

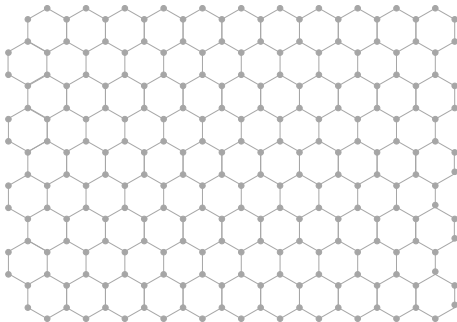
FONCTIONS DE PARTITION DU MODÈLE D'ISING ET DES ARBRES COUVRANTS CRITIQUES

Béatrice de Tilière
Université Pierre et Marie Curie, Paris

Journées de combinatoire de Bordeaux 2014

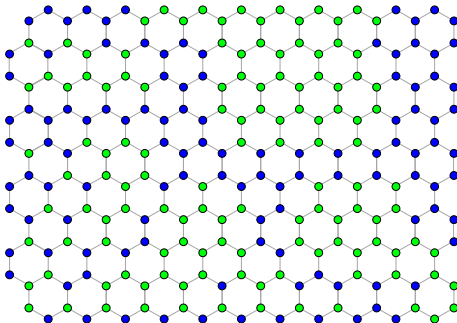
MODÈLE D'ISING

- ▶ Graphe $G = (V, E)$, fini.



MODÈLE D'ISING

- ▶ Graphe $G = (V, E)$, fini.



+1/●

-1/●

- ▶ Une **configuration de spins** σ associe à chaque sommet x du graphe G un spin $\sigma_x \in \{-1, 1\}$.

$\Rightarrow \{-1, 1\}^V =$ ensemble des configurations de spins.

MODÈLE D'ISING

- ▶ Poids positifs sur les arêtes : **constantes de couplage** $J = (J_e)_{e \in E}$.
 \Rightarrow *intensité des interactions, température extérieure*
- ▶ **Énergie** d'une configuration de spins : $\mathcal{E}_J(\sigma) = - \sum_{e=xy \in E} J_{xy} \sigma_x \sigma_y$.
- ▶ **Probabilité de Boltzmann d'Ising** :

$$\forall \sigma \in \{-1, 1\}^V, \quad \mathbb{P}_{\text{Ising}}(\sigma) = \frac{e^{-\mathcal{E}_J(\sigma)}}{Z_{\text{Ising}}(\mathbf{G}, J)},$$

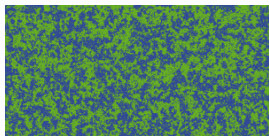
où $Z_{\text{Ising}}(\mathbf{G}, J) = \sum_{\sigma \in \{-1, 1\}^V} e^{-\mathcal{E}_J(\sigma)}$ est la **fonction de partition**.

- ▶ Deux spins voisins σ_x, σ_y ont tendance à s'aligner.
- ▶ Plus le couplage J_{xy} est élevé, plus cette tendance est forte.

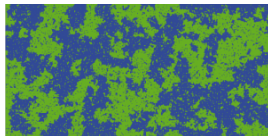
COMPORTEMENT MACROSCOPIQUE

*Faire tendre la longueur des arêtes vers zéro
Regarder une configuration "typique".*

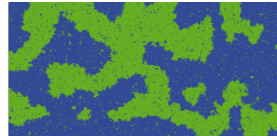
- ▶ Modèle d'Ising en dimension 2 : le graphe G est planaire.



J petit
spins mélangés



J critique
transition de phase



J grand
majorité de spins + ou -

(Illustrations de R. Cerf)

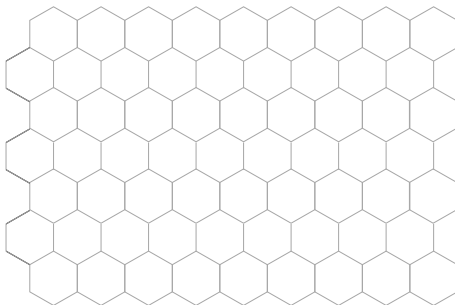
- ▶ Si le graphe G est \mathbb{Z}^2 , Kramers et Wannier déterminent les constantes de couplage **critiques** :

$$\forall e \in E, \quad J_e = \frac{1}{2} \log(1 + \sqrt{2}).$$

- ▶ Baxter généralise le modèle d'Ising critique sur \mathbb{Z}^2 à une grande famille de graphes : les graphes isoradiaux.

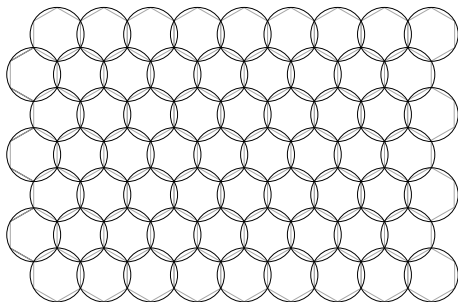
GRAPHES ISORADIAUX

- ▶ Un graphe G est **isoradial** s'il est planaire et s'il peut être plongé dans le plan de sorte que toutes ses faces soient inscrites dans un cercle de rayon 1 et que les centres des cercles soient à l'intérieur des faces (Duffin-Mercat-Kenyon).



