + V_{j+1}(s')). \end{cases} \quad (6.7)$$

On remarque que cette formule s'applique aussi pour  $j = N-1$  (voir (6.6)).

12. on ne va pas faire la même commande au grossiste au temps  $N-1$  et au temps  $0$ , même si dans les 2 cas, le stock est vide.

13. Parfois on se contente de comparer plusieurs politiques.

Une fois qu'on a tout calculé, on observe ce qu'on a :<sup>14</sup>

- En partant de  $s_0$ , on connaît la décision  $A_0(s_0)$  qu'il faut prendre pour optimiser/maximiser la moyenne  $V_0(s_0)$ , qui est donc notre **espérance de récompense globale optimisée**. C'est donc l'espérance de ce qu'on aura en poche au temps  $N$ , et on connaît donc cela, avant même de commencer.
- Ensuite, on attend le temps 1, pour savoir ce que l'aléa du système nous fournit comme état  $s_1$ . A ce moment là, on a déjà tout calculé : on sait que la décision  $A_1(s_1)$  va optimiser la récompense résiduelle moyenne à partir du temps 1, qui est en fait la valeur  $V_1(s_1)$  en partant de  $s_1$ ... On prend la décision  $A_1(s_1)$ , etc. Au temps  $j$ , lorsqu'on aura pris connaissance de l'état  $s_j$  du système, on prendra la décision  $A_j(s_j)$ ...

**Remarque 6.5 (IMPORTANT).** *Dans les faits, on optimise donc l'espérance de la récompense finale : cette récompense reste aléatoire, et on n'est pas du tout assuré d'obtenir cette récompense au temps  $N$ . C'est donc une certaine forme d'optimisation, qui permet de réfléchir, qui permet de faire mieux que de prendre des décisions au doigt mouillé, mais qui dans certains cas n'offre pas toutes les garanties nécessaires (une moyenne peut être élevée, alors qu'avec une certaine probabilité faible, une catastrophe arrive : on pourrait donc vouloir éviter certains risques, ce qui n'est pas forcément possible avec cette approche).*

**Remarque 6.6.** *Supposons que  $N$  soit raisonnablement petit par exemple 200. Que l'ensemble des états soit petit, par exemple 100, et l'ensemble des décisions aussi, par exemple 50. On va faire les calculs donnés par (6.7) :*

- une boucle sur  $j$  allant de  $N$  à 1 ;
- un calcul pour chaque valeur de  $s \in S$  (une boucle) ;
- un calcul pour chaque décision  $a \in A$  (car on doit chercher le max pour  $a \in A$ ) : on fait donc le calcul pour tout  $a$ , et on regarde qui réalise le max, et combien il vaut (une boucle),
- pour chaque élément ainsi décrit, le calcul revient à faire une somme sur les états de  $s' \in S$ .

On doit **stocker** tous ces nombres, car ils sont utilisés dans les calculs suivants (aussi bien les  $V_j(s)$  que les  $A_j(s)$ ) :

On doit donc calculer  $N \times \#S \times \#A = 200 \times 100 \times 50 \times 100 = 1\,000\,000$  sommes de taille 100 : c'est faisable en temps limité (quelques secondes en C ou C++), et tout à fait stockable dans un PC, en mémoire vive d'un PC standard. Ca donne une idée de l'échelle des problèmes pour lesquels on peut optimiser un processus de décision markovien.

## 6.4 MDP : résolution à horizon infini

Ici, avant de commencer, il faut s'interroger sur le sens du mot "optimiser" en temps infini. On fait la somme des récompenses le long du processus de décision. Dans tous les cas intéressants, cette somme ne va pas être constante, mais aura une tendance à être croissante ou décroissante. Dans la plupart des cas, en temps infini, la récompense globale sera elle-même infinie ( $+\infty$  ou  $-\infty$ ). Optimiser n'a plus trop de sens. Et pourtant, on a une vision intuitive de ce que peut signifier optimiser en temps long, sans pour autant fixer un horizon fini.

---

14. oui, vous avez raison, c'est une façon de parler : on doit savoir avant ce qu'on attend de ce calcul, car si on a fait tout cela pour rien...

Il y a principalement 2 critères d'optimisation pour ces MDP en temps infini :

– le **critère moyen** qui consiste à chercher à optimiser

$$\frac{1}{n} \lim_n \mathbb{E} \left( \sum_{j=1}^n R[S_{j-1}, A_j, S_j] \right) \quad (6.8)$$

la moyenne asymptotique des récompenses obtenues par unité de temps,

– le **critère  $\gamma$ -itéré** qui consiste à optimiser

$$\mathbb{E} \left( \sum_{j=1}^{+\infty} \gamma^j R[S_{j-1}, A_j, S_j] \right). \quad (6.9)$$

Dans cette dernière formule  $\gamma \in (0, 1]$  est un nombre qui représente une sorte de taux d'intérêt, ou de dépréciation (typiquement  $\gamma = 0.99$  ou  $0.98$ ). Cette formule semble étrange à première vue, et pourtant c'est elle qui est la plus utilisée, et qui finalement est la plus sympathique et la plus pertinente. Lorsqu'on a de l'inflation, où des taux d'intérêts positifs, un euro aujourd'hui a plus de valeur qu'un euro demain...<sup>15</sup>.

