

SM2 - UE8

Éléments de cours de Mathématiques

J.F. Marckert

AVANT PROPOS

Le cours présenté ici est destiné aux élèves de deug SM2, de l'université de Versailles. Le programme de ce cours tourne autour des notions d'intégrale généralisée et à paramètres, de série numérique, de suite et série de fonctions (et donc des différents types de convergence), et également l'étude des séries de Fourier.

18 heures de cours et 24 heures de TD sont consacrées à cette tâche. Sur une année, le nombre d'heures consacrées à l'étude des mathématiques est de 126h (en comptant les probabilités) que l'on peut comparer aux 106h de mathématiques que reçoivent les étudiants de deuxième année du DEUG d'économie.

Quiconque connaît quelque peu les notions indiquées plus haut sait combien elles sont difficiles à assimiler, mais aussi l'importance qu'elles revêtent pour les applications dans tous les domaines des sciences. Un doublement du nombre d'heures de mathématiques, à programme constant, permettrait (peut être) aux étudiants de pouvoir *comprendre* ces objets.

Les mathématiques ne se résument pas à une liste de recettes que l'on peut appliquer dans telle ou telle situation. Il faut du temps pour s'approprier des concepts ou objets nouveaux avant même de pouvoir en faire quoi que ce soit.

Accorder une place plus importante aux mathématiques dans le DEUG SM est aussi indispensable que... possible. Ceci résulte de choix faits au niveau de l'université.

Ne pas se donner le temps nécessaire pour comprendre les mathématiques que l'on utilise, c'est, par la même occasion, renoncer à comprendre vraiment leurs applications.

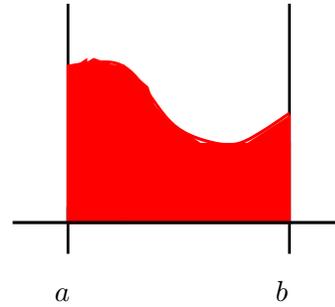
Table des matières

Chapitre I. Intégrales - Intégrales Généralisées	7
A. Intégrale sur un intervalle compact	7
a. Propriétés de l'intégrale standard	7
b. Intégrale et Primitive	7
B. Intégrale généralisée	9
a. Introduction et définitions	9
b. Décomposition d'une intégrale	10
c. Propriétés de l'intégrale généralisée	10
C. Comparaison - Critères de convergences	10
a. Fonctions de références	10
D. Exercices	13
Chapitre II. Séries Numériques	16
A. Introduction	16
a. Définitions	16
b. Quelques propriétés	16
B. Quelques séries à connaître	17
a. Séries géométriques	17
b. Série de Riemann	18
c. Série de l'exponentielle	18
C. Séries à termes positifs	18
a. Critères de convergence	19
b. Critère de Cauchy et de d'Alembert	20
c. Séries absolument convergentes	21
D. Séries alternées	22
E. Exercices	24
Chapitre III. Suites et Séries de Fonctions	27
A. Suites de Fonctions	27
a. Convergence simple	27
b. Convergence uniforme	28
B. Séries de Fonctions	30
C. Série entières	33
a. Rayon de convergence	33
b. Détermination du rayon de convergence	34
D. Exercices	35
Chapitre IV. Séries de Fourier	39
A. Fonctions périodiques	39
B. Polynômes et séries trigonométriques	40
a. Polynômes trigonométriques réels	40
b. Polynômes trigonométriques complexes	43
c. Séries trigonométriques réelles et complexes	44
d. Convergences	44
C. Développement en série de Fourier d'une fonction	45
a. Coefficients de Fourier d'une fonction	46
b. Convergence de la série de Fourier d'une fonction	46
D. Exercices	52
ANNALES	57

