

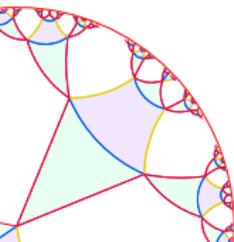
Comment déterminer la planarité d'un groupe fuchsien ?

De l'algorithmique dans les cartes infinies

David Renault

LaBRI, Université Bordeaux 1

28 janvier 2010

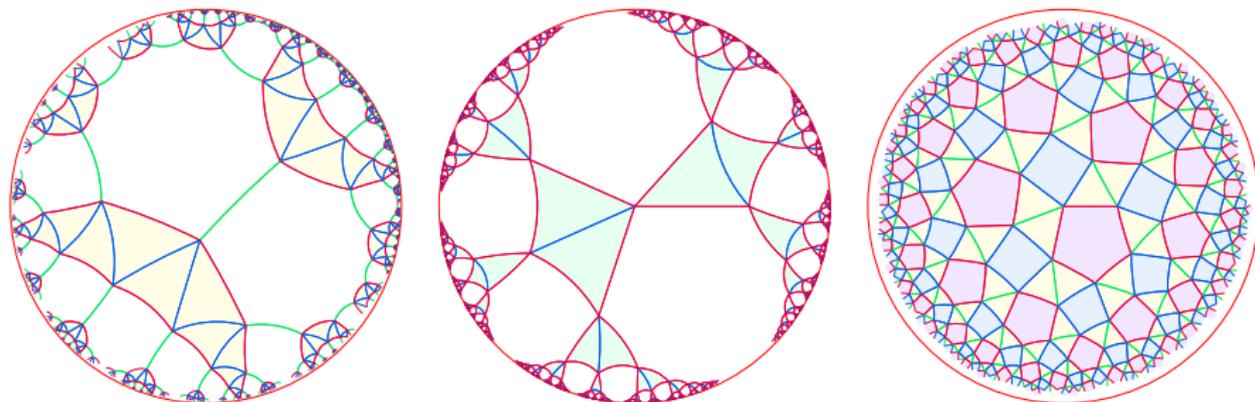


C'est quoi déjà un groupe fuchsien ?

Définition : Groupe fuchsien

Un *groupe fuchsien* est un groupe d'isométries *discret* du plan hyperbolique.

Usuellement, on peut le représenter par son graphe de Cayley :

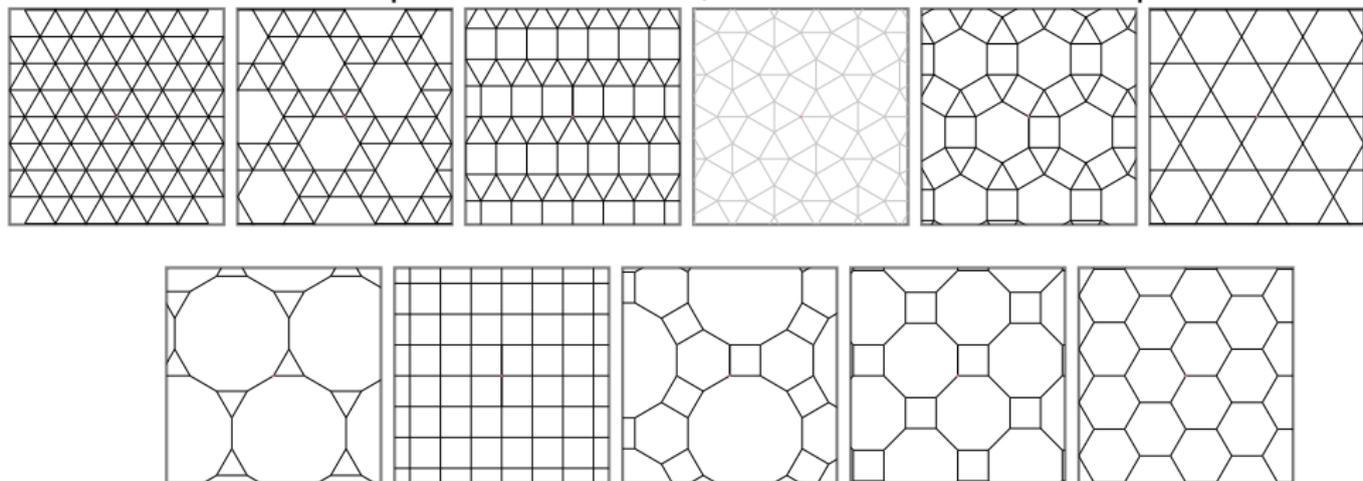


C'est quoi déjà un groupe fuchsien ?

Définition : Groupe fuchsien

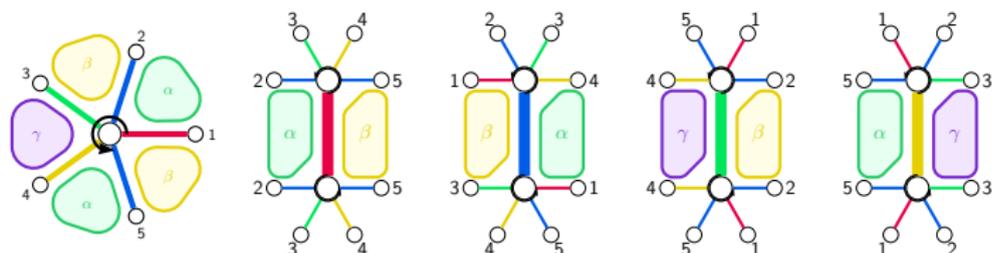
Un *groupe fuchsien* est un groupe d'isométries *discret* du plan hyperbolique.

Si on ne s'intéresse qu'au cas euclidien, la liste suivante est complète :



Pourquoi s'intéresser aux groupes fuchsien ?

- Il en existe plusieurs représentations simples :
 - schémas d'étiquetages [Ren05]



- présentations générateurs/reliations

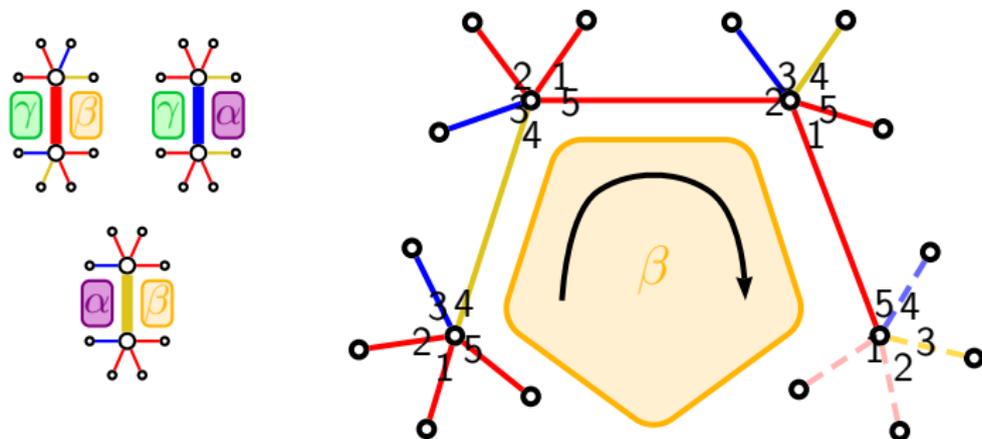
$$\left\{ a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \mid (a_1 a_5)_5^n, (a_5 a_4)_4^n, (a_4 a_3)_3^n, (a_3 a_2)_2^n, (a_2 a_1)_1^n \right\}$$

- Il est possible de les construire, de les énumérer par schéma d'étiquetage.

Degré	# Schémas	Degré	# Schémas
1	0	4	24
2	5	5	52
3	8	6	185

Pourquoi s'intéresser aux groupes fuchsien ?

Calcul du bord des faces du graphe de Cayley d'un groupe fuchsien :



Pourquoi s'intéresser aux groupes fuchsien ?

- Au départ, ils représentent en fait tous les graphes de Cayley localement finis du plan hyperbolique,
- Par quotient, cela permet de représenter tous les groupes de surfaces (hormis les quelques cas non hyperboliques)
- Leur représentation est une forme naturelle de carte planaire infinie.
- La famille de groupes représentée est variée (en terme de treewidth, et de croissance)

Que se pose t-on comme question alors ?

Des problèmes combinatoires, comme les problèmes de Dehn :

- le problème du mot
- le problème du mot généralisé
- le problème de l'isomorphisme

Des problèmes d'ordre plus géométrique :

- le problème de la discrétude

Et ces problèmes, lorsqu'ils sont décidables, mènent à des algorithmes pour les résoudre.