Bref, si on doit prendre des décisions pour optimiser nos gains à long terme il est quand même raisonnable de favoriser un peu plus le gain... à court terme.

Mathématiquement, la présence de  $\gamma^j$  est bénéfique : c'est un poids qui décroît exponentiellement vite lorsque  $j$  augmente ; les récompenses  $R(s, a, s')$  étant finies et bornées, la valeur indiquée dans (6.9) est finie pour toute suite de décisions : on peut optimiser<sup>16</sup>

On ne va pas étudier le critère moyen ici ; pour trouver **une stratégie optimale approchée** pour le critère  $\gamma$ -itéré on va utiliser l'algorithme dit d'itération de la valeur. Il s'agit, en gros, d'itérer les équations (6.7) en ajoutant l'effet de  $\gamma$  jusqu'à "avoir convergence". Comme on remonte dans le temps dans notre problème d'optimisation, il est raisonnable de fixer des valeurs au temps 0, et faire remonter les décisions vers le passé.

### Algorithme d'itération de la valeur

– On fixe des valeurs  $V_0(s)$  pour tout état  $s \in S$  (par exemple 0).

Pour  $j$  allant  $-1, -2, \dots$  on calcule pour tout  $s \in S$ ,

$$V_j(s) = \max_{a \in A} \sum_{s' \in S} T_{s,a,s'} (R_{s,a,s'} + \gamma V_{j+1}(s')) \quad (6.10)$$

$$A_j(s) \in \text{Argmax}_{a \in A} \sum_{s' \in S} T_{s,a,s'} (R_{s,a,s'} + \gamma V_{j+1}(s')) \quad (6.11)$$

L'idée est alors de faire tourner l'algorithme et de l'arrêter lorsque  $V_{-n}(s)$  et  $V_{-n-1}(s)$  sont proches pour tout  $s$  ; en pratique, on se donne un  $\varepsilon$  petit et on s'arrête lorsque

$$\sum_{s \in S} |V_{-n}(s) - V_{-n-1}(s)| \leq \varepsilon.$$

15. Si j'ai un euro tout de suite, je peux le placer en banque ; j'aurai mettons 1.01 euros dans 1 an : donc, 1 euro tout de suite a plus de valeur qu'un euro demain. Il y a d'autres raisons : l'argent tout de suite disponible peut être dépensé, et un certain nombre de risques inhérents à toute entreprise font qu'"un tiens vaut mieux que deux tu l'auras".

16. lorsque  $\gamma = 1$ , le problème peut quand même être bien défini, pour certaines récompenses, qui en gros, doivent valoir 0 lorsqu'un certain "but" est atteint.

Ce qui nous permet de savoir que cette stratégie est bonne est l'utilisation conjointe de 2 résultats théoriques :

**Théorème 6.7.** Il existe une unique fonction valeur  $V^* : S \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $V^*$  est solution de l'équation de point fixe

$$V^*(s) = \max_{a \in A} \sum_{s' \in S} T_{s,a,s'} (R_{s,a,s'} + \gamma V^*(s')).$$

La politique  $A^*$  qui correspond à cette valeur

$$A^*(s) \in \text{Argmax}_{a \in A} \sum_{s' \in S} T_{s,a,s'} (R_{s,a,s'} + \gamma V^*(s'))$$

est la politique optimale (l'application de toute autre politique - toujours la même - ne peut que diminuer la valeur itérée).

Dans les faits, on itère à l'aide de l'algorithme d'itération de la valeur. Il y a deux résultats qui disent que se faisant, on trouve la bonne valeur (asymptotiquement, et aussi la bonne politique, car celle-ci se stabilise) ;

**Lemme 6.8.** Si  $\max_{s \in S} |V_{-n}(s) - V_{-n-1}(s)| < \varepsilon(1 - \gamma)/2$  alors  $\max_{s \in S} |V^*(s) - V_{-n}(s)| \leq \varepsilon/2$ .

En d'autres termes, si  $V_{-n}(s)$  est très proche de  $V_{-n-1}(s)$  pour tout  $s$ , alors on est aussi très proche de la valeur optimale. Mais... il reste un doute : disons qu'on a beaucoup itéré et qu'on sait maintenant grâce au lemme précédent qu'on a une valeur proche de la valeur optimale : mais on aimerait connaître la politique  $A^*$  optimale, et le résultat précédent ne dit pas que  $A_{-n}$  est proche de  $A^*$ . Voici comment on procède pour trouver  $A^*$ .