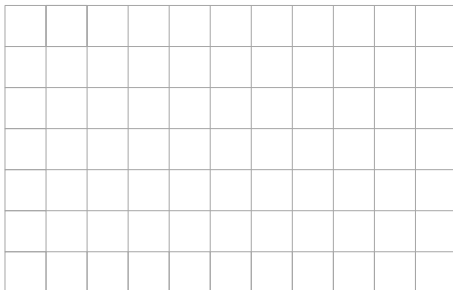
GRAPHES ISORADIAUX

- ▶ Un graphe G est **isoradial** s'il est planaire et s'il peut être plongé dans le plan de sorte que toutes ses faces soient inscrites dans un cercle de rayon 1 et que les centres des cercles soient à l'intérieur des faces (Duffin-Mercat-Kenyon).



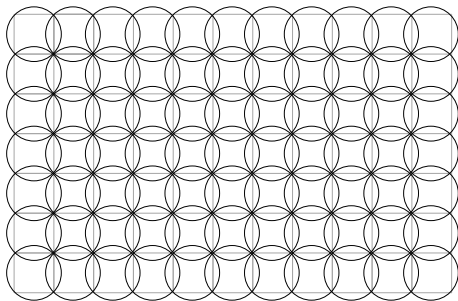
GRAPHES ISORADIAUX

- ▶ Un graphe G est **isoradial** s'il est planaire et s'il peut être plongé dans le plan de sorte que toutes ses faces soient inscrites dans un cercle de rayon 1 et que les centres des cercles soient à l'intérieur des faces (Duffin-Mercat-Kenyon).



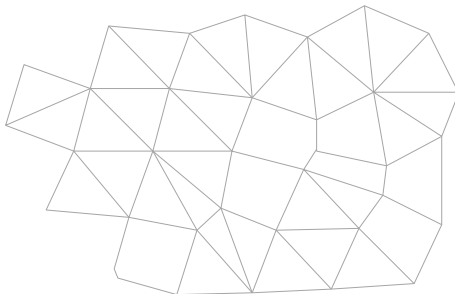
GRAPHES ISORADIAUX

- ▶ Un graphe G est **isoradial** s'il est planaire et s'il peut être plongé dans le plan de sorte que toutes ses faces soient inscrites dans un cercle de rayon 1 et que les centres des cercles soient à l'intérieur des faces (Duffin-Mercat-Kenyon).



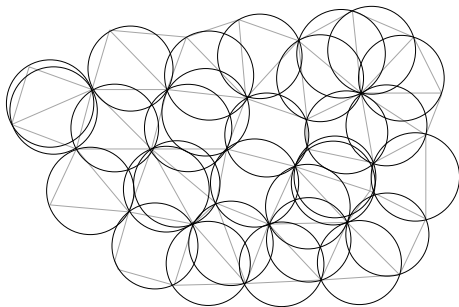
GRAPHES ISORADIAUX

- ▶ Un graphe G est **isoradial** s'il est planaire et s'il peut être plongé dans le plan de sorte que toutes ses faces soient inscrites dans un cercle de rayon 1 et que les centres des cercles soient à l'intérieur des faces (Duffin-Mercat-Kenyon).



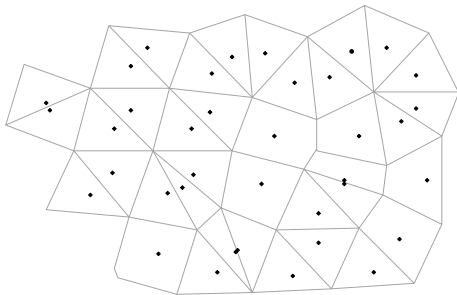
GRAPHES ISORADIAUX

- ▶ Un graphe G est **isoradial** s'il est planaire et s'il peut être plongé dans le plan de sorte que toutes ses faces soient inscrites dans un cercle de rayon 1 et que les centres des cercles soient à l'intérieur des faces (Duffin-Mercat-Kenyon).



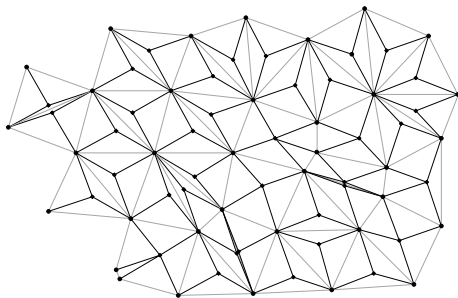
GRAPHE DE LOSANGES ASSOCIÉ, ANGLES

- ▶ On prend les centres des cercles circonscrits.



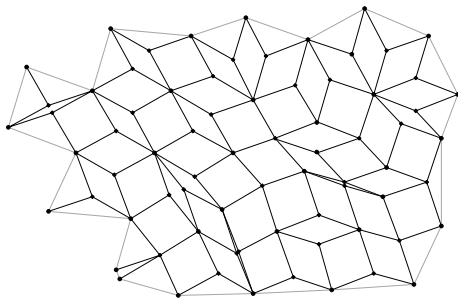
GRAPHE DE LOSANGES ASSOCIÉ, ANGLES

- ▶ On relie les centres des cercles aux sommets du graphe G .
⇒ Graphe de losanges associé G^\diamond .



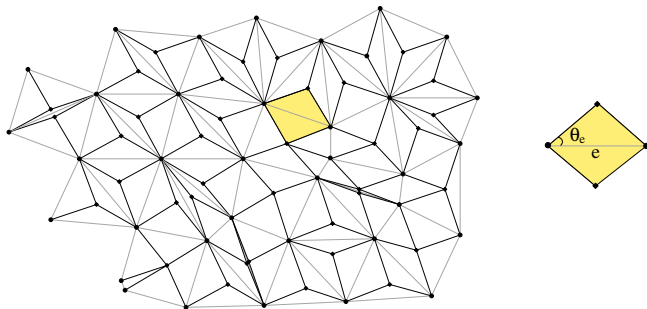
GRAPHE DE LOSANGES ASSOCIÉ, ANGLES

- ▶ On relie les centres des cercles aux sommets du graphe G .
⇒ Graphe de losanges associé G^\diamond .