Plan de l'exposé

- Décrire le problème du mot généralisé pour les groupes fuchsien et une procédure de décision axée *combinatoire*
- Décrire le problème de la discrétude des groupes d'isométrie du plan hyperbolique, et une procédure de décision axée *géométrie*.
- Montrer comment ces deux problèmes sont en fait liés, et décrire les techniques de résolution associées.
- Expliquer en quoi les méthodes utilisées pour construire un algorithme à partir du second problème peuvent permettre de concevoir un algorithme pour le premier, et d'en étudier sa complexité.

- 1 Généralités sur les groupes fuchsien
- 2 Le problème du mot généralisé
- 3 Le théorème de discrétude
- 4 Algorithmes géométriques

Généralités sur les groupes

Définition : Groupe

Un *groupe* G est un ensemble muni d'une loi $(\cdot) : G \times G \rightarrow G$ telle que :

- La loi (\cdot) est associative. $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
- Elle admet un élément identité ϵ . $a \cdot \epsilon = \epsilon \cdot a = a$
- Tout élément $a \in G$ admet un inverse a^{-1} . $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = \epsilon$

- Quelques groupes à connaître (pour cet exposé) : les groupes de symétries du plan, les groupes de matrices $(SL_2(\mathbb{R}), PSL_2(\mathbb{R})), \dots$

- Un groupe est dit *topologique* s'il peut être muni d'une topologie qui rende l'opération (\cdot) continue.

Exemple : Pour des groupes de matrices sur \mathbb{R} , il existe une topologie naturelle induite par la topologie sur \mathbb{R} .

- Il est dit *discret* s'il est muni de la topologie discrète.
- Un sous-groupe d'un groupe topologique est discret si la topologie induite (par celle du groupe topologique) est la topologie discrète.

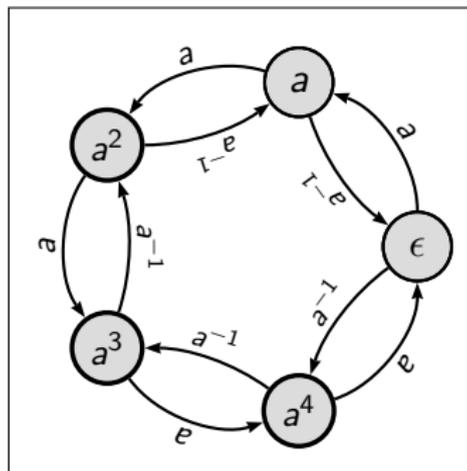
Remarque : Pour un groupe d'isométries du plan, il est nécessaire et suffisant que l'action du groupe sur le plan n'ait que des orbites discrètes.

- Un groupe G est *engendré* par un sous-ensemble (fini) de générateurs $S = \{g_1, \dots, g_n\}$ si tout élément de G peut s'écrire comme produit d'éléments de S .

Définition : Graphe de Cayley

Le *graphe de Cayley* Γ d'un groupe G engendré par S est le graphe :

- les sommets de Γ sont les éléments de G ;
- une arête $g \xrightarrow{g_i} h$ relie les sommets (g, h) ssi $g \cdot g_i = h$.

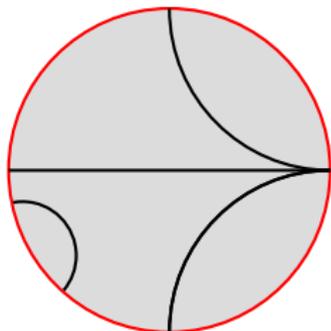


Généralités sur le plan hyperbolique

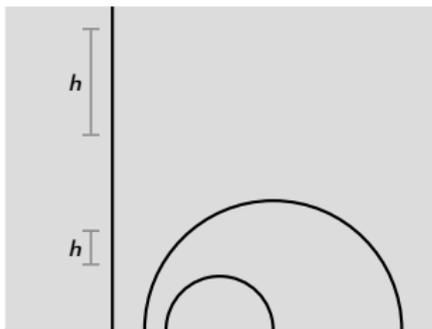
Définition : Plan hyperbolique

Le *plan hyperbolique* peut être défini de deux manières :

- la boule unité $B(0, 1)$ munie de la distance locale $ds = \frac{|dz|}{\sqrt{1-|z|^2}}$.
- le demi-plan supérieur muni de la distance locale $ds = \frac{|dz|}{|\Im(z)|}$



Modèle de Poincaré



Modèle du demi-plan

Isométries hyperboliques

Isométries hyperboliques

Les isométries du plan hyperboliques (modèle du demi-plan) sont les homographies de la forme :

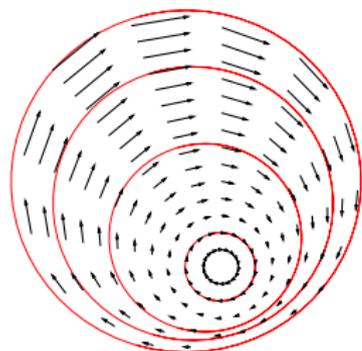
$$z \rightarrow \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} (a, b, c, d) \in \mathbb{R} \\ \text{et } ad - bc = \pm 1 \end{cases}$$

Conséquences :

- Toute isométrie hyperbolique se représente par une matrice $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.
- La loi de composition des isométries correspond au produit matriciel.
- Le groupe des isométries hyperboliques est isomorphe à $PSL_2(\mathbb{R})$.

Types d'isométries hyperboliques

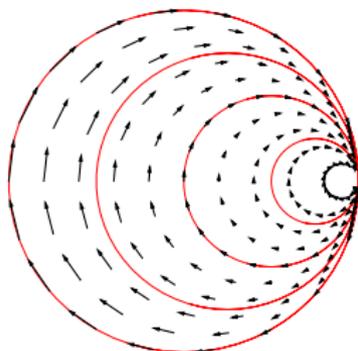
Classification faite selon les points fixes de l'isométrie :



Elliptique

$$|Tr(M)| < 2$$

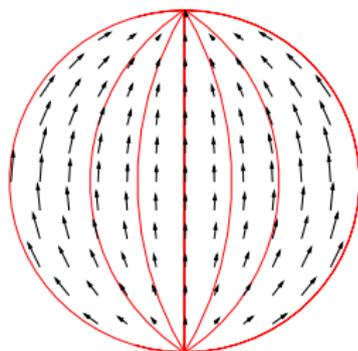
$$M \approx \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$



Parabolique

$$|Tr(M)| = 2$$

$$M \approx \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Hyperbolique

$$|Tr(M)| > 2$$

$$M \approx \begin{bmatrix} \sqrt{\mu} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\mu}} \end{bmatrix}$$

- 1 Généralités sur les groupes fuchsien
- 2 Le problème du mot généralisé**
- 3 Le théorème de discrétude
- 4 Algorithmes géométriques

Définition du GWP

Soit G un groupe fuchsien.

Problème du mot généralisé

Résoudre le *problème du mot généralisé* (GWP) dans G , c'est pouvoir décider si, étant donné un sous-groupe $H < G$ et un mot $u = u_1 \dots u_n$ sur les générateurs de G , si ce mot correspond à un élément de H ou non.

- Ce problème est indécidable dans le cas général.
- Mais connu pour être décidable dans le cadre des groupes fuchsien
Ces groupes ont la propriété d'être LERF [Sco78, Sco85].
- Algorithme induit est peu efficace, et pas géométrique.

Un problème plus simple (?)

Considérons un autre problème pour le groupe H :

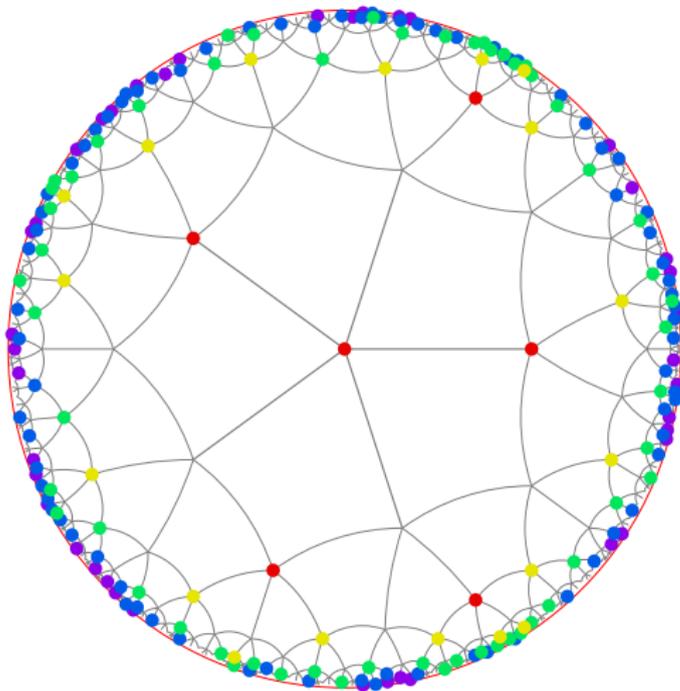
Problème du graphe planaire

Résoudre le problème du graphe planaire pour H consiste à trouver un ensemble de générateurs $\{h_1, \dots, h_n\}$ pour H tel que le graphe de Cayley engendré par ces générateurs soit planaire.