Tout d'abord, on associe une valeur à chaque politique que l'on itère : prenons une politique  $B$  (qui associe une action  $B(s) \in A$  à chaque état  $s \in S$ ). On définit **la valeur  $V^B$  associée à  $B$  (itérée)** comme étant la fonction  $V^B$  solution de

$$V^B(s) = \sum_{s' \in S} T_{s,B(s),s'} (R_{s,B(s),s'} + \gamma V^B(s')), \quad \text{pour tout } s \in S \quad (6.12)$$

Ça a l'air compliqué, mais c'est juste une équation linéaire en  $V^B(s_1), \dots, V^B(s_n)$  car tout est connu ici, et il n'y a plus de max, car on a fixé la politique. Donc, avec un peu d'algèbre linéaire on peut trouver exactement  $V^B$ . Maintenant pour savoir si une politique  $B$  est optimale – par exemple la politique que l'on a trouvé  $A_{-n}$  et qui nous semble bien – on a un critère :

**Lemme 6.9.** Soit  $B$  une politique et  $V^B$  la valeur associée. On calcule la politique optimale en partant de la valeur  $V^B$  :

$$C(s) = \text{Argmax}_{a \in A} \sum_{s' \in S} T_{s,a,s'} (R_{s,a,s'} + \gamma V^B(s')), \quad \text{pour tout } s \in S. \quad (6.13)$$

– Si pour tout  $s \in S$ ,  $C(s) = B(s)$  alors la politique  $B$  est optimale ; sinon, elle ne l'est pas.

Ainsi pour trouver la politique optimale – ce qui est plus important que la valeur optimale (!) – il suffit de tester si  $A_{-n}$  satisfait le critère donné par ce lemme ; sinon, on va plus loin dans l’itération, et on essaiera à nouveau avec un  $A_{-n-k}$ , jusqu’au moment où le critère est satisfait.

Il existe un autre moyen de trouver la politique optimale et qui repose uniquement sur ce critère : ce moyen s’appelle l’**algorithme d’itération de la politique!**. Le voici :

■ D’abord, on se donne une politique  $B$ , n’importe laquelle. Puis on entre dans une “boucle while” :

(i) On calcule  $V^B$ .

(ii) On calcule  $C$  tel qu’il est défini dans (6.13).

2 cas :

■ Si  $B = C$ , on a fini, le critère du lemme est satisfait,  $C$  est optimal.

■ Si  $B \neq C$ , on n’a pas fini ! On pose  $B = C$ , et on retourne en (i).

Une fois que cela est fini, on a la politique optimale  $B$ . La valeur optimale peut alors se calculer en résolvant le système (6.12).

## 7 ——— Marches aléatoires ———

**Définition 7.1.** Soit  $(X_i, i \geq 1)$  une suite de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans  $\mathbb{R}$  de loi commune  $\mu$ . On appelle marche aléatoire d'incrément de loi  $\mu$  (ou d'incrément les  $(X_i, i \geq 1)$ ), la suite  $(S_k, k \geq 0)$  définie par  $S_0 = s$  (valeurs initiale), et pour  $k \geq 1$ ,

$$S_k = S_0 + X_1 + \cdots + X_k.$$

Le plus souvent on prend  $S_0 = 0$  car la comparaison d'une suite commençant en 0 avec une commençant en une autre valeur est aisée.

Les marches aléatoires sont des chaînes de Markov homogènes, car bien sûr, si on connaît  $S_k$  alors  $S_{k+1} = S_k + X_{k+1}$  de sorte que la loi de  $S_{k+1}$  connaissant  $(S_j = s_j, j \leq k)$  coïncide avec la loi de  $S_{k+1}$  connaissant  $S_k = s_k$ .

Le comportement asymptotique de la suite  $(S_n)$  peut se faire à l'aide de la loi des grands nombres et du théorème de la limite centrale qui disent que :

**Proposition 7.2.** Si  $(S_n)$  est une marche aléatoire dont les incréments ont une moyenne bien définie, alors

$$S_n/n \xrightarrow[n]{\text{proba}} \mathbb{E}(X_1) \quad (7.1)$$

et si la variance des  $X_i$  existe et vérifie  $\sigma^2 = \text{Var}(X_1) \in (0, +\infty)$ , alors

$$\frac{S_n - n\mathbb{E}(X_1)}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{loi}} \mathcal{N}(0, 1). \quad (7.2)$$

Dans la suite, on va se focaliser sur la “marche simple” qui est probablement la chaîne de Markov homogène avec d'espace infini, la plus simple en dehors des suites déterministes.

**Définition 7.3.** On appelle marche aléatoire simple, la marche aléatoire ayant pour incrément  $\pm 1$  avec probabilité  $1/2$ . On appelle marche aléatoire simple de longueur  $n$ , la suite

$$S[n] := (S_0, S_1, \cdots, S_n)$$

avec  $S_0 = 0$ . Elle prend ses valeurs dans l'ensemble

$$\mathcal{E}_n = \{(s_0, \cdots, s_n) : s_0 = 0, s_{i+1} - s_i \in \{+1, -1\}, \forall i \in \{0, \cdots, n-1\}\}$$

et pour tout  $s[n]$  dans  $\mathcal{E}_n$ ,

$$\mathbb{P}(S[n] = s[n]) = 1/2^n. \quad (7.3)$$

Cette marche aléatoire a une importance particulière en probabilité pour plusieurs raisons que l'on va voir. Sa nature combinatoire fait qu'on va pouvoir faire des calculs exacts.