GRAPHE DE LOSANGES ASSOCIÉ, ANGLES

- ▶ On associe à chaque arête e , le demi-angle θ_e du losange correspondant.



MODÈLE D'ISING \mathbb{Z} -INVARIANT CRITIQUE

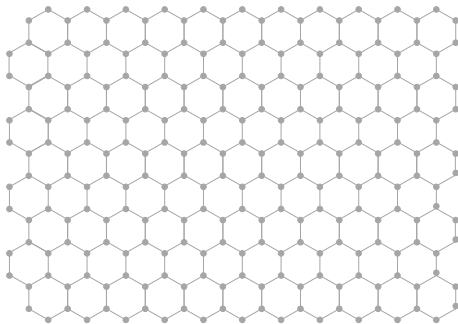
- ▶ Le modèle d'Ising est \mathbb{Z} -invariant critique [Ba] si les constantes de couplage sont égales à :

$$\forall e \in E, \quad J_e = \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + \sin \theta_e}{\cos \theta_e} \right).$$

- ▶ Baxter les déterminent en utilisant :
 - ▶ la \mathbb{Z} -invariance (invariance par transformation $\Delta - Y$),
 - ▶ une forme généralisée d'auto-dualité,
 - ▶ l'hypothèse d'unicité du point critique.
- ▶ Li et Duminil-Copin - Cimasoni, montrent que le modèle est bien critique.
- ▶ Si $G = \mathbb{Z}^2$, $\forall e \in E$, $\theta_e = \frac{\pi}{4}$, d'où $J_e = \frac{1}{2} \log(1 + \sqrt{2})$.

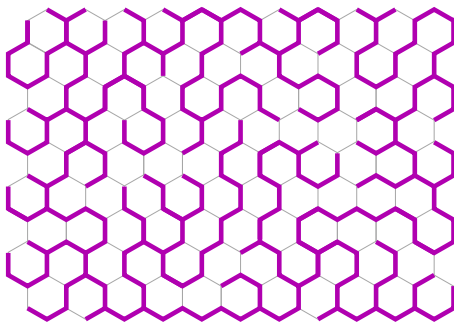
ARBRES COUVRANTS

- ▶ Graphe $G = (V, E)$, fini.



ARBRES COUVRANTS

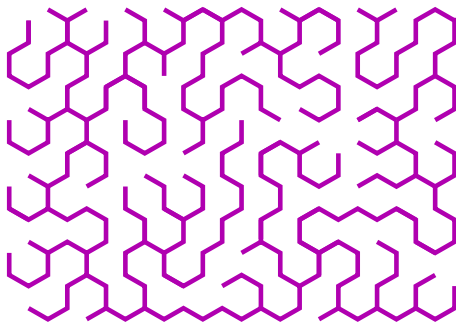
- ▶ Graphe $G = (V, E)$, fini.



- ▶ Un **arbre couvrant** : sous-ensemble d'arêtes touchant tous les sommets du graphe, connexe et ne contenant pas de cycle.
 $\Rightarrow \mathcal{T}(G) =$ ensemble des arbres couvrants.

ARBRES COUVRANTS

- ▶ Graphe $G = (V, E)$, fini.



- ▶ Un **arbre couvrant** : sous-ensemble d'arêtes touchant tous les sommets du graphe, connexe et ne contenant pas de cycle.
 $\Rightarrow \mathcal{T}(G) =$ ensemble des arbres couvrants.

ARBRES COUVRANTS

- ▶ Fonction de poids positive : $\rho = (\rho_e)_{e \in E}$.
- ▶ Probabilité de Boltzmann des arbres :

$$\forall T \in \mathcal{T}(\mathbf{G}), \quad \mathbb{P}_{\text{arbre}}(T) = \frac{\prod_{e \in T} \rho_e}{Z_{\text{arbre}}(\mathbf{G}, \rho)},$$

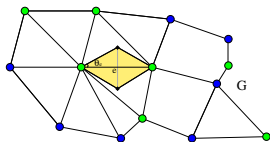
où $Z_{\text{arbre}}(\mathbf{G}, \rho) = \sum_{T \in \mathcal{T}(\mathbf{G})} \prod_{e \in T} \rho_e$ est la fonction de partition.

- ▶ Les arbres couvrants sont Z -invariants critiques [Ke] si \mathbf{G} est isoradial et les poids sont égaux à :

$$\forall e \in E, \quad \rho_e = \tan \theta_e.$$

RÉSULTAT

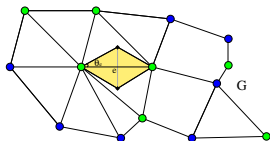
Ising critique sur G



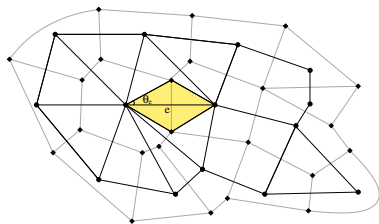
$$\forall e \in E, \quad J_e = \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + \sin \theta_e}{\cos \theta_e} \right)$$