Tentons de résoudre les deux problèmes en même temps.

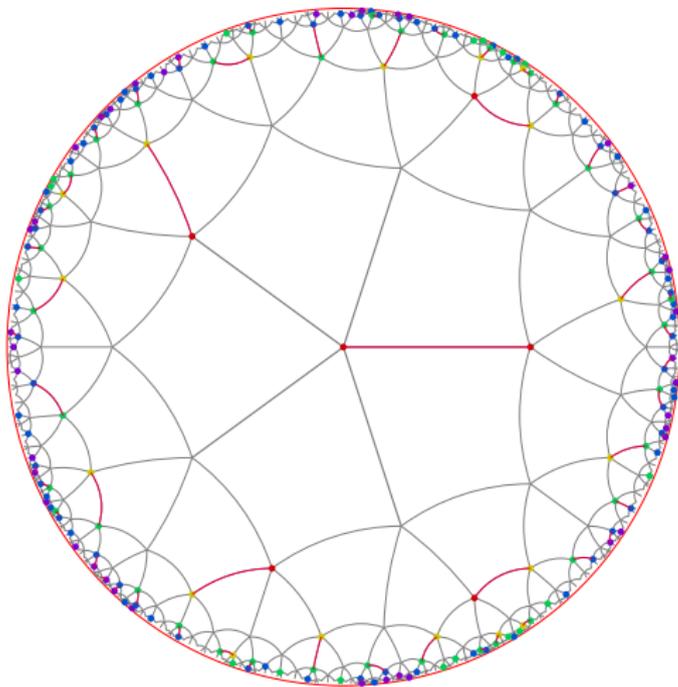
Exemple de résolution

Supposons partir du couple $H < G$ suivant :



Exemple de résolution

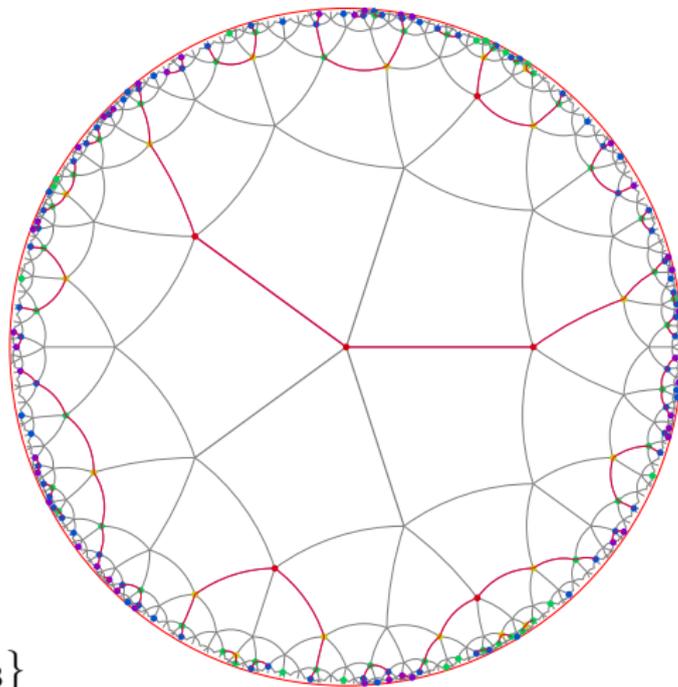
Ajoutons successivement des générateurs appartenant à H :



$$S = \{a_1\}$$

Exemple de résolution

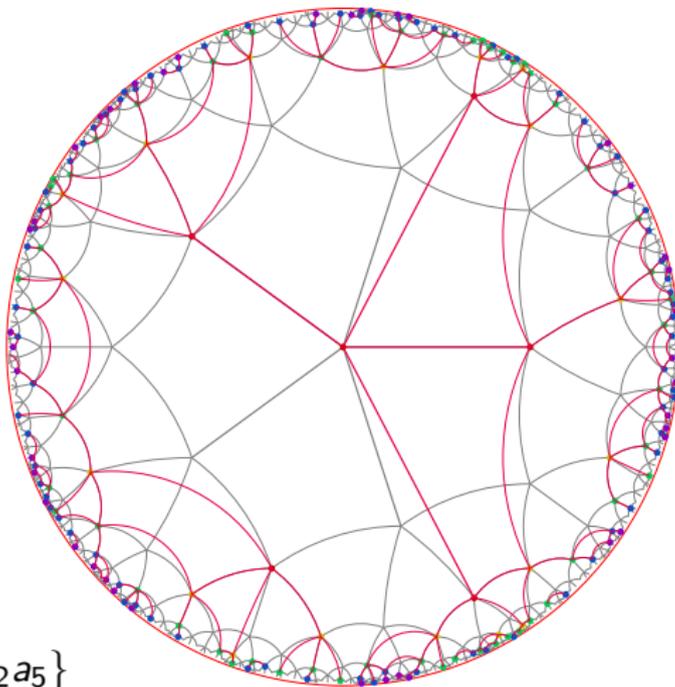
Ajoutons successivement des générateurs appartenant à H :



$$S = \{a_1, a_3\}$$

Exemple de résolution

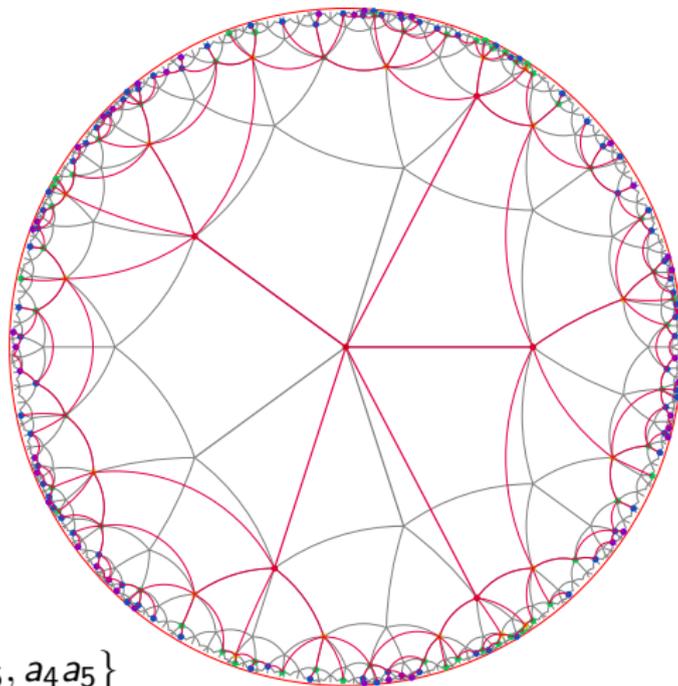
Ajoutons successivement des générateurs appartenant à H :



$$S = \{a_1, a_3, a_2 a_5\}$$

Exemple de résolution

Ajoutons successivement des générateurs appartenant à H :

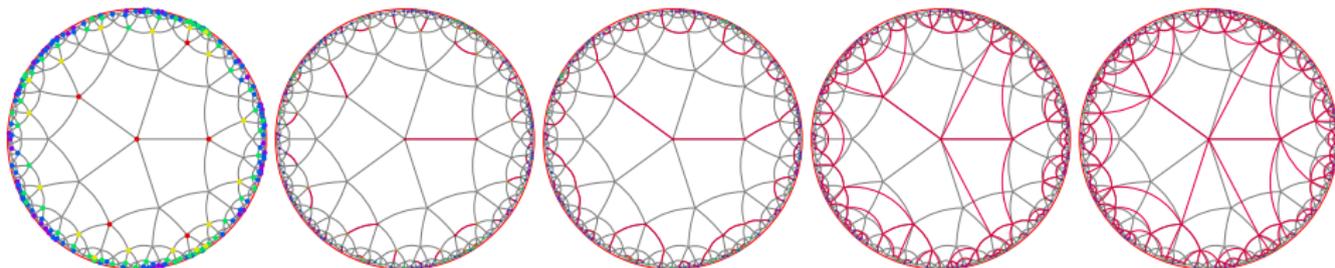


$$S = \{a_1, a_3, a_2 a_5, a_4 a_5\}$$

Méthode de résolution (1)

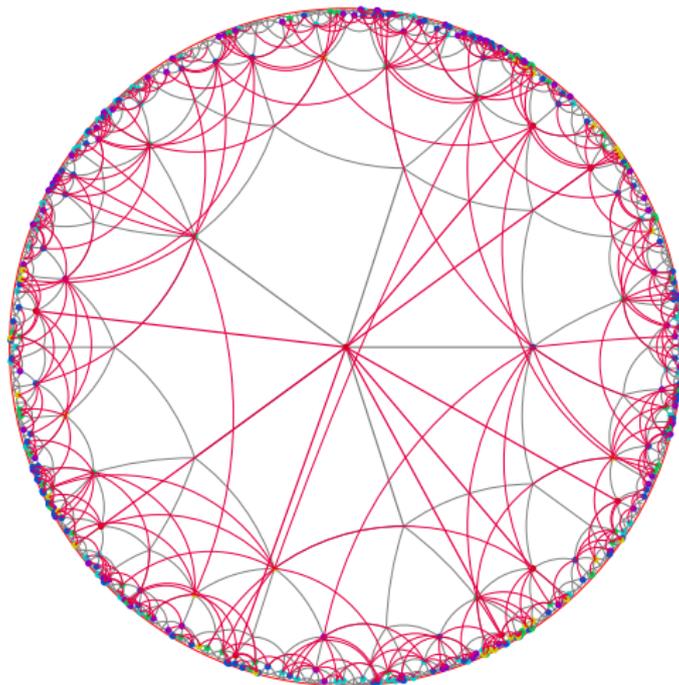
Lorsque l'on connaît le sous-groupe à l'avance, il est simple de construire une suite finie de graphes de Cayley planaires, dont le dernier élément est un graphe de Cayley du sous-groupe.