Chapitre I. Intégrales - Intégrales Généralisées

A. Intégrale sur un intervalle compact

Un intervalle compact de \mathbb{R} est un intervalle fermé $[a, b]$ où a et b sont deux réels de \mathbb{R} ($+\infty$ et $-\infty$ n'appartiennent pas à \mathbb{R}). Les fonctions continues sur $[a, b]$ sont intégrables et le réel $\int_a^b f(t)dt = \int_{[a,b]} f(t)dt$ est appelé l'intégrale de f sur $[a, b]$ (les fonctions qui sont seulement continues par morceaux et bornées sur $[a, b]$ sont également intégrables).



a. Propriétés de l'intégrale standard

- Relation de Chasles : Pour tous réels a, b, c , on a :

$$\int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt = \int_a^c f(t)dt$$

- Intégrale d'une constante :

$$\int_a^b 1dt = b - a$$

- On pose la convention : $\int_a^b f(t)dt = -\int_b^a f(t)dt$
- L'intégrale est linéaire : pour toutes fonctions f et g intégrables et λ et μ réels, on a :

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))dx = \lambda \int_a^b f(x)dx + \mu \int_a^b g(x)dx$$

- Si $f(t) \geq 0$ sur $[a, b]$ alors $\int_a^b f(t)dt \geq 0$; on en déduit que si $f(t) \leq g(t)$ sur $[a, b]$, $\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$.
- Si f est continue, positive d'intégrale nulle sur $[a, b]$ (avec $a < b$) alors $f \equiv 0$ sur $[a, b]$.

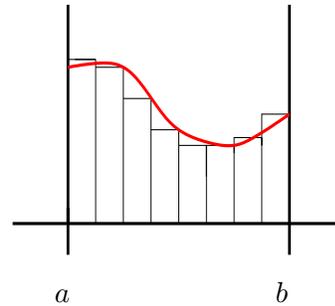
- Si f est continue (ou continue par morceau et bornée) sur $[a, b]$, alors les sommes de ¹Riemann convergent, i.e.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(t)dt.$$

(Approximation de l'intégrale par la méthode des rectangles, mais aussi cette formule est très proche de la définition de l'intégrale)

- Changement de variables : soit g une bijection continûment dérivable de $[a, b]$ dans $[g(a), g(b)]$:

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(t)dt = \int_a^b f(g(x))g'(x)dx \quad \text{changement } t = g(x).$$



b. Intégrale et Primitive

Comme on l'a vu plus haut l'intégrale d'une fonction est un réel associé à une fonction f et à un intervalle de \mathbb{R} . La primitive d'une fonction f continue est une fonction F dérivable telle que :

$$F'(x) = f(x) \text{ pour tout } x.$$

Pour une fonction donnée f continue, il existe une infinité de primitives.

¹RIEMANN Bernhard, allemand, 1826-1866

Lemme 1 Deux primitives F_1 et F_2 de f diffèrent d'une constante.

Preuve : $F_1' = F_2' = f$; donc $F_1' - F_2' = 0$. On intègre, et on obtient $F_1 - F_2 = \text{constante}$

Proposition 1 Soit a un réel ; la fonction F définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \int_a^x f(t)dt$$

est une primitive de f . Elle s'annule en a .

Preuve : On calcule la limite suivante, qui par définition est la dérivée de F en x . On montre que cette quantité est égale à $f(x)$.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)dt.$$

Ceci représente l'aire sous la fonction f entre les deux droites d'équation $y = x$ et $y = x+h$, divisée par h . Intuitivement, puisque $h \rightarrow 0$, cette aire est de l'ordre de $f(x) \times h$.

Voici un argument plus formel : Une fonction est continue sur un intervalle I si (déf) :

$$\forall x \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ t.q. } |x - y| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Pour un x fixé, $\varepsilon > 0$ fixé, prenons $h < \eta$. On a

$$|f(x) - f(t)| < \varepsilon \text{ pour tout } x - h < t < x + h$$

de sorte que

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} (f(x) - \varepsilon)dt &\leq \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)dt \leq \frac{1}{h} \int_x^{x+h} (f(x) + \varepsilon)dt \\ \Leftrightarrow \frac{1}{h} \left(\int_x^{x+h} f(x)dt - \varepsilon h \right) &\leq \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)dt \leq \frac{1}{h} \left(\int_x^{x+h} f(x)dt + \varepsilon h \right) \\ \Leftrightarrow f(x) - \varepsilon < \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)dt &\leq \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(x)dt < f(x) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout ε , pour h suffisamment petit. \square