RÉSULTAT

Ising critique sur G



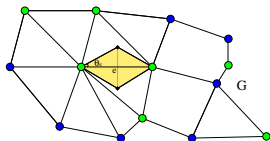
Arbres couvrants critiques sur \bar{G}



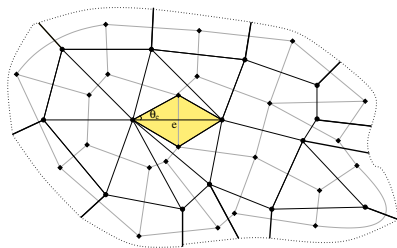
$$\forall e \in E, \quad J_e = \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + \sin \theta_e}{\cos \theta_e} \right)$$

RÉSULTAT

Ising critique sur G



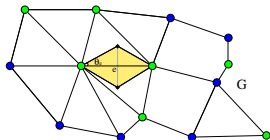
Arbres couvrants critiques sur \bar{G}



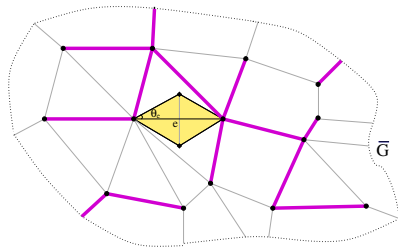
$$\forall e \in E, \quad J_e = \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + \sin \theta_e}{\cos \theta_e} \right)$$

RÉSULTAT

Ising critique sur G



Arbres couvrants critiques sur \bar{G}

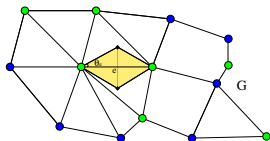


$$\forall e \in E, \quad J_e = \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + \sin \theta_e}{\cos \theta_e} \right)$$

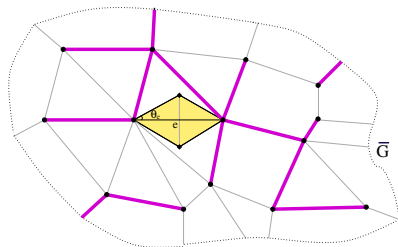
$$\begin{cases} \forall e \in E, \quad \rho_e = \tan \theta_e \\ \text{Conditions au bord } \bar{E} \setminus E. \end{cases}$$

RÉSULTAT

Ising critique sur G



Arbres couvrants critiques sur \bar{G}



$$\forall e \in E, \quad J_e = \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + \sin \theta_e}{\cos \theta_e} \right)$$

$$\begin{cases} \forall e \in E, \quad \rho_e = \tan \theta_e \\ \text{Conditions au bord } \bar{E} \setminus E. \end{cases}$$

THÉORÈME

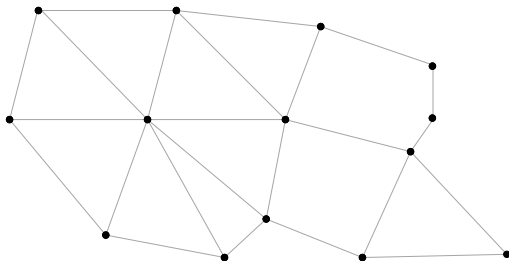
$$Z_{\text{Ising}}(G, J)^2 = 2^{|V|} |Z_{\text{arbre}}(\bar{G}, \rho)|.$$

REMARQUES

- ▶ L'analogie de ce résultat existe lorsque le graphe G est plongé sur le tore. Le polynôme caractéristique remplace alors la fonction de partition :
 - ▶ Preuve utilisant la correspondance de Fisher entre le modèle d'Ising et les dimères sur un graphe non-biparti [B-dT], [dT].
 - ▶ Preuve utilisant la matrice de Kac-Ward [Ci].
- ▶ Sur le tore, pas de difficulté liée au bord du graphe.
- ▶ Construction explicite différente.

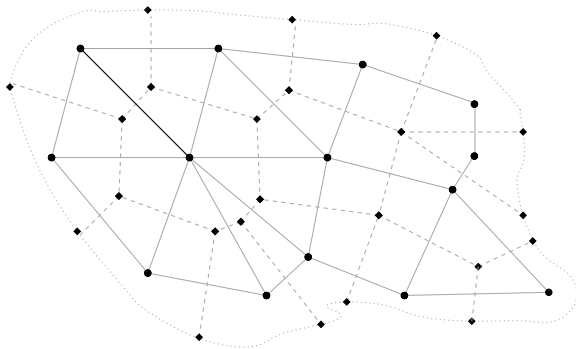
PREUVE I. VERS UN MODÈLE DE DIMÈRES BIPARTI

- ▶ Construction du graphe biparti G^Q



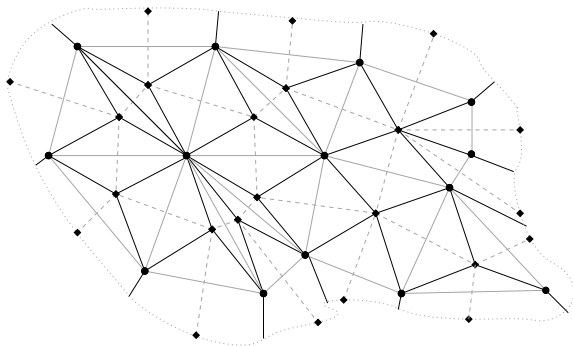
PREUVE I. VERS UN MODÈLE DE DIMÈRES BIPARTI