1. Partir du graphe Γ réduit au sommet identité.
2. Considérer le sommet de $H \setminus \Gamma$ le plus proche de Γ .
3. Ajouter ce sommet aux générateurs de Γ .
4. Recommencer à l'étape 2.



Méthode de résolution (2)

En pratique, on ne connaît que les générateurs du sous-groupe H :



Par contre, il est possible de construire les faces de ce graphe de Cayley.

Comment déterminer s'il n'est pas déjà planaire ?

Lemme du puzzle :

Un graphe de Cayley Γ d'un groupe fuchsien est planaire lorsque les conditions suivantes sont vérifiées :

- Γ est connexe
- les faces de Γ sont des polygones sans intersection

Preuve : à l'aide du théorème du polygone de Poincaré.

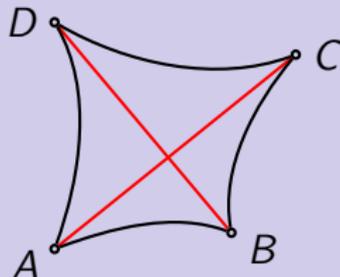
Méthode de résolution (2)

Pour construire un graphe de Cayley planaire pour H :

1. Partir d'un ensemble de générateurs de H donné.
2. Construire les faces du graphe de Cayley associé.
 - 2.1 Si elles sont polygonales \Rightarrow terminé
 - 2.2 Sinon, on peut produire deux arêtes du graphe qui se croisent.

Lemme du quadrilatère

Dans un rectangle hyperbolique, si les deux diagonales se croisent, cela signifie qu'au moins deux de ses côtés sont strictement plus courts que la plus longue diagonale.



Méthode de résolution (2)

Pour construire un graphe de Cayley planaire pour H :

1. Partir d'un ensemble de générateurs de H donné.
2. Construire les faces du graphe de Cayley associé.
 - 2.1 Si elles sont polygonales \Rightarrow terminé
 - 2.2 Sinon, on peut produire deux arêtes du graphe qui se croisent.
3. Remplacer les couples de générateurs qui se croisent par des générateurs plus courts.
4. Recommencer à l'étape 2.

La terminaison de cette procédure est une conséquence de la décroissance de la longueur des générateurs.

- 1 Généralités sur les groupes fuchsien
- 2 Le problème du mot généralisé
- 3 Le théorème de discrétude**
- 4 Algorithmes géométriques

Définition du problème

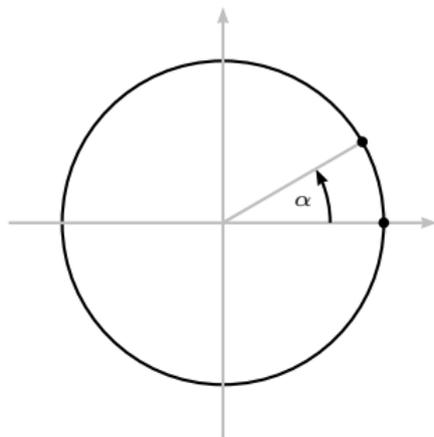
Problème de la discrétude

Étant donné un groupe d'isométries du plan hyperbolique Γ , le problème consiste à pouvoir décider si le groupe Γ est un groupe discret ou pas.

- En fait, il n'est nécessaire de traiter le problème que pour un groupe engendré par deux isométries [Jø76].
- Le problème a été montré décidable par Rosenberger [Ros86], mais fait suite à une longue série de travaux et de corrections : [Kna68, Pur72b, Pur72a, PR72, Ros72, Pur76, Mat82]

Discrétude : un exemple "simple"

Soit r_α la rotation du plan euclidien autour du point $(0, 0)$, d'angle α .



Problème : quelle est le groupe de rotations G_α engendré par r_α ?

Réponse : selon que $\alpha/(2\pi)$ est :

- rationnel $\rightarrow \alpha = \frac{2k\pi}{n}$, avec $k \wedge n = 1$, G_α est isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$
- irrationnel $\rightarrow G_\alpha$ est isomorphe à \mathbb{Z}

Théorème de caractérisation

Théorème de caractérisation des groupes d'isométries discrets [Ros86]

Un groupe d'isométries discret G engendré par les générateurs a et b peut prendre une seule des formes suivantes :

1. $G = \langle a, b \mid \rangle$ (groupe libre)
2. $G = \langle a, b \mid a^p = \epsilon \rangle$ (pour $p \geq 2$)
3. $G = \langle a, b \mid a^p = b^q = \epsilon \rangle$ (pour $q \geq p \geq 2$, et $p + q \geq 5$)
4. $G = \langle a, b \mid a^p = b^q = (ab)^r = \epsilon \rangle$ (pour $r \geq q \geq p \geq 2$, et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1$)
5. $G = \langle a, b \mid [a, b]^p = \epsilon \rangle$ (pour $p \geq 2$)
6. $G = \langle a, b, c \mid a^2 = b^2 = c^2 = (abc)^p = \epsilon \rangle$ (pour p impair et ≥ 3)

Théorème de discrétude

Accompagnant ce théorème :

Décidabilité de la discrétude [Ros86, Gil95]

Soient g et h deux isométries hyperboliques.

Il existe une procédure permettant de déterminer, en un nombre fini d'étapes, si le groupe engendré par g et h est un groupe discret d'isométries ou non.

Les outils de base utilisés pour cette preuve sont :

- les transformations de Nielsen
- le critère de Jørgensen
- le théorème de Poincaré

Transformations appariantes

Considérons l'espace hyperbolique H , et un polygone P tracé dans H .

Définition : Transformation appariante (*side-pairing transformation*)

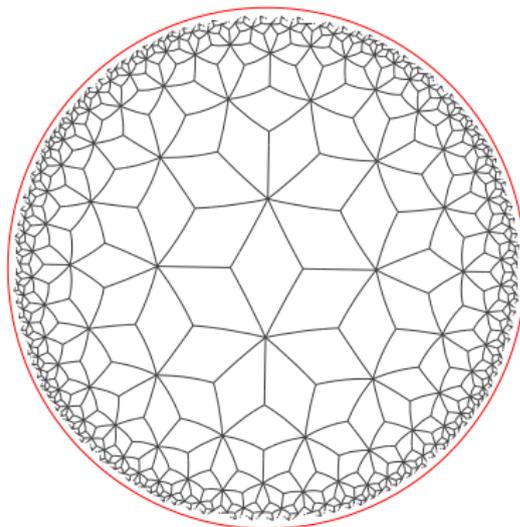
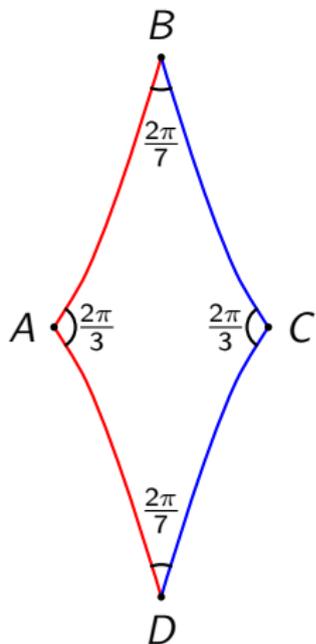
Une isométrie hyperbolique g_e est appelée *transformation appariante* pour l'arête e du polygone P si et seulement si elle envoie cette arête e sur une autre arête $e' = g_e(e)$ de P .

Un ensemble *complet* de transformations appariantes pour le polygone P est tel que toute arête de P est appariée à exactement une autre arête de P (qui peut être elle-même).