Corollaire 1 La proposition précédente implique la formule bien connue suivante : soit f de primitive F :

$$\int_{[a,b]} f(t)dt = \int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

Corollaire 2 Formule d'intégration par partie :

$$\int_a^b g(t)h'(t)dt = [g(t)h(t)]_a^b - \int_a^b g'(t)h(t)dt$$

Preuve : La preuve est intéressante car elle permet de retrouver aisément la formule. Elle repose exclusivement sur la formule de dérivation d'un produit.

$$(g(t)h(t))' = g'(t)h(t) + g(t)h'(t).$$

Donc, puisque gh est une primitive de $(gh)'$, on a :

$$\int_a^b (g(t)h(t))' dt = [g(t)h(t)]_a^b = \int_a^b g'(t)h(t)dt + \int_a^b g(t)h'(t)dt.$$

B. Intégrale généralisée

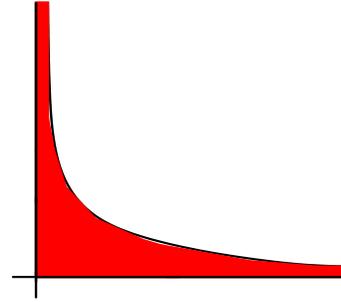
a. Introduction et définitions

Le but de l'intégrale généralisée comme son nom l'indique est de généraliser le calcul des intégrales à des intervalles non compact de \mathbb{R} .

On connaît l'interprétation de l'intégrale comme aire sous la courbe. Une fonction continue est bornée sur un compact. Il s'ensuit que l'aire sous la courbe est également finie (et bien définie) lorsqu'on se restreint à un intervalle compact. Que se passe-t-il lorsque l'intervalle est ouvert, semi-ouvert, non borné?

Même pour des fonctions simples, il apparaît des "branches" infinies ($x \mapsto 1/x$ en 0^+ ou $+\infty$) ou des oscillations ($x \mapsto \cos x$ en $+\infty$) ou $x \mapsto \sin(1/x)/x^2$ en 0.

L'idée principale pour pouvoir calculer des intégrales présentant de tels "problèmes" est (grossièrement) de considérer l'intégrale de f sur $]a, b[$ (a ou/et b pouvant être infinis) comme limite de l'intégrale de f sur $[a_n, b_n]$ avec $\lim a_n = a, \lim b_n = b$. L'existence et la valeur de l'intégrale sur $]a, b[$ dépendra de la convergence ou non de l'intégrale sur l'intervalle $[a_n, b_n]$.



Définition : Soit f une fonction définie sur $[a, b[$ (b pouvant être égal à $+\infty$). On dit que f est *localement intégrable* si l'intégrale de f existe sur tout intervalle $[a, c]$ contenu dans $[a, b[$. On dit que l'intégrale de f sur $]a, b[$ converge si

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x f(t) dt \text{ admet une limite finie.}$$

Cette définition s'étend sans problèmes aux intervalles du type $]a, b]$ les limites étant prises sur la borne inférieure de l'intégrale.

(On dit qu'une intégrale est divergente si elle n'est pas convergente. La fonction $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ peut alors diverger vers $+\infty$ ou $-\infty$, ou osciller.)

Exemple : a) Intégrale de $f(t) = t$ sur $[1, +\infty[$.