Tout d'abord,

**Lemme 7.4.** Le nombre de trajectoires  $S[n]$  de  $\mathcal{E}_n$  t.q.  $S_n = k$  est  $\binom{n}{(n+k)/2}$  avec la convention que  $\binom{n}{(n+k)/2} = 0$  si  $(n+k)/2$  n'est pas un entier, et donc

$$\mathbb{P}(S_n = k) = \binom{n}{(n+k)/2} 2^{-n}.$$

*Démonstration.* Une marche de taille  $n$  avec des pas  $\pm 1$  ayant  $m$  pas montants et  $n-m$  pas descendants termine en  $m - (n - m) = 2m - n$ . Ici on s'intéresse à celles qui terminent en  $k$  : on doit donc avoir  $2m - n = k$ , et donc  $m = (n+k)/2$ . Il reste à voir qu'il y a  $n$  incréments pour constituer toute marche de  $\mathcal{A}_n$ , et observer que le nombre de manières de placer  $(n+k)/2$  incréments  $+1$  correspond au nombre de manières de choisir un sous-ensemble de  $(n+k)/2$  indices parmi les  $n$  disponibles, c'est-à-dire  $\binom{n}{(n+k)/2}$ .

Une autre preuve : chaque incrément vaut  $\pm 1$  avec proba  $1/2$ . Du coup, l'incrément  $i$ ,  $X_i$ , peut s'écrire sous la forme  $X_i = 2B_i - 1$  où  $B_i$  est une Bernoulli  $1/2$ . Ainsi,  $\mathbb{P}(\sum_{i=1}^n X_i = k) = \mathbb{P}(\sum_{i=1}^n (2B_i - 1) = k) = \mathbb{P}(\sum_{i=1}^n B_i = (k+n)/2) = \binom{n}{(n+k)/2} 2^{-n}$  puisque  $\sum_{i=1}^n B_i$  est une binomiale  $B(n, 1/2)$ .  $\square$

Ceci donne la loi de la valeur terminale de la marche aléatoire. On sait, par le théorème de la limite centrale, qu'elle est de l'ordre de  $\sqrt{n}$ .

Voyons maintenant comment déterminer la loi du maximum de la marche. On note

$$M_n = \max\{S_k, 0 \leq k \leq n\}. \tag{7.4}$$

Le principal ingrédient pour obtenir cette loi, est appelé principe de réflexion. Ce principe permet de compter des trajectoires terminant à un certain niveau et ne franchissant pas un second niveau (voir Fig. 14). Il s'écrit :

$$\mathbb{P}(M_n \geq r, S_n = j) = \mathbb{P}(S_n = 2r - j).$$

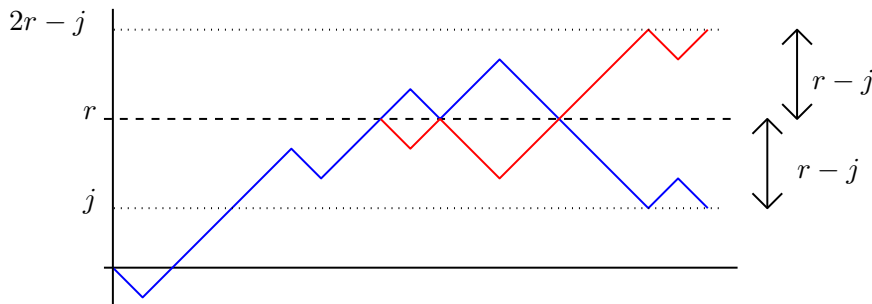


FIGURE 14 – Principe de réflexion : il y a autant de trajectoires bleues qui terminent en  $j$  et qui tapent dans la droite  $y = r$  que de trajectoires (bleues puis rouges) qui terminent en  $2r - j$ .

**Lemme 7.5.** Soit  $n \geq 1, r \geq 0$  : on a

$$\mathbb{P}(M_n \geq r) = 2\mathbb{P}(S_n \geq r) - \mathbb{P}(S_n = r) = 2\mathbb{P}(S_n > r) + \mathbb{P}(S_n = r).$$

*Démonstration.* Soit  $r \geq 0$  et  $m \leq r$  :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(M_n \geq r) &= \sum_j \mathbb{P}(M_n \geq r, S_n = j) \\
 &= \sum_{j \leq r} \mathbb{P}(M_n \geq r, S_n = j) + \sum_{j > r} \mathbb{P}(M_n \geq r, S_n = j) \\
 &= \sum_{j \leq r} \mathbb{P}(S_n = 2r - j) + \sum_{j > r} \mathbb{P}(S_n = j) \\
 &= \mathbb{P}(S_n \geq r) + \mathbb{P}(S_n > r)
 \end{aligned}$$

Pour la première égalité, on a utilisé la formule des probabilités totales, et sommé sur toutes les valeurs possibles pour  $S_n$ . Dans la deuxième on a séparé les valeurs de  $j \leq r$  et celles  $j > r$ , car on veut appliquer sur la première somme le principe de réflexion, et sur la 2ème, on voit que l'événement  $\{M_n \geq r\}$  est inclus dans  $\{S_n = j\}$  ce qui amène une simplification ensuite.  $\square$

On connaît donc la loi du maximum précisément! Et on a donc une limite en loi, que l'on peut tirer du théorème de la limite centrale :

**Lemme 7.6.** Le maximum  $M_n$  est de l'ordre de  $\sqrt{n}$ ; normalisé par  $\sqrt{n}$ , il converge en loi

$$\frac{M_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{loi} |N| \quad (7.5)$$

où  $N$  suit la loi normale  $\mathcal{N}(0, 1)$ .