Le groupe d'isométries engendré par ces transformations est noté G :

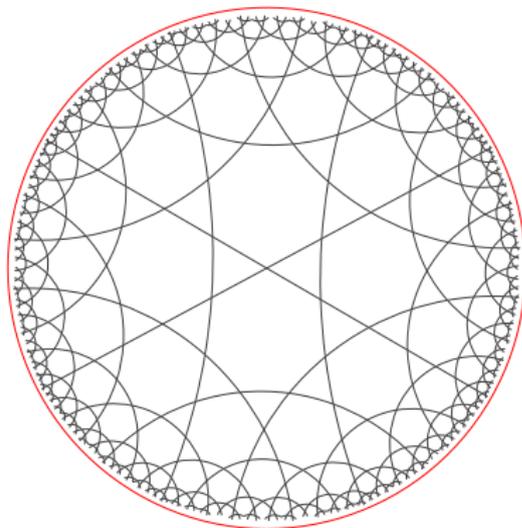
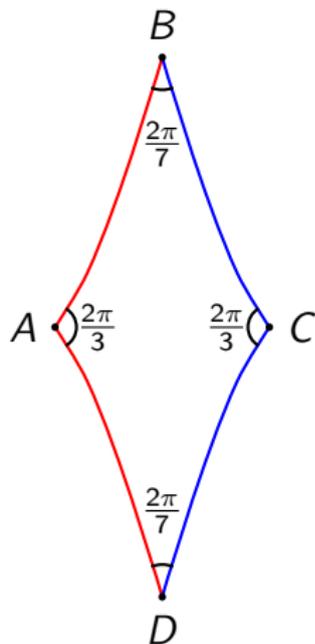
$$G = \langle \{g_e, e \text{ est une arête de } P\} \rangle$$

Un exemple non euclidien :



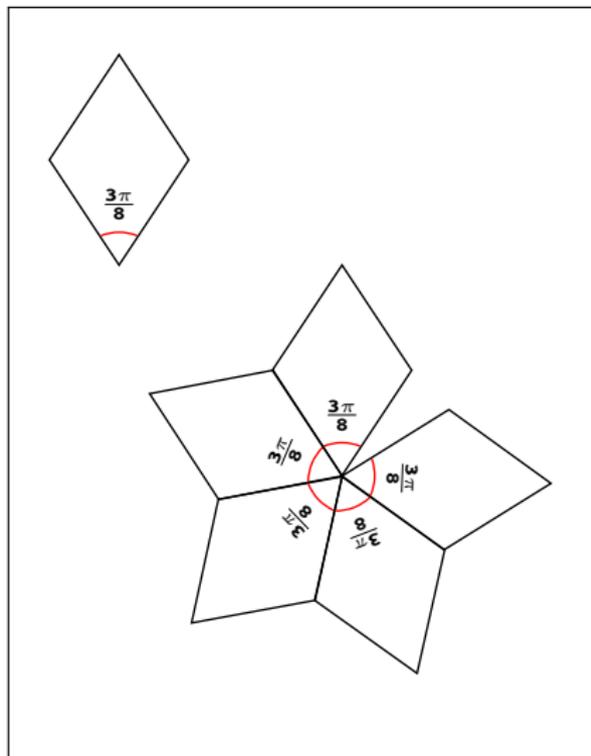
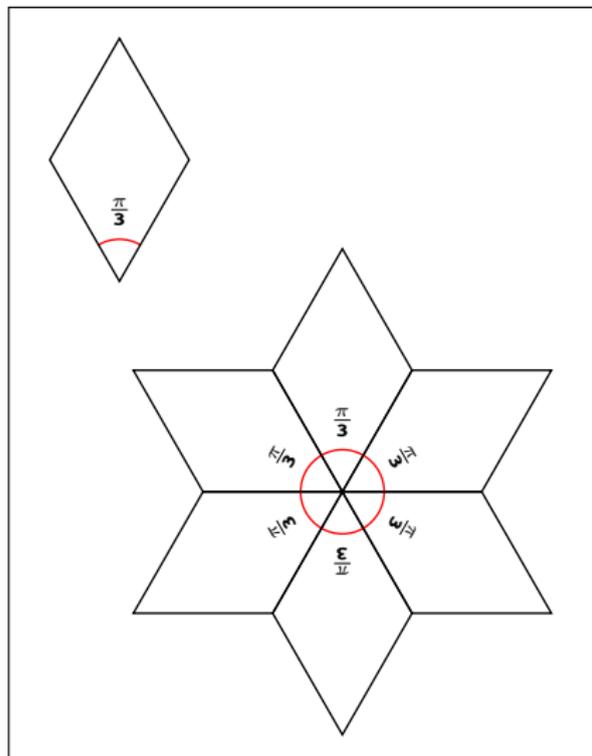
Le pavage engendré

Un exemple non euclidien :



Le graphe de Cayley du groupe G

Exemples de polygones



Polygone de Poincaré

Soit P un polygone du plan hyperbolique (d'intérieur ouvert et connexe), muni d'un ensemble complet de transformations appariantes.

Théorème du polygone de Poincaré

Le groupe G est un groupe *discret* d'isométries du plan, et l'action de G sur P induit un pavage du plan par la tuile P lorsque les conditions suivantes sont vérifiées :

- (i) Tout sommet de P a une classe d'équivalence finie dans P :

$$\langle x \rangle = \{(g_1, x_1), (g_2, x_2), \dots, (g_n, x_n)\}$$

... avec $g_i \in G$ la transformation envoyant x_i sur x .

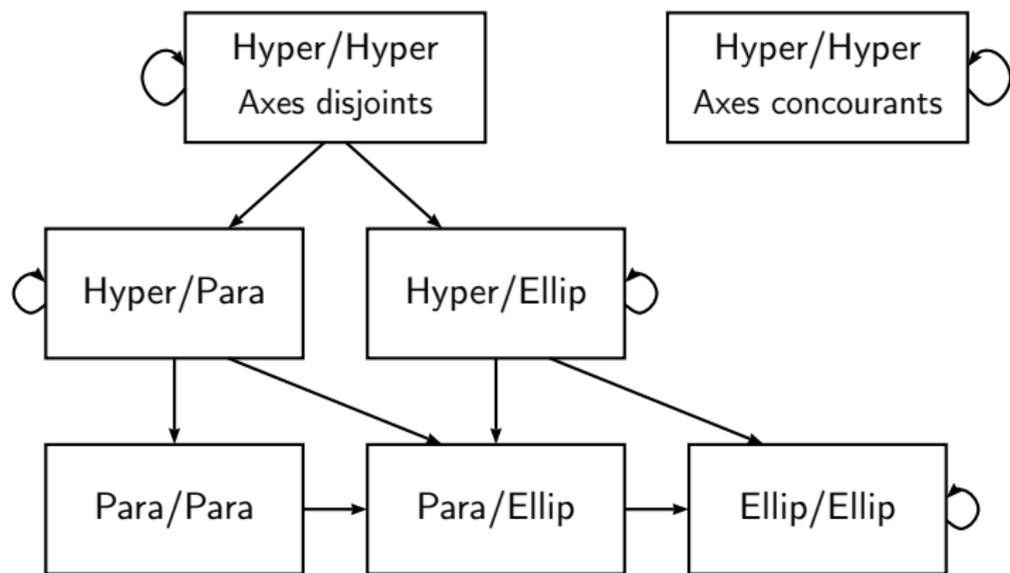
- (ii) Pour tout $\epsilon > 0$ suffisamment petit :

$$\bigcup_{i=1}^n g_i \left(B(x_i, \epsilon) \cap P \right) = B(x, \epsilon)$$

et cette union est une union de classes d'équivalences pour \sim

Principe de la preuve

Transformer le couple (g, h) de manière à le ramener à un cas simple :



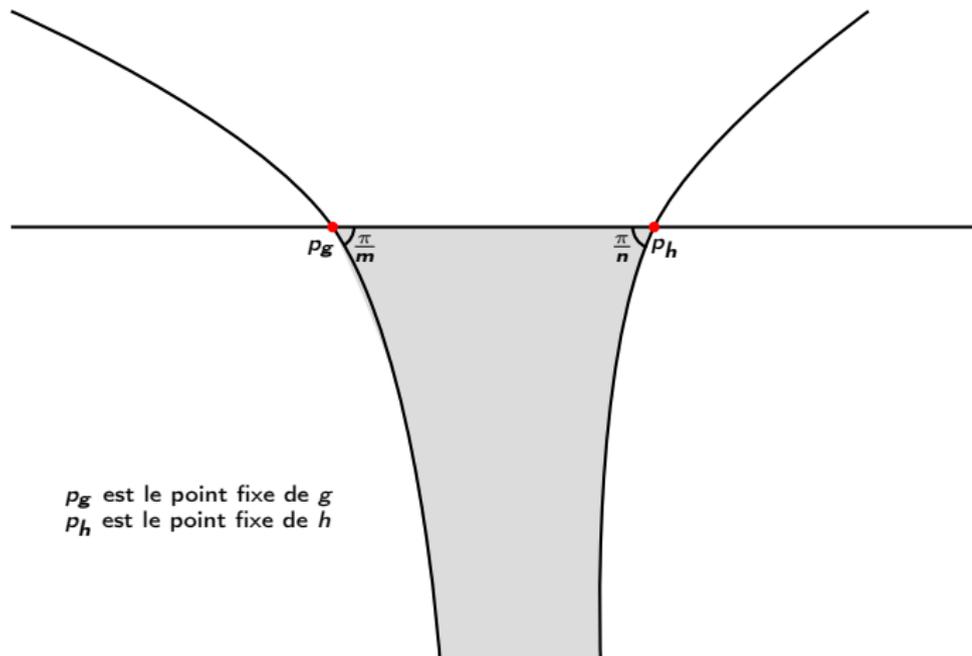
Le cas Elliptique/Elliptique

Soient g, h deux transformations elliptiques telles que :