- f est continue sur $[1, +\infty[$, donc aussi en 1. Elle est donc localement intégrable sur $[1, +\infty[$. Il n'y a pas de problème pour intégrer près de 1.
- L'intervalle d'intégration est de longueur infinie : il y a un problème.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x f(t) dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x t dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{t^2}{2} \right]_1^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2/2 - 1/2 = +\infty.$$

L'intégrale de f sur $[1, +\infty[$ ne converge pas.

b) Intégrale de $f(t) = 1/\sqrt{1-t}$ sur $[0, 1[$. f n'est pas définie en 1 et tend vers $+\infty$ en ce point. Par ailleurs, étant continue sur $[0, 1[$, elle y est localement intégrable. Il y a donc un problème en 1.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t}} dt = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left[-2\sqrt{1-t} \right]_0^x = \lim_{x \rightarrow 1^-} -2\sqrt{1-x} - (-2\sqrt{1}) = 2$$

L'intégrale de f sur $[0, 1[$ est convergente et vaut 2.

Remarque : Si f est continue sur $]a, b[$ et prolongeable par continuité en a et b , les intégrales de f sur $]a, b[$ et sur $[a, b]$ existent et coïncident : par exemple $\int_{]0, \pi[} \cos(t) dt = \int_{[0, \pi]} \cos(t) dt = 0$. En ce qui concerne les notations, on écrit toujours $\int_a^b f(t) dt$ même si en fait, il s'agit de $\int_{]a, b[} f(t) dt$.

b. Décomposition d'une intégrale

Parfois, on cherche à intégrer une fonction sur un intervalle, (ou plus généralement) sur un ensemble de \mathbb{R} où plusieurs problèmes apparaissent. Par exemple, c'est le cas pour $\int_0^{+\infty} (1/x) dx$; il y a un problème en 0^+ (où f n'est plus bornée) et en $+\infty$. Dans ce cas, on coupe l'intégrale de f en autant de parties qu'il y a de problèmes. On dira que l'intégrale de f converge sur l'ensemble I d'intégration, si chacun des "morceaux" de l'intégrale converge.

Exemple : Considérons l'intégrale de $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ sur $I =]0, 1[$. f tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) en 0 (resp. en 1) ; il y a deux problèmes. On écrit alors, utilisant la relation de Chasles :

$$\int_0^1 = \int_0^{1/2} + \int_{1/2}^1$$

On se retrouve avec deux intégrales généralisées qui ont chacune "un seul problème". Une primitive de f étant $F(t) = 2\sqrt{t} + 2\sqrt{1-t}$, on a :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^{1/2} f(t) dt &= \lim_{x \rightarrow 0^+} [F(t)]_x^{1/2} = 4\sqrt{1/2} - 2\sqrt{1} \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} \int_{1/2}^x f(t) dt &= \lim_{x \rightarrow 1^-} [F(t)]_{1/2}^x = 2\sqrt{1} - 4\sqrt{1/2} \end{aligned}$$

Ces deux intégrales convergent. L'intégrale sur $]0, 1[$ existe et vaut donc la somme des deux intégrales ci-dessus, c'est à dire 0.

Avant de conclure, on peut remarquer que le choix du point 1/2 ci-dessus est sans effet sur la convergence ou non (et sur la valeur) de l'intégrale, grâce à la relation de Chasles.

c. Propriétés de l'intégrale généralisée

Toutes les propriétés de l'intégrale standard décrite dans (A.a.) sont encore vraies sauf la propriété relatives aux sommes de Riemann pour laquelle il existe des contre-exemples.

C. Comparaison - Critères de convergences

Dans les exemples ci-dessus on déduit la convergence (ou non) des intégrales en calculant explicitement les primitives et en montrant qu'elles convergent (ou non) sur les bornes de l'intervalle d'intégration. Souvent, ce procédé ne fonctionne pas car on est pas en mesure de calculer une primitive...(trop dur ou même impossible...) Pour pouvoir déterminer la convergence d'une intégrale on est amené à la comparer avec celle de fonctions plus simples, primitivables.

a. Fonctions de références

Intégrales de Riemann :

- En $+\infty$: $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$ converge ssi $\alpha > 1$
- En 0 : $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx$ converge ssi $\alpha < 1$.

Preuve laissée en exercice.