*Démonstration.* C'est une conséquence du Lemme 7.5. On écrit la fonction de répartition de  $M_n$  : Pour  $x \geq 0$ ,

$$2\mathbb{P}(S_n > x\sqrt{n}) \leq \mathbb{P}(M_n \geq x\sqrt{n}) \leq 2\mathbb{P}(S_n \geq x\sqrt{n})$$

par le TCL, les 2 quantités à droite et gauche convergent vers  $2\mathbb{P}(N \geq x)$  où  $N$  est une variable gaussienne  $\mathcal{N}(0, 1)$ . Donc  $\lim_n \mathbb{P}(M_n/\sqrt{n} \leq x) \rightarrow 2\mathbb{P}(N \geq x) = \mathbb{P}(|N| \geq x)$ . On en déduit que la fonction de répartition de  $M_n/\sqrt{n}$  converge vers celle de  $|N|$ .  $\square$

**Remarque 7.7.** Ce résultat dit que dans un jeu de pile ou face où on perd ou gagne 1 euro à chaque partie, au temps  $n$ , la fortune maximale d'un joueur est de l'ordre de  $\sqrt{n}$  tout comme la valeur terminale  $S_n$ . D'ailleurs, asymptotiquement, la loi de la fortune max  $M_n$  a même limite que  $|S_n|/\sqrt{n}$ . Donc, si on joue à ce jeu pour s'enrichir, on n'est pas sûr de gagner, et si on gagne après 1000 000 de parties... notre fortune est de l'ordre de 1000.

**Définition 7.8.** Soit  $a \in \mathbb{Z}$  et  $S$  une marche aléatoire démarrant en 0 : on note

$$\tau_a(S) = \inf\{j > 0 : S_j = a\}$$

le temps d'atteinte du niveau  $a$  par la marche aléatoire : ainsi  $\tau_1(S)$  a même loi que  $\tau_{-1}(S)$  : c'est le temps qu'il faut pour un joueur  $A$  dans un jeu de pile ou face, pour avoir "enfin" une fortune positive.



**Remarque 7.9.** On va s'intéresser à la récurrence de la marche aléatoire. Le temps de retour en 0 peut s'écrire à l'aide de la variable  $\tau_{-1}$  : en effet, en partant de 0, la marche, après un premier pas, est en 1 ou en  $-1$ . Si on s'intéresse au retour en 0, commencer en 1 ou en  $-1$  ça ne change rien... On voit qu'on a alors  $\tau_0$  a même loi que  $1 + \tau_{-1}$ .

On appelle chemin de Dyck de longueur  $2n$  une trajectoire d'une marche  $\pm 1$  qui reste positive et termine en 0 au temps  $2n$  :

$$D_{2n} := \{(s_0, \dots, s_{2n}) : s_{i+1} - s_i = \pm 1, S_i \geq 0, \forall i, \text{ et } S_{2n} = 0\}.$$



FIGURE 15 – Les 5 chemins de Dyck de longueur 6.

**Lemme 7.10.** Pour tout  $n \geq 0$ ,

$$\mathbb{P}(\tau_{-1}(S) = 2n + 1) = |D_{2n}|/2^{2n+1} \tag{7.6}$$

avec

$$|D_{2n}| = \frac{\binom{2n+1}{n}}{2n+1} = \frac{\binom{2n}{n}}{n+1}. \tag{7.7}$$

*Démonstration.* La première assertion est facile à comprendre : prenons une marche qui atteint  $-1$  pour la première fois au temps  $2n + 1$  : au temps  $2n$  elle est en 0, et avant positive ou nulle. De cet argument, on perçoit immédiatement que les trajectoires  $S$  pour lesquelles  $\tau_{-1}(S) = 2n + 1$  sont constitués d'un chemin de Dyck de longueur  $2n$  (n'importe lequel) suivi par un pas décroissant. La formule (7.6) suit immédiatement car une trajectoire d'une marche de longueur  $2n+1$  a masse  $1/2^{2n+1}$ , n'est-il pas ?

La formule (7.7) peut se démontrer de multiples façons, mais aucune n'est super simple. La preuve que l'on donne est combinatoire. Notons  $P_{2n+1}$  les marches de longueur  $2n + 1$  qui terminent en  $-1$ . Ces marches contiennent en particulier les chemins de Dyck auquel on a ajouté un dernier pas  $-1$ , c'est-à-dire des marches  $S$  tq  $\tau_{-1}(S) = 2n + 1$ .