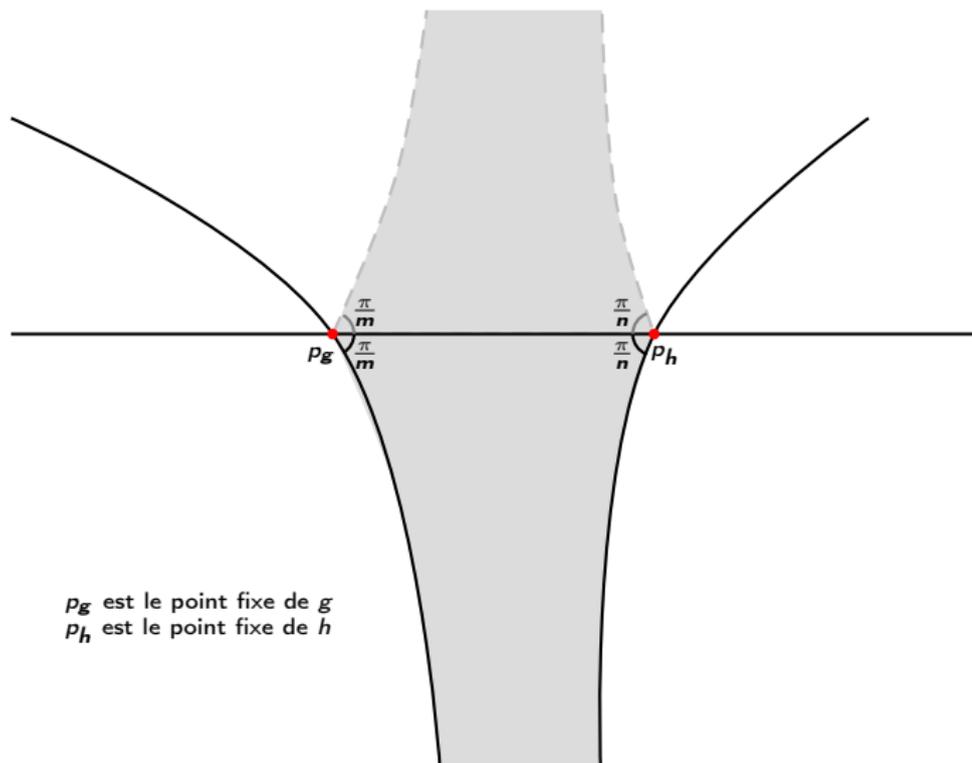
- g et h n'ont pas le même centre de rotation
- g et h sont d'ordre fini
- g et h sont des rotations d'angle $\frac{2\pi}{m}$ et $\frac{2\pi}{n}$

Idée générale : décomposer g et h en composée de symétries

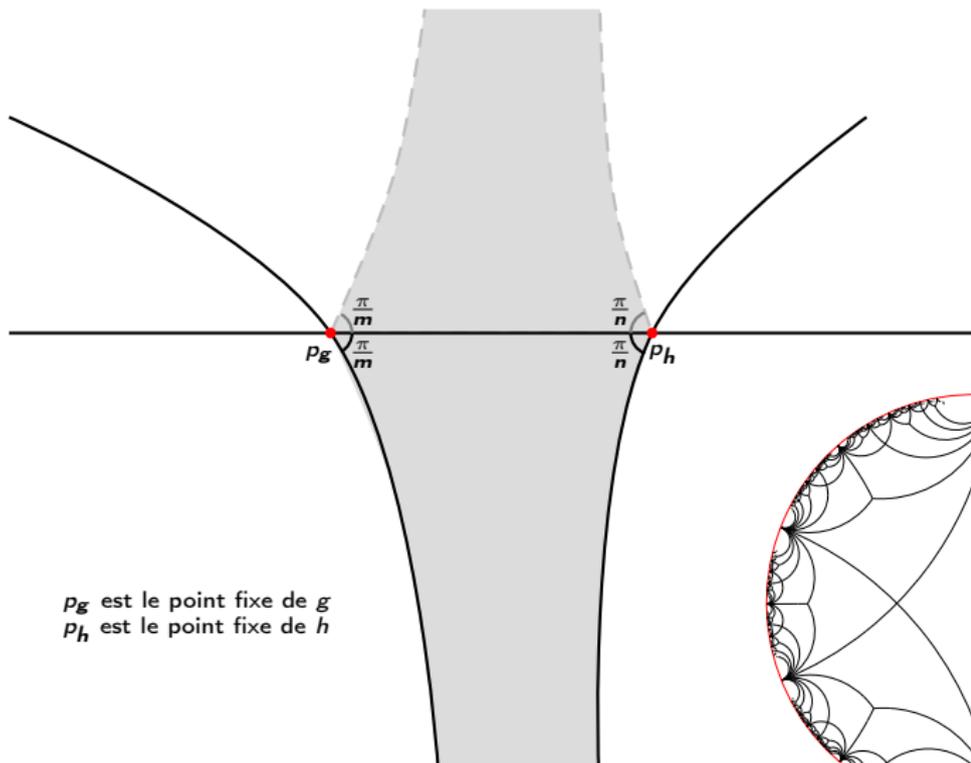
Cas où la composée gh n'est pas elliptique :



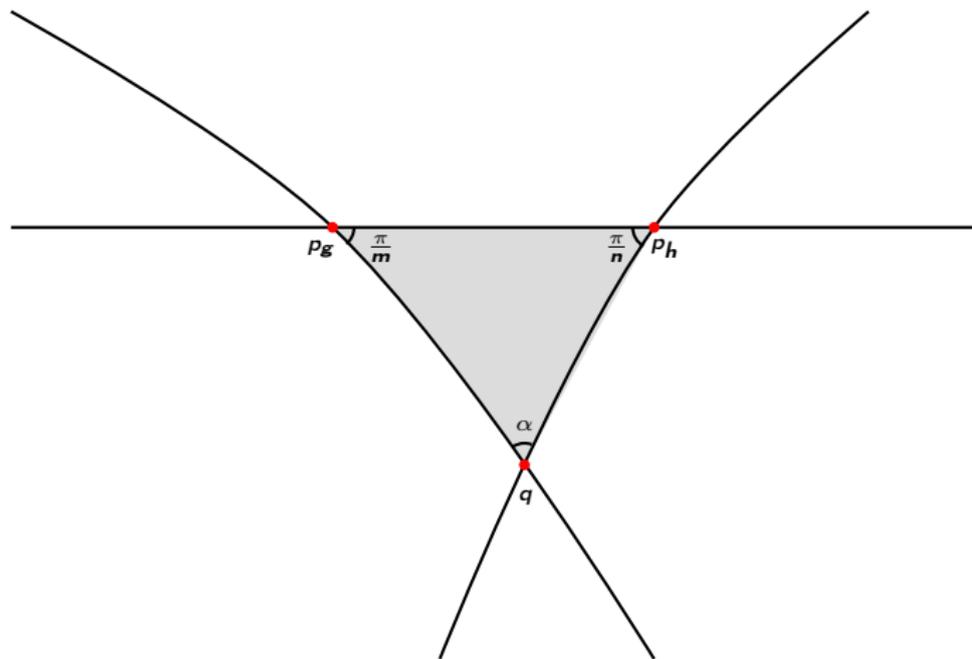
Cas où la composée gh n'est pas elliptique :



Cas où la composée gh n'est pas elliptique :