- ▶ Construction du graphe biparti G^Q



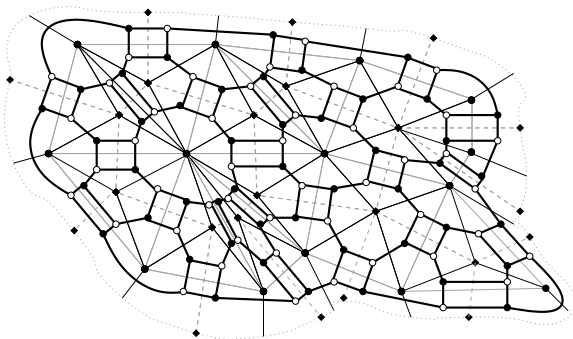
PREUVE I. VERS UN MODÈLE DE DIMÈRES BIPARTI

- Construction du graphe biparti G^Q



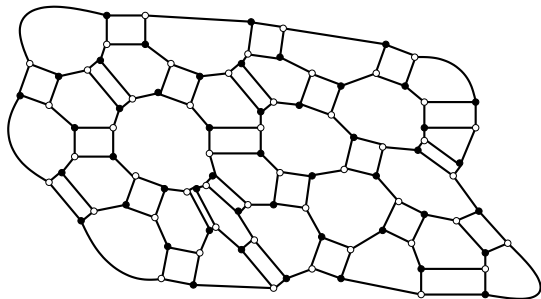
PREUVE I. VERS UN MODÈLE DE DIMÈRES BIPARTI

- Construction du graphe biparti G^Q



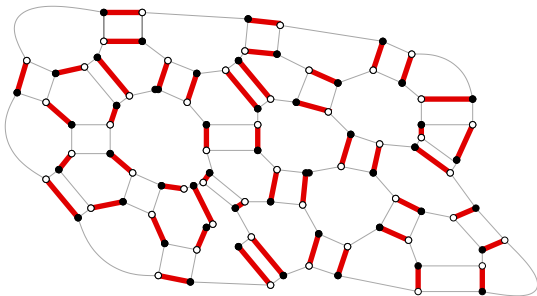
PREUVE I. VERS UN MODÈLE DE DIMÈRES BIPARTI

- ▶ Construction du graphe biparti G^Q



PREUVE I. VERS UN MODÈLE DE DIMÈRES BIPARTI

- ▶ Construction du graphe biparti G^Q

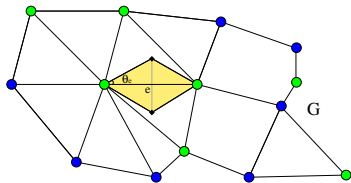


- ▶ Une **configuration de dimères** : sous-ensemble d'arêtes M tel que chaque sommet de G^Q est incident à exactement une arête de M .
 $\Rightarrow \mathcal{M}(G) =$ ensemble des configurations de dimères.
- ▶ Poids positifs : $(\nu_e)_{e \in E^Q} \Rightarrow$ **Probabilité de Boltzmann** $\mathbb{P}_{\text{dimere}}$.

$$Z_{\text{dimere}}(G^Q, \nu) = \sum_{M \in \mathcal{M}(G^Q)} \prod_{e \in M} \nu_e \text{ est la fonction de partition.}$$

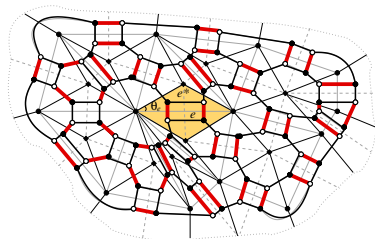
PREUVE 1. VERS UN MODÈLE DE DIMÈRES BIPARTI

Ising critique sur G



$$\forall e \in E, \quad J_e = \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + \sin \theta_e}{\cos \theta_e} \right)$$

Dimères sur G^Q



$$\forall e \in E^Q, \quad \nu_e = \begin{cases} \sin \theta_e & \text{si } e \parallel e \\ \cos \theta_e & \text{si } e \parallel e^* \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

THÉORÈME (NI, WU-LIN, DU, BD T)

$$Z_{\text{Ising}}(G, J)^2 = 2^{|V|} \left[\prod_{e \in E} \cos^{-1}(\theta_e) \right] Z_{\text{dimere}}(G^Q, \nu).$$

PREUVE 2. FONCTION DE PARTITION DES DIMÈRES.

- ▶ Soit le graphe biparti $G^Q = (W^Q \cup B^Q, E^Q)$, $|W^Q| = |B^Q| = k$.
- ▶ Orientation des arêtes : **orientation de Kasteleyn**.
- ▶ Soit K la matrice définie par :

$$\forall w \in W^Q, \forall b \in B^Q, \quad K_{w,b} = \begin{cases} \nu_{wb} & \text{si } w \sim b, w \rightarrow b, \\ -\nu_{wb} & \text{si } w \sim b, b \rightarrow w, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$\text{det}(K) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_k} \underbrace{\text{sgn}(\sigma)}_{\pm 1} \underbrace{K_{w_1, b_{\sigma(1)}} \cdots K_{w_k, b_{\sigma(k)}}}_{\pm 1 \text{ contribution config. dimères}}$$

THÉORÈME (KA, TE-FI)

Si les arêtes sont orientées selon une orientation de Kasteleyn, alors:

$$Z_{\text{dimère}}(G^Q, \nu) = |\text{det}(K)|.$$

PREUVE 2. FONCTION DE PARTITION DES DIMÈRES.