Définition : L'intégrale de la fonction f est dite absolument convergente sur un intervalle I de \mathbb{R} si l'intégrale de $|f|$ sur I est convergente.

Proposition 2 Si l'intégrale de f est absolument convergente alors elle est aussi convergente. Dans ce cas, on a :

$$\left| \int_I f(x) dx \right| \leq \int_I |f(x)| dx$$

Preuve : Sort du cadre de ce cours.

Remarque : La réciproque est fautive. Par exemple $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$ est convergente mais $\int_1^{+\infty} \left| \frac{\sin(x)}{x} \right| dx$ non (voir feuille TD1).

Proposition 3 si f et g vérifient $0 \leq f \leq g$ sur I alors :

- la convergence de $\int_I g(t) dt$ implique celle de $\int_I f(t) dt$
- la divergence de $\int_I f(t) dt$ implique celle de $\int_I g(t) dt$

Preuve : Laissée en exercice. (Ind : on se sert du fait que les primitives de g et de f sont croissantes et majorée dans le premier cas (par $\int_I g(t) dt$) et minorée (par $\int_I f(t) dt$ dans le second cas).

En pratique, on compare la fonction à intégrer à n'importe quelle fonction plus simple à intégrer :

Exemple : Soit $\int_1^{+\infty} \frac{1+\cos^2(x)}{e^x \sqrt{x}} dx$ sur $[1, +\infty[$. Il semble difficile de calculer une primitive de cette fonction (et c'est en effet le cas). Prouver qu'elle converge est néanmoins facile :

$$0 < \frac{1 + \cos^2(x)}{e^x \sqrt{x}} \leq \frac{2}{e^x} = 2e^{-x}$$

Puisque e^{-x} est intégrable sur $[1, +\infty[$, notre intégrale converge.

Remarque : La convergence de f vers 0 en $+\infty$ ne suffit pas à prouver la convergence de l'intégrale en $+\infty$ (penser à $x \mapsto \frac{1}{x}$).

La réciproque est également fautive : Il existe des fonctions qui ne convergent pas vers 0 (qui ne sont pas bornées même en $+\infty$) mais dont l'intégrale converge en $+\infty$ (voir feuille TD1).

Proposition 4 Soit f et g deux fonctions positives telles que $f \sim g$ en $+\infty$ (ou en un point x_0); la convergence de l'intégrale de f équivaut à celle de g au voisinage de $+\infty$ (ou au voisinage du point x_0).

Preuve : Pour f et g suffisamment proche de $+\infty$ (ou proche de x_0) on a

$$f(x)/2 \leq g(x) \leq 2f(x) \leq 3g(x)$$

(car le rapport $f/g \rightarrow 1$ au voisinage de ces points). Il est aisé, grâce à ces inégalités de prouver que les intégrales de f et de g ont les mêmes comportements :

$$\begin{aligned} \int f \text{ converge} &\Leftrightarrow \int g \text{ converge} \\ \int f \text{ diverge} &\Leftrightarrow \int g \text{ diverge} \end{aligned}$$

Ceci ne signifie par, bien sûr que les intégrales sont égales.

Par exemple, les fonctions $1/x^2$ et $1/(x+1)^2$ sont équivalentes en $+\infty$. Puisque $\int_1^{+\infty} 1/x^2 dx$ converge, il en va de même de $\int_1^{+\infty} 1/(x+1)^2 dx$. Mais on a :

$$\int_1^{+\infty} 1/x^2 dx = 1$$

alors que

$$\int_1^{+\infty} 1/(x+1)^2 dx = 1/2.$$

D. Exercices

Exercice 1

Pour chacun des points suivants, dire si l'intégrale de f sur I converge ; les calculer le cas échéant. Représenter rapidement les fonctions sur le domaine I .

$$\left. \begin{array}{l} a. f(t) = 1/t, \quad I =]0, 1] \\ c. f(t) = t^{-3/4}, \quad I =]0, +\infty[\\ e. f(t) = \tan t, \quad I = [0, \pi/2[\end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} b. f(t) = \log t, \quad I =]0, 2] \\ d. f(t) = \frac{1}{1-t^2}, \quad I = [0, 1[\\ f. f(t) = \frac{1}{\sqrt{t(1+t)^3}}, \quad I =]0, +\infty[\end{array} \right.$$