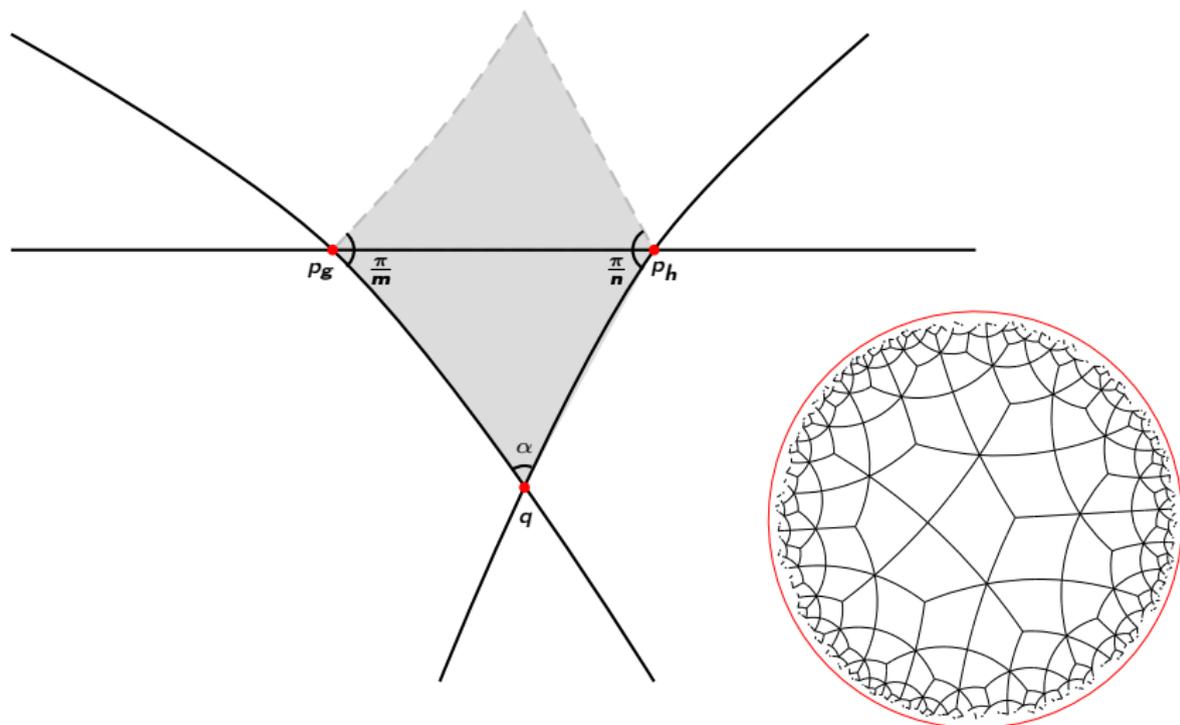


Cas où la composée gh est elliptique et d'ordre fini :



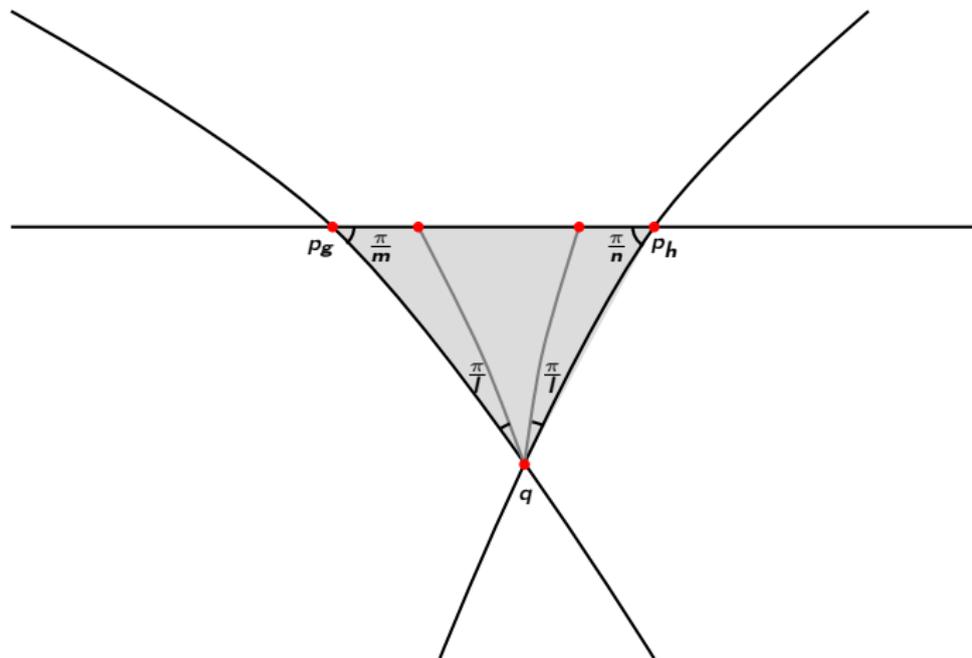
Cas où la composée gh est elliptique et d'ordre fini :

- 1ère possibilité : gh est une rotation d'angle $\alpha = \frac{2\pi}{l}$



Cas où la composée gh est elliptique et d'ordre fini :

- 2nde possibilité : gh est une rotation d'angle $\alpha = \frac{2k\pi}{l}$ pour $|k| > 1$



Terminaison de l'algorithme

Lemme :

Soit T un triangle hyperbolique, et G le groupe d'isométries engendré par les symétries selon les côtés de T . Alors, une condition nécessaire pour que G soit discret est que T possède une aire supérieure ou égale à $\pi/42$.

Remarques :

- L'aire d'un tel triangle vaut $\mathcal{A}(m, n, l) = \pi - \frac{\pi}{m} - \frac{\pi}{n} - \frac{\pi}{l}$.
- Cela fournit une mesure de complexité de l'algorithme.

Deux problèmes apparemment différents, mais dans le cadre des groupes fuchsien, ils amènent au mêmes types d'algorithmes :

- pour résoudre efficacement le GWP, il faut construire un graphe de Cayley planaire pour le groupe.
- pour prouver la discrétude d'un groupe donné, il faut construire une paire de générateurs *géométriques* correspondant au théorème de Poincaré.

Question : ces procédures sont-elles réellement des algorithmes ?

- 1 Généralités sur les groupes fuchsien
- 2 Le problème du mot généralisé
- 3 Le théorème de discrétude
- 4 Algorithmes géométriques**

- Résultats de décidabilité dans le monde du continu :

(Conséquence du) Théorème de Tarski [Tar48, Jac74]

La logique du premier ordre sur $(\mathbb{R}, +, \times, =, <)$ est décidable.

- Les sous-ensembles de \mathbb{R} spécifiés par une formule de cette logique sont des ensembles *semi-algébriques*.

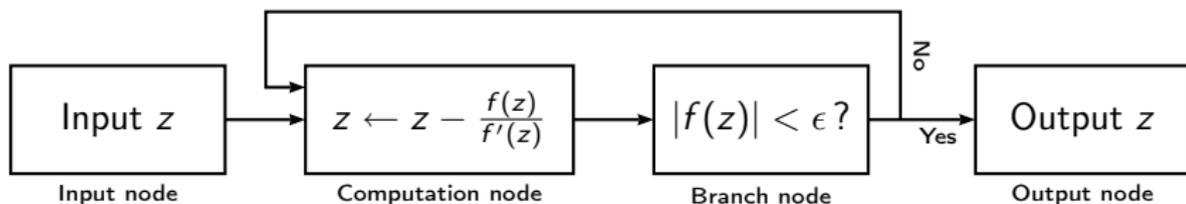
Définition : Ensemble semi-algébrique

Un ensemble $E \subset \mathbb{R}^n$ est dit *semi-algébrique* si et seulement si c'est une combinaison booléenne finie d'ensemble de la forme $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ ou $g(x_1, \dots, x_n) > 0$, pour f et g des polynômes de $\mathbb{Q}[X_1, \dots, X_n]$.

- Comment tirer parti de ce résultat pour spécifier un modèle de calcul permettant de manipuler des nombres réels ?

Considérons le problème de la calculabilité dans le cas continu : plusieurs théories différentes existent, basées sur des formalismes non équivalents :

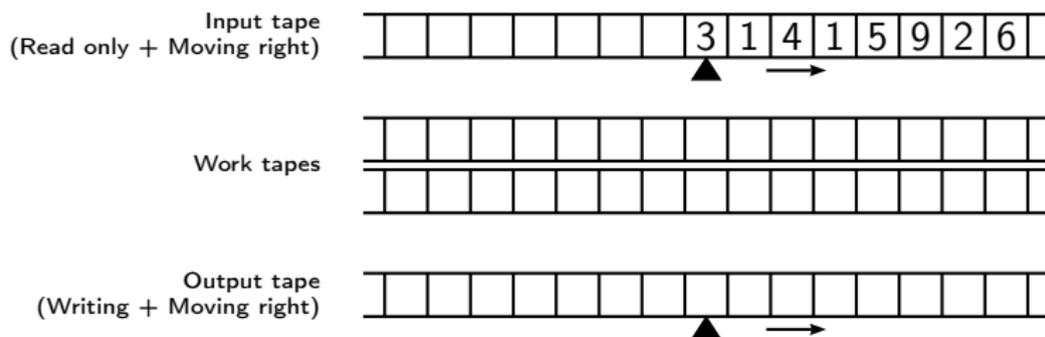
- La théorie des *machines BSS*, de Blum, Shub et Smale [BSS89]
 - généralisation des *straight-line programs* et des *computation trees*
 - basée sur l'idée de n'appliquer que des transformations rationnelles à des nombres réels



- ne permet de spécifier que des unions dénombrables d'ensembles semi-algébriques (par exemple, pas l'ensemble de Mandelbrot)

Considérons le problème de la calculabilité dans le cas continu : plusieurs théories différentes existent, basées sur des formalismes non équivalents :

- La théorie de la *computable analysis* [PER89, Wei00]
 - basée sur l'idée d'utiliser des machines de Turing capables de produire des nombres réels par approximation



- ne permet de représenter que des fonctions réelles continues
- l'égalité entre nombres réels ne peut être représentée dans ce modèle
- permet de représenter des ensembles $A \subset \mathbb{R}$ par la fonction de distance à A , qui est une fonction continue

Exemples de problème de décision

Soit $g = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ une transformation hyperbolique.