L'idée de la preuve est la suivante : pour toute trajectoire  $S$  de longueur  $2n + 1$  dans  $P_{2n+1}$ , on va définir une classe de rotation. La classe de rotation de  $S$  est fabriquée à l'aide des incréments  $(\Delta_i, 1 \leq i \leq 2n + 1)$  de  $S$  définis par

$$\Delta_i = S_i - S_{i-1}.$$

On définit à l'aide de  $S$  un ensemble de  $2n + 1$  trajectoires  $S^{(0)}, \dots, S^{(2n)}$  où la trajectoire  $S^{(r)}$  possède les mêmes incréments que  $S$  mais au lieu de prendre  $\Delta_i$  comme  $i$ ème incrément on prend  $\Delta_{r+i \bmod 2n+1}$  :

$$S_0^{(r)} = 0, \text{ et pour } m \geq 1, S_m^{(r)} = \sum_{k=1}^m \Delta_{r+k \bmod 2n+1}.$$

Une autre façon de voir cela : pour construire  $S^{(r)}$  depuis  $S$ , on coupe la trajectoire  $S$  à l'abscisse  $r$  et on échange les deux morceaux de trajectoire.

La fin de la preuve : On affirme que :

- (a) chaque classe de rotation contient  $2n + 1$  trajectoires différentes,
- (b) chaque classe de rotation contient une unique marche telle que  $\tau_{-1}(S)$ ,

Si on démontre (a) et (b) on a fini car justement (7.7) exprime le fait que le nb de chemins de Dyck, qui est égal au nombre de marches  $S$  t.q.  $\tau_{-1}(S) = 2n + 1$ , représente une fraction  $1/(2n + 1)$  du nombre d'éléments de  $P_{2n+1}$  qui est  $\binom{2n+1}{n}$ .

L'idée de la preuve est la suivante : lorsqu'on prend une trajectoire  $S$  de  $P_{2n+1}$  et que l'on considère  $a = \min\{k : S_k = \min S\}$  le premier moment où  $S$  atteint son minimum, alors, un petit dessin montre que  $S^{(a)}$  a la propriété  $\tau_{-1}(S^{(a)}) = 2n + 1$  (atteint son minimum à la fin). Ceci implique que chaque classe de rotation contient une trajectoire  $S$  t.q.  $\tau_{-1}(S) = 2n + 1$ . Maintenant, on peut regarder les classes de rotation générées par les trajectoires  $S$  t.q.  $\tau_{-1}(S) = 2n + 1$ . On s'aperçoit alors facilement que  $S^{(a)}$  atteint son minimum pour la première fois en  $a$  : donc, toutes les trajectoires d'une classe de rotation sont différentes, et l'une d'elle seulement atteint son minimum à la fin. □

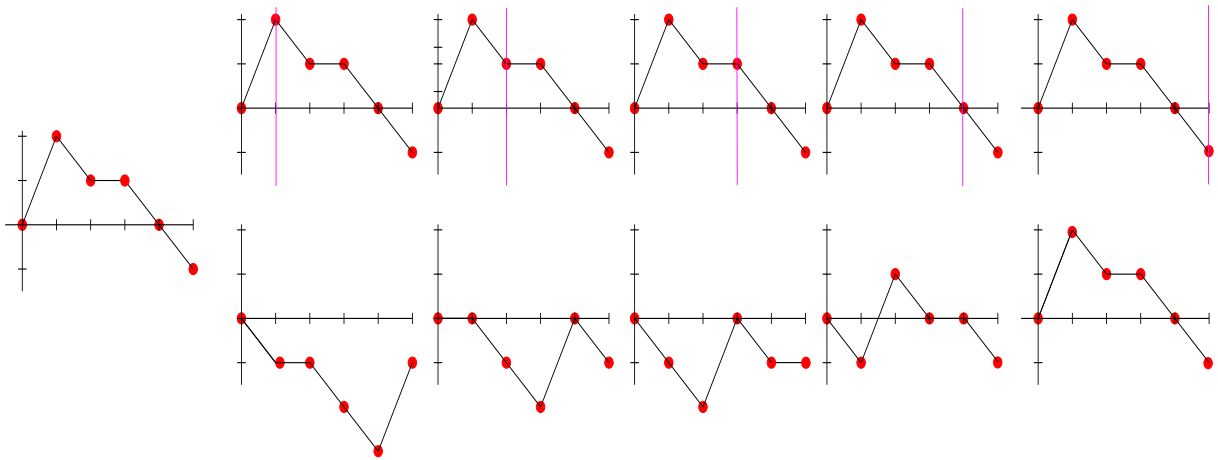


FIGURE 16 – Un chemin  $t$  atteignant son minimum à la fin et ses 5 conjugués  $t^{(1)}, \dots, t^{(5)}$  dans la ligne sous dessous (la construction marche si les incréments négatifs sont seulement des  $-1$ , mais les incréments positifs peuvent prendre plusieurs valeurs : dans chaque classe de rotation, une seule trajectoire atteint  $-1$  à la fin).

**Théorème 7.11.** Soit  $(S_n, n \geq 0)$  une marche aléatoire simple démarrant en 0 :

(i) cette marche est récurrente et revient donc avec probabilité 1 en 0, et donc un nombre infini de fois

(ii) pour tout  $k$  dans  $\mathbb{Z}$ , la marche  $S$  visite  $k$  un nombre infini de fois.

Il faut noter que le fait que la marche soit irréductible n'implique pas qu'elle est récurrente... car ici, le nombre d'états est infini. Il existe des cas de chaîne de Markov irréductible qui ne sont pas récurrente dans ce cadre, par exemple, la marche aléatoire d'incrément  $\pm 1$  mais avec probabilité  $p \neq 1/2$ .