Exercice 2

Dans cet exercice on se propose de donner un exemple du fait suivant : il existe des fonctions ne convergeant pas vers 0, positive, dont l'intégrale converge sur \mathbb{R}^+ .

a) Montrer que l'intégrale $\int_2^{+\infty} 1/(x-1)^2 dx$ est convergente. Calculer sa valeur.

b) En utilisant (a), montrer que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ converge.

On définit la fonction f sur \mathbb{R} de la manière suivante :

$$f(x) = \begin{cases} (x-n)n^4 & \text{si } n \leq x \leq n + 1/n^3, n \geq 2, n \in \mathbb{N} \\ (n + 2/n^3 - x)n^4 & \text{si } n + 1/n^3 \leq x \leq n + 2/n^3, n \geq 2, n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

c) Donner une représentation graphique de f . Remarquer que f ne converge pas vers 0 en $+\infty$.

d) Montrer que l'intégrale de f sur \mathbb{R} converge.

Exercice 3

L'intégrale d'une fonction f est dite absolument convergente sur un intervalle I de \mathbb{R} si l'intégrale de $|f|$ sur I est convergente.

En cours, on trouve la proposition suivante :

Si l'intégrale de f est absolument convergente alors elle est aussi convergente. Dans ce cas, on a :

$$\left| \int_I f(x) dx \right| \leq \int_I |f(x)| dx$$

Application : Utiliser cette proposition pour prouver que l'intégrale de $\frac{\cos x}{x^2}$ sur $[1, \infty[$ est convergente.

Les questions qui suivent ont pour but de montrer que la réciproque de cette proposition est fautive : il existe des intégrales convergentes mais non absolument convergentes.

a. Montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ converge.

b. On va montrer que cette intégrale n'est pas absolument convergente.

- Montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{x} dx$ est convergente.

- Montrer que $|\sin(x)| \geq \sin^2(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

En utilisant que $\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$ conclure.

Exercice 4

Pour les intégrales suivantes, on montrera qu'elles convergent ou non.

$$\left. \begin{array}{l} a. f(t) = \frac{t^2}{1+t^4}, \quad I = \mathbb{R} \\ c. f(t) = 1/\cosh t, \quad I =]0, +\infty[\end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} b. f(t) = t\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}, \quad I =]-1, 1[\\ d. f(t) = \cos(1/t)/t, \quad I = [0, 1[\end{array} \right.$$

Exercice 5

Soit f une fonction continue et g une fonction dérivable sur \mathbb{R} .

a. Montrer que la fonction définie sur $[-\pi/4, \pi/4]$ par

$$J(x) = \int_1^{g(x)} f(t) dt$$

est dérivable et calculer sa dérivée. (Ind : on pourra utiliser une primitive de f).

b. "Vérifiez" votre formule en calculant de deux manières la dérivée de

$$J_1(x) = \int_0^{\cos(x)} \frac{1}{\sqrt{t}} dt.$$

c. De la même façon, calculer la dérivée de

$$J_2(x) = \int_{\log x}^{1+\log x} \frac{1}{1+e^t} dt$$

Calculer une primitive de J_2' . En déduire une forme simple (sans intégrale) de J_2 .