- ▶ Soit le graphe biparti $G^Q = (W^Q \cup B^Q, E^Q)$, $|W^Q| = |B^Q| = k$.
- ▶ Phases $(\phi_{wb})_{wb \in E^Q}$ associées aux arêtes : **phasage plat** [Ku].
- ▶ Soit K la matrice définie par :

$$\forall w \in W^Q, \forall b \in B^Q, K_{w,b} = \begin{cases} e^{i\phi_{wb}} \nu_{wb} & \text{si } w \sim b \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$\det(K) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_k} \underbrace{\text{sgn}(\sigma)}_{\pm 1} \underbrace{K_{w_1, b_{\sigma(1)}} \cdots K_{w_k, b_{\sigma(k)}}}_{e^{i(\text{phase})} \text{ contribution config. dimères}}$$

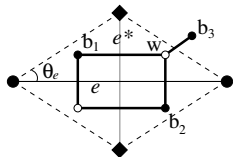
THÉORÈME (KU)

Si le phasage des arêtes est plat, alors:

$$Z_{\text{dimere}}(G^Q, \nu) = |\det(K)|.$$

PREUVE 2. FONCTION DE PARTITION DES DIMÈRES.

- Choix des phases



$$K_{w,b} = \begin{cases} 1. \sin \theta_e & \text{si } e // e \\ i. \cos \theta_e & \text{si } e // e^* \\ e^{i(\frac{3\pi}{2} - \theta_e)}.1 & \text{si } e \text{ externe et à l'intérieur} \\ e^{i[\frac{3\pi}{2} - (\theta_e + \theta^\beta)]}.1 & \text{si } e \text{ externe et au bord de } G^Q. \end{cases}$$

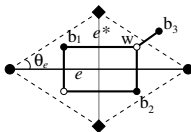
LEMME

Le phasage des arêtes est plat, d'où $Z_{\text{dimère}}(G^Q, \nu) = |\det K|$.

PREUVE 3. MATRICE DE KASTELEYN / MATRICE DU LAPLACIEN

► **Remarque** : pour toute arête externe wb_3 ,

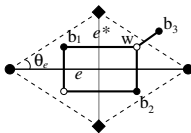
$$K_{w,b_3} = \begin{cases} -K_{w,b_1} - K_{w,b_2} & \text{si } wb_3 \text{ est à l'intérieur} \\ -K_{w,b_1} - K_{w,b_2} - ie^{-i\theta_e}(e^{-i\theta^{\hat{\theta}}} - 1) & \text{sinon.} \end{cases}$$



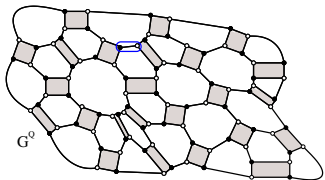
PREUVE 3. MATRICE DE KASTELEYN / MATRICE DU LAPLACIEN

► **Remarque** : pour toute arête externe wb_3 ,

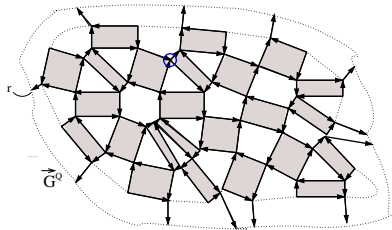
$$K_{w,b_3} = \begin{cases} -K_{w,b_1} - K_{w,b_2} & \text{si } wb_3 \text{ est à l'intérieur} \\ -K_{w,b_1} - K_{w,b_2} - ie^{-i\theta_e}(e^{-i\theta^0} - 1) & \text{sinon.} \end{cases}$$



► Matrice de Kasteleyn / matrice du Laplacien



$$\{w \equiv b_3\}$$



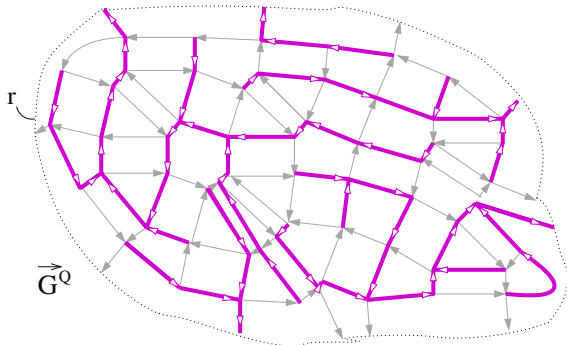
$$(K_{wb})_{w \in W^Q, b \in B^Q}$$

$$(\Delta_{xy}^{(r)})_{x, y \in G^Q}$$

PREUVE 3. MATRICE DE KASTELEYN / MATRICE DU LAPLACIEN

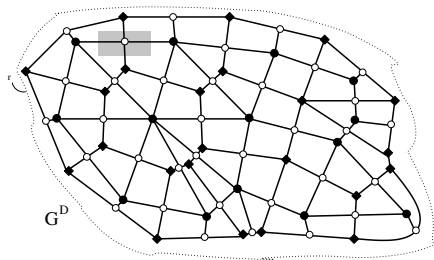
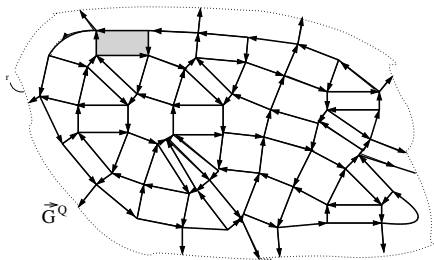
COROLLAIRE

$$Z_{\text{dimere}}(\mathbf{G}^Q, \nu) = |\det \Delta^{(r)}| = \left| \sum_{T \in \mathcal{T}^{(r)}(\mathbf{G}^Q)} \left(\prod_{e \in T} \rho_e \right) \right|.$$