Quelques problèmes de décision simples :

- Déterminer le type de g (elliptique, parabolique ou hyperbolique) ;
- Déterminer les points fixes de g ;
- Déterminer si l'angle de rotation d'une transformation elliptique est *positif* (angle $\theta \in]0; \pi[$) ou *négatif* (angle $\theta \in]\pi; 2\pi[$) .

Et moins simple :

- Déterminer l'ordre de g si g est elliptique.

Calcul de l'ordre d'un élément

Lemme : Ordre d'un élément algébrique

Soit $g = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in PSL_2(\mathbb{R})$ une transformation elliptique ($|a + d| < 2$).

Si les éléments de g appartiennent à une extension F de \mathbb{Q} de degré d , alors il existe un algorithme permettant de calculer l'ordre de g .

Preuve :

- Si g est une transformation elliptique, alors :

$$g \approx \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \text{Tr}(g) = 2 \cos(\theta)$$

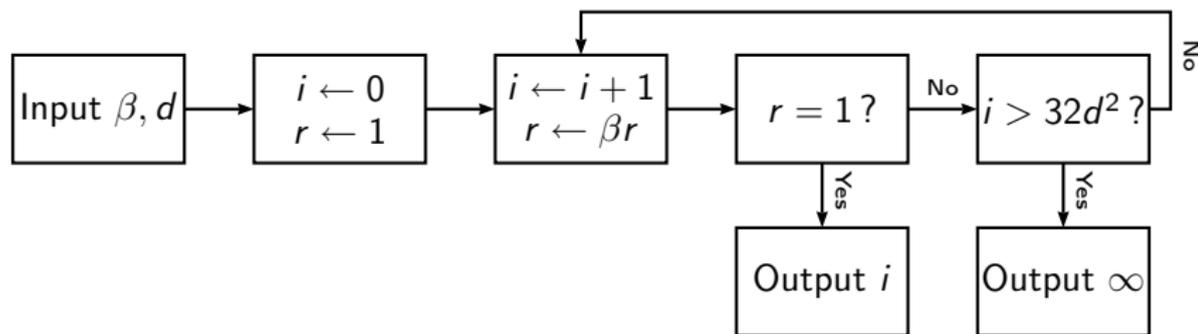
- Notons $\beta = \text{Tr}(g)/2 = (a + d)/2$, et $\rho = \beta + i\sqrt{1 - \beta^2}$.
Le tout est maintenant de savoir si ρ est une racine de l'unité ou pas.

$$\exists n \in \mathbb{N}, \rho^n = 1$$

Majoration de la valeur de n :

- Supposons connaître $n \in \mathbb{N}$ minimal tel que $\rho^n = 1$.
Alors le polynôme primitif de ρ est de degré $\phi(n)$.
- Ici, $\rho \in F(i, \sqrt{1 - \beta^2})$ (extension de corps de degré ≤ 4).
Donc $\phi(n) \leq 4d$. Or $n \leq 2(\phi(n))^2$. Donc $n \leq 32d^2$.

Machine BSS pour calculer l'ordre de β :



Mesure de la complexité du problème de la discrétude

Borne de complexité [Gil97]

Soit g et h deux transformations hyperboliques.

Notons $T = \max\{Tr(g), Tr(h), Tr(gh), Tr(gh^{-1})\}$.

Alors, le nombre de paires d'isométries calculées par la procédure précédente est bornée par :

- $10T + 10$ si $(g, h) \in PSL_2(\mathbb{Q})$
- $170T^2 + 32D^2 + 14$ si $(g, h) \in PSL_2(\mathbb{Q}(\gamma))$
où D est le degré du polynôme minimal de γ .

Mesure de la complexité du problème de la discrétude

Borne de complexité [Gil97]

Soit g et h deux transformations hyperboliques. Notons :

- D le degré du polynôme minimal de γ tel que $(g, h) \in PSL_2(\mathbb{Q}(\gamma))$;
- $T = \max\{Tr(g), Tr(h), Tr(gh), Tr(gh^{-1})\}$.
- $P(T, D) = 170T^2 + 32D^2 + 14$
- $L(T, D) = 2^{\delta_{dh}9T+1} T(34D^2 + 1)^9 + \delta_{ih}2^{(13T)^2}$
- $L(S_0)$ la semi-norme initiale

Alors, la complexité de la machine de Turing est au pire :

$$\underbrace{\mathcal{O}(D^8 L(S_0)^2)}_{\text{Complexité au départ}} \cdot \underbrace{[D(2(D-1)L(T, D) + 1)L(T, D)]^2}_{\text{Facteur d'augmentation}} \cdot \underbrace{P(T, D)}_{\# \text{ Paires générateurs}}$$

Conclusion

- Le problème du graphe planaire est au centre des deux problèmes que sont le GWP et le problème de la discrétude.
- Les techniques de résolution utilisées consistent la plupart du temps à se placer dans des conditions optimales d'utilisation du théorème de Poincaré.
- Les procédures utilisées dans les deux cas sont des algorithmes au sens des machines BSS.
 - La complexité pour le problème de la discrétude est polynomiale.
 - Peut-on utiliser ces techniques pour calculer une complexité polynomiale du GWP ?
- Le problème du GWP est intrinsèquement discret. Est-il vraiment nécessaire de faire appel aux machines BSS pour le résoudre ?



L. Blum, M. Shub, and S. Smale.

On a theory of computation and complexity over the real numbers : NP-completeness, recursive functions and universal machines.

Bulletin of the American Mathematical Society, 21(1) :1–46, 1989.



J. Gilman.

Two-generator discrete subgroups of $PSL(2, R)$.

Number 561 in *Memoirs of the American Mathematical Society*. American Mathematical Society, 1995.



J. Gilman.

Algorithms, complexity and discreteness criteria in $psl(2, c)$.

Journal d'analyse mathématique, 73(1) :91–114, December 1997.



N. Jacobson.

Basic Algebra I.

W.H. Freeman and Co., 1974.



T. Jørgensen.

On discrete groups of mobius transformations.

American Journal of Math., 98 :739–749, 1976.



A. W. Knap.

Doubly generated fuchsian groups.

Michigan Math. Journal, 15 :289–304, 1968.



J. P. Matelski.

The classification of discrete 2-generator subgroups of $psl(2, r)$.

Israel Journal of Mathematics, 42 :309–317, 1982.



Marian B. Pour-El and J. Ian Richards.

computability in analysis and physics, volume 1 of *Perspectives in Mathematical Logic*.

Springer-Verlag, 1989.

"<http://projecteuclid.org/euclid.pl/1235422916>" (Last access : 28 janvier 2010).



N. Purzitsky and G. Rosenberger.

Two generator fuchsian groups of genus one.

Mathematische Zeitschrift, 128 :245–251, 1972.

Correction : *Mathematische Zeitschrift* 132, 261–262 (1973).



N. Purzitsky.

Real two-dimensional representations of two-generator free groups.

Mathematische Zeitschrift, 127 :95–104, 1972.



N. Purzitsky.

Two generator discrete free groups.

Mathematische Zeitschrift, 127 :209–223, 1972.



N. Purzitsky.

All two-generator fuchsian groups.

Mathematische Zeitschrift, 147 :87–92, 1976.



D. Renault.

Enumerating planar locally finite Cayley graphs.

Geometriae Dedicata, 112 :25–49, 2005.



G. Rosenberger.

Fuchssche gruppen, die freies produkt zweier zyklischer gruppen sind, une die gleichung $x^2 + y^2 + z^2 = xyz$.

Mathematische Annalen, 199 :213–228, 1972.



G. Rosenberger.

All generating pairs of all two-generators fuchsian groups.

Arch Math, 46 :198–204, 1986.



P. Scott.

Subgroups of surface groups are almost geometric.

Journal of the London Mathematical Society, 17 :555–565, 1978.



P. Scott.

Correction to 'Subgroups of surface groups are almost geometric'.
Journal of the London Mathematical Society, 32 :217–220, 1985.



A. Tarski.

A decision method for elementary algebra and geometry.
RAND Corporation, 1948.



K. Weihrauch.

Computable Analysis.
Springer-Verlag, 2000.