*Démonstration.* Une marche qui démarre de 0 va aller en 1 ou en -1. Dans tous les cas elle se retrouve à distance 1 de l'origine, et donc, qu'elle soit en +1 ou -1, le problème est le même : il s'agit de montrer que le temps pour revenir en 0 est fini avec proba 1. Ainsi, finalement, ce qu'on veut démontrer c'est  $\mathbb{P}(\tau_{-1}(S) < +\infty) = 1$ . Il y a plusieurs façons de faire. On va utiliser une méthode astucieuse pour laquelle il n'y a aucun calcul ou presque (car rappelons le, on doit démontrer que

$$\mathbb{P}(\tau_{-1} < +\infty) = \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(\tau_{-1} = 2n + 1) = \sum_{n \geq 0} \frac{\binom{2n}{n}}{n + 1} = 1,$$

ce qui... n'est pas évident... sans calcul).

Voici la méthode : une marche qui démarre en 0 va en 1 ou en -1 avec proba 1/2. Si elle est en -1 c'est bon, elle est arrivée : cet événement est inclus dans l'événement  $\{\tau_{-1} < +\infty\}$ . Sinon, elle va en 1. Maintenant, depuis 1, pour arriver en -1, il faut "descendre 2 fois" : atteindre le niveau 0 puis le niveau -1. Ça va coûter alors 2 variables  $\tau$  et  $\tau'$  indépendantes de même loi que  $\tau_{-1}$  (car le temps nécessaire pour atteindre le niveau 0 depuis 1 a clairement même loi que  $\tau_{-1}$ ). On voit que  $\tau_{-1}$  est fini dans ce cas où on commence par "+1" ssi ces 2 variables  $\tau$  et  $\tau'$  sont finies. Si on note  $q = \mathbb{P}(\tau_{-1} < +\infty)$ , on vient de démontrer que  $q$  satisfait l'équation

$$q = 1/2 + (1/2)q^2$$

et il est facile de résoudre cette équation qui est équivalente à

$$q^2 - 2q + 1 = 0 \Leftrightarrow (q - 1)^2 = 1 \Leftrightarrow q = 1.$$

Une marche qui part de 0 revient donc en 0 avec proba 1, et donc va revenir un nb infini de fois en 0. Cela finit la preuve de la première propriété annoncée.

Maintenant, donnons nous  $k$  et démontrons que la marche va toucher  $k$  avec proba 1. Ça suffit pour conclure, car une fois qu'elle a atteint  $k$ ,  $k$  joue le même rôle que 0 dans le raisonnement précédent : la marche reviendra en  $k$  un nombre infini de fois. Il y a plusieurs manières de prouver que la marche touche  $k$  avec proba 1.

Première preuve : par symétrie, je peux supposer  $k$  négatif. Mais alors toucher  $k$ , suppose que l'on touche d'abord -1, puis -2, ... puis  $k$ . Chaque fois, le temps qu'il faut est une variable qui a même loi que  $\tau_{-1}$ . Donc, comme  $\tau_{-1}$  est une variable finie avec proba 1, alors la somme de  $k$  variables indépendantes ayant cette loi est finie aussi avec proba 1. Donc on atteint  $k$  en un temps fini avec proba 1, c'est ce

qu'on voulait prouver.

Deuxième preuve. Chaque fois qu'on est en 0, la probabilité  $q_k$  qu'on atteigne  $k$  avant de revenir en 0 est au moins  $1/2^k$  car  $1/2^k$  est justement la probabilité d'aller en  $k$  en  $k$  pas (donc cette une borne inférieure, la véritable proba étant clairement plus grande). Donc, si on construit la variable de Bernoulli  $B_j$  vallant 1 si on touche  $k$  avant 0 après le  $j$ ème passage en 0 (et avant le suivant), alors  $B_j$  est une Bernoulli de paramètre  $q_k > 0$ ... Bien sûr ce qu'il se passe entre des visites en 0, ce sont des morceaux de trajectoires indépendantes, donc les  $B_j$  sont indépendantes. Donc... finalement, on se demande si dans une suite de Bernoulli  $B_j$  de même paramètre  $q_k$  l'une fait 0 : eh bien oui, la première à même une loi géométrique, qui est bien sûr finie avec proba 1. La marche va donc toucher  $k$  en un temps fini.  $\square$

**Proposition 7.12.** Dans un jeu de pile ou face juste, le temps moyen qu'il faut pour atteindre la fortune  $-1$  (ou 1 par symétrie) est infini !, c'est-à-dire

$$\mathbb{E}(\tau_{-1}) = +\infty.$$

On a vu que  $\mathbb{P}(\tau_{-1} < +\infty) = 1$ . Ainsi  $\tau_{-1}$  est une variable finie avec proba 1 mais de moyenne infinie.