PREUVE 4. ARBRES COUVRANTS ET ARBRES DUAUX

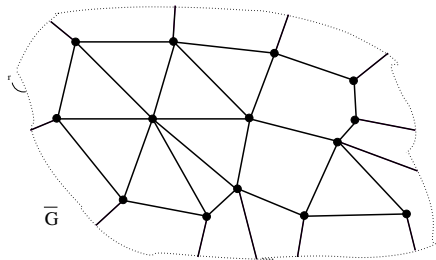
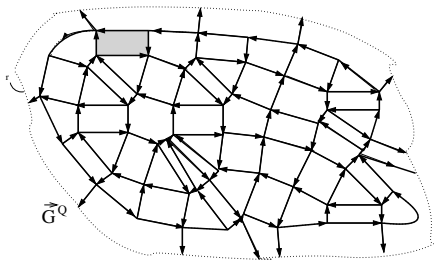
- ▶ Si T est un arbre de \vec{G}^Q , alors la **configuration duale** T^* formée des arêtes duales aux arêtes absentes dans T est un arbre du graph dual $(\vec{G}^Q)^*$, et par extension du double \vec{G}^D .



Version bipartite du dual $(\vec{G}^Q)^*$ est appelé le **double** de \vec{G} et notée \vec{G}^D .

PREUVE 4. ARBRES COUVRANTS ET ARBRES DUAUX

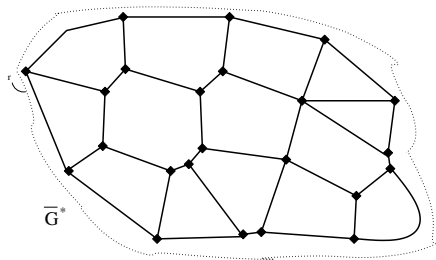
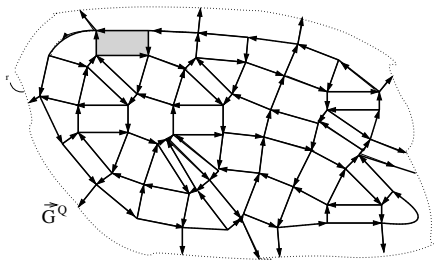
- ▶ Si T est un arbre de \vec{G}^Q , alors la **configuration duale** T^* formée des arêtes duales aux arêtes absentes dans T est un arbre du graph dual $(\vec{G}^Q)^*$, et par extension du double \bar{G}^D .



Version bipartite du dual $(\vec{G}^Q)^*$ est appelé le **double** de \bar{G} et notée \bar{G}^D .

PREUVE 4. ARBRES COUVRANTS ET ARBRES DUAUX

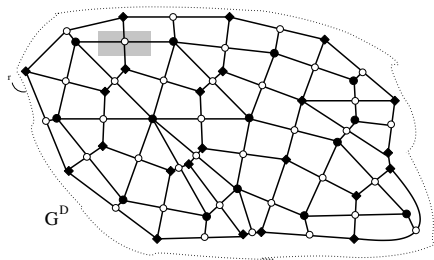
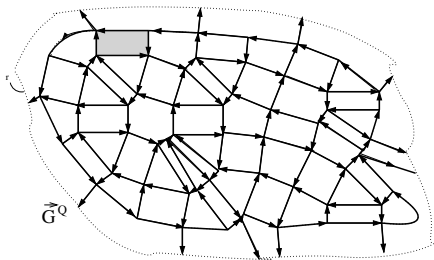
- ▶ Si T est un arbre de \vec{G}^Q , alors la **configuration duale** T^* formée des arêtes duales aux arêtes absentes dans T est un arbre du graph dual $(\vec{G}^Q)^*$, et par extension du double \vec{G}^D .



Version bipartite du dual $(\vec{G}^Q)^*$ est appelé le **double** de \vec{G} et notée \vec{G}^D .

PREUVE 4. ARBRES COUVRANTS ET ARBRES DUAUX

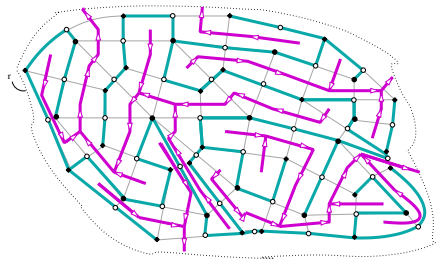
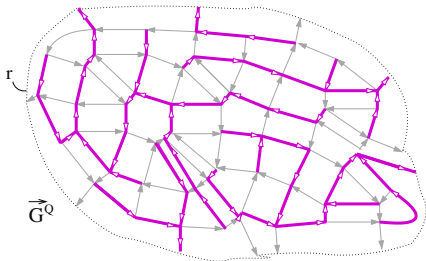
- ▶ Si T est un arbre de \vec{G}^Q , alors la **configuration duale** T^* formée des arêtes duales aux arêtes absentes dans T est un arbre du graph dual $(\vec{G}^Q)^*$, et par extension du double \vec{G}^D .



Version bipartie du dual $(\vec{G}^Q)^*$ est appelé le **double** de \vec{G} et notée \vec{G}^D .