*Démonstration.* Deux méthodes :

1. Première solution astucieuse : elle repose toujours sur l'astuce discutée plus haut avec  $\tau$  et  $\tau'$  : On a dit que  $\tau_{-1}$  vallait 1 avec proba  $1/2$  (si on descend d'un pas) et si on monte, avec proba  $1/2$ ,  $1 + \tau + \tau'$ . Donc, si on note  $m$  la moyenne de  $\tau_{-1}$ , elle doit satisfaire l'équation

$$m = 1 \times 1/2 + 1/2(1 + m + m)$$

on résout et on trouve

$$m = 1 + m.$$

... après un petit moment de stupeur, et vérification de tous les détails... puisque  $\tau_{-1}$  est positive, la moyenne  $m$  est un nombre qui est dans  $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ ... et l'équation  $m = 1 + m$  possède une solution dans cet ensemble, et c'est  $m = +\infty$ .

2. Deuxième solution. On écrit  $\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(\tau_{-1} = 2n + 1)(2n + 1) = \sum_{n \geq 0} \binom{2n+1}{n} 2^{-2n-1}$ . Ensuite, on utilise la formule de Stirling qui dit que

$$n! \sim (n/e)^n \sqrt{2\pi n}$$

de sorte que

$$\begin{aligned} \binom{2n+1}{n} 2^{-2n-1} &= \frac{(2n+1)}{n+1} \binom{2n}{n} 2^{-2n-1} \sim \frac{(2n+1)}{n+1} 2^{-2n-1} \frac{(2n/e)^{2n} \sqrt{4\pi n}}{(n/e)^{2n} (2\pi n)} \\ &\sim 1/\sqrt{\pi n} \end{aligned}$$

ceci est le terme général d'une série divergente (cela se démontre en comparant à l'intégrale  $\int_1^{+\infty} 1/\sqrt{x} dx$  qui vaut  $+\infty$ ). Donc  $\mathbb{E}(\tau_{-1}(n)) = +\infty$ .  $\square$

La morale de cette histoire bien sûr, c'est que si on joue à pile ou face 1 euro toutes les secondes avec Joe, avec des lancers indépendants et une pièce juste, on finira par avoir une fortune positive, c'est sûr... mais cela nous prendra en moyenne un temps infini.

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Éléments de probabilités discrètes et continues</b>	<b>6</b>
2.1	Fondements . . . . .	6
2.1.1	Univers - Évènements. Notion de probabilité . . . . .	6
2.1.2	Probabilité conditionnelle - Indépendance . . . . .	9
2.2	Variables aléatoires . . . . .	14
2.2.1	Introduction . . . . .	14
2.2.2	Gommage de l'espace de probabilité . . . . .	15
2.2.3	Variable aléatoire réelle . . . . .	16
2.3	Deux inégalités... . . . .	20
2.3.1	Inégalité de Markov . . . . .	20
2.3.2	Inégalité de Bienaymé-Tchebichev . . . . .	21
2.4	Lois discrètes importantes . . . . .	21
2.4.1	loi de Bernoulli . . . . .	21
2.4.2	Loi binomiale . . . . .	22
2.4.3	Loi uniforme . . . . .	23
2.4.4	Loi géométrique . . . . .	23
2.4.5	Loi de Poisson . . . . .	24
2.5	Loi d'un couple de v.a. . . . .	25
2.5.1	Probabilité conditionnelle. Indépendance de v.a.r. . . . .	28
2.6	Plus de 2 variables ? . . . . .	31
2.7	Variables continues . . . . .	32
2.8	Exemple de la loi normale . . . . .	34
2.9	D'autres lois continues . . . . .	35
2.9.1	Loi uniforme sur $[0, 1]$ . . . . .	35
2.9.2	Loi exponentielle . . . . .	35
2.9.3	Loi de Cauchy . . . . .	36
<b>3</b>	<b>Rappels: Théorèmes limites en probabilité</b>	<b>38</b>
3.1	Convergence en probabilité . . . . .	39
3.2	Loi faible des grands nombres . . . . .	39
3.3	Convergence en loi . . . . .	40
<b>4</b>	<b>Simulation de variables aléatoires</b>	<b>47</b>
4.1	Simulation de v.a. discrètes . . . . .	48
4.2	Simulation de v.a. admettant une densité . . . . .	50
4.3	Méthode de rejet . . . . .	51
4.4	Estimation d'une intégrale: méthode de Montecarlo . . . . .	54

<b>5</b>	<b>Chaînes de Markov</b>	<b>59</b>
5.1	Chaîne de Markov avec espace d'état fini . . . . .	59
5.2	Chaîne de Markov et marche aléatoire sur un graphe . . . . .	61
5.3	Pourquoi s'embêter avec des matrices ? . . . . .	65
5.4	Simulation d'une chaîne de Markov discrète . . . . .	67
5.5	Chaîne aperiodique, loi stationnaire . . . . .	67
5.6	Chaîne de Markov de mémoire $> 1$ . . . . .	72
5.7	Chaîne de Markov avec espace d'état infini . . . . .	73
<b>6</b>	<b>Processus de décision markovien</b>	<b>75</b>
6.1	Introduction . . . . .	75
6.2	Programmation dynamique . . . . .	77
6.3	MDP: résolution à horizon fini . . . . .	83
6.4	MDP: résolution à horizon infini . . . . .	85
<b>7</b>	<b>Marches aléatoires</b>	<b>90</b>