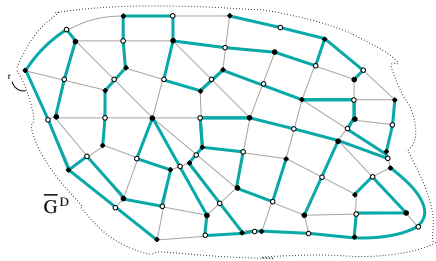
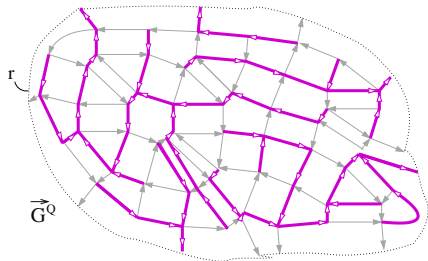
PREUVE 4. ARBRES COUVRANTS ET ARBRES DUAUX

- ▶ Si T est un arbre de \vec{G}^Q , alors la **configuration duale** T^* formée des arêtes duales aux arêtes absentes dans T est un arbre du graph dual $(\vec{G}^Q)^*$, et par extension du double \vec{G}^D .



PREUVE 4. ARBRES COUVRANTS ET ARBRES DUAUX

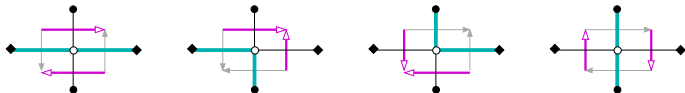
- ▶ Si T est un arbre de \vec{G}^Q , alors la **configuration duale** T^* formée des arêtes duales aux arêtes absentes dans T est un arbre du graph dual $(\vec{G}^Q)^*$, et par extension du double \vec{G}^D .



PREUVE 4. CARACTÉRISATION DES ARBRES COUVRANTS DUAUX.

LEMME

Un arbre couvrant de G^D est le dual d'un arbre couvrant de G^Q si et seulement si la restriction en chacun des sommets blanc (à l'intérieur) est de la forme suivante :

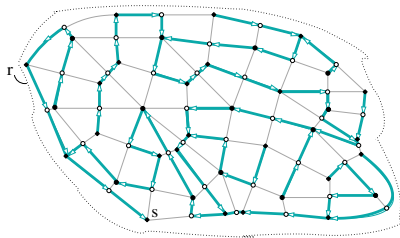


On appelle (c) cette condition, et on note $\mathcal{T}_{(c)}^s(G^D)$ l'ensemble des ces arbres couvrants, orientés vers un sommet s du bord.

PREUVE 5. DES ARBRES DUAUX AUX DIMÈRES DU DOUBLE

PROPOSITION

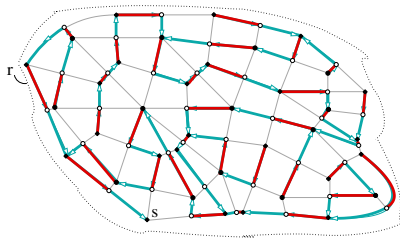
Soit T un arbre couvrant de $\mathcal{T}_{(c)}^s(G^D)$. Soit M_T la configuration formée des arêtes sortant des sommets noirs, alors M_T est une configuration de dimères de $G^D(s)$.



PREUVE 5. DES ARBRES DUAUX AUX DIMÈRES DU DOUBLE

PROPOSITION

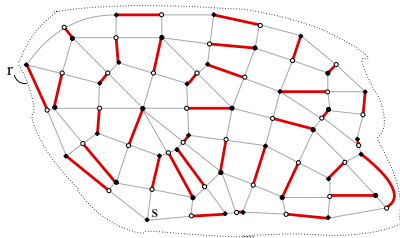
Soit T un arbre couvrant de $\mathcal{T}_{(c)}^s(G^D)$. Soit M_T la configuration formée des arêtes sortant des sommets noirs, alors M_T est une configuration de dimères de $G^D(s)$.



PREUVE 5. DES Arbres DUAUX AUX DIMÈRES DU DOUBLE

PROPOSITION

Soit \mathcal{T} un arbre couvrant de $\mathcal{T}_{(c)}^s(G^D)$. Soit $M_{\mathcal{T}}$ la configuration formée des arêtes sortant des sommets noirs, alors $M_{\mathcal{T}}$ est une configuration de dimères de $G^D(s)$.



$$\text{Ainsi, } \mathcal{T}_{(c)}^s(G^D) = \bigsqcup_{M \in \mathcal{M}(G^D(s))} \mathcal{T}_{c,M}^s(G^D)$$

$$Z_{\text{dimere}}(G^Q, \nu) = \sum_{M \in \mathcal{M}(G^D(s))} \rho(\mathcal{T}_{c,M}^s(G^D)).$$

PREUVE 5. DES ARBRES DUAUX AUX DIMÈRES DU DOUBLE

PROPOSITION

Soit M un couplage parfait de $G^D(s)$, alors une configuration d'arêtes qui contient les arêtes de M et qui satisfait la condition (c) est la version non-orientée d'un arbre couvrant de $\mathcal{T}_{c,M}^s(G^D)$.

En conséquence, on a :

$$\rho(\mathcal{T}_{c,M}^s(G^D)) = \rho'(M) = \prod_{e \in M} \rho'_e.$$
$$Z_{\text{dimere}}(G^Q, \nu) = \sum_{M \in \mathcal{M}(G^D(s))} \prod_{e \in M} \rho'_e.$$

PREUVE 6. CONCLUSION [K-P-W]

La généralisation de la bijection de Temperley due à Kenyon-Propp-Wilson permet de conclure.