Exercice 6

a. Calculer une primitive de $f(x) = \log x$

b. Calculer $\int_0^1 \log x dx$.

c. En déduire que $I_1 = \int_0^1 (\log x)/(1+x^2) dx$ est convergente.

d. Soit $I_2 = \int_1^{+\infty} (\log x)/(1+x^2) dx$. Par un changement de variables, montrez que $I_2 = -I_1$

e. Montrez que $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

f. En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} (\log x)/(4+x^2) dx$

Exercice 7

On montrera pour chacune des fonctions f et des intervalles I suivants si les intégrales de f sur I convergent ou non.

$$\left. \begin{array}{l} a. f(t) = \frac{1}{t+\cos t}, \quad I =]2, +\infty[\\ c. f(t) = \exp(-t^2), \quad I =]0, +\infty[\end{array} \right\} \begin{array}{l} b. f(t) = \tanh(t), \quad I = \mathbb{R} \\ d. f(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{t-1}, \quad I =]4, +\infty[\end{array}$$

Exercice 8

On montrera pour chacune des fonctions f et des intervalles I suivants si les intégrales de f sur I sont absolument convergentes, convergentes ou non.

$$\left. \begin{array}{l} a. f(t) = \frac{\cos t}{t}, \quad I =]2, +\infty[\\ c. f(t) = -\exp(-t), \quad I =]0, +\infty[\end{array} \right\} \begin{array}{l} b. f(t) = \frac{\cos t}{t^5}, \quad I = \mathbb{R}^+ \\ d. f(t) = \sin e^t, \quad I =]0, +\infty[\end{array}$$

Exercice 9

Considérons $(f_n)_{n \geq 0}$ la suite de fonctions définies par :

$$\begin{aligned} f_n &: \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto e^{-x} x^n \end{aligned}$$

A.) Préliminaires :

a. Etudier les variations de f_n ; montrer que f_n possède une limite en $+\infty$ que l'on notera pour l'instant l_n .

b. En utilisant, le fait que l_n existe et est finie, montrer que $l_{n-1} = 0$ (pour $n > 1$).

c. En utilisant le fait que chacun des l_i est nul, établir, que pour tout couple (n, m) fixé, si x est suffisamment grand, on a :

$$e^{-x} x^n \leq 1/x^m.$$

(Ind. on pourra considérer f_{n+m})

d. En déduire, que pour tout $a \in \mathbb{R}^+$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} x^a = 0$$

e. Etablir que la série numérique $((u_k))_{k \geq 0}$ définie par

$$u_k = e^{-k} k^{12}$$

converge.

B.) La fonction Gamma d'Euler

La fonction Gamma d'Euler est définie, pour tout $a > -1$ par :

$$\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{a-1} dx.$$

a. Justifier que Γ est bien définie, c'est à dire que l'intégrale converge.

b. Etablir que $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$ pour tout $a > -1$ (on pourra utiliser une intégration par parties.)

c. Montrer (soigneusement) par récurrence que pour tout $n \geq 1$,

$$\Gamma(n) = (n-1)!.$$

Chapitre II. Séries Numériques

A. Introduction

a. Définitions

Soit $(u_n)_{n=0,1,\dots}$ une suite de nombre réels ou complexes. La suite de ses *sommes partielles* $(S_n)_{n=0,1,\dots}$ est définie par

$$S_k = \sum_{i=0}^k u_i.$$

Exemple : Par exemple, si $a_i = i$ pour tout i , on a :

$$\begin{aligned} S_0 &= u_0 = 0, \\ S_1 &= u_0 + u_1 = 0 + 1 = 1, \\ S_2 &= u_0 + u_1 + u_2 = 0 + 1 + 2 = 3 \\ &\vdots \\ &\vdots \end{aligned}$$

La *série de terme général* $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, notée

$$\left((u_n) \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

est par définition le couple formé par les deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Définition : On dit que la série $\left((u_n) \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est *convergente* si la suite des sommes partielles associée $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente ; si ce n'est pas le cas, on dira que la série diverge.

Lorsque la série converge, la limite S de la suite des sommes partielles est appelée *somme de la série*. On note :

$$S = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^N u_i = \sum_{i=0}^{+\infty} u_i.$$

Remarque : S est exprimée comme une somme pour i variant de 0 à $+\infty$. Le choix de la lettre i est bien entendu complètement arbitraire et sans effet sur la somme. On a évidemment :

$$S = \sum_{i=0}^{+\infty} u_i = \sum_{j=0}^{+\infty} u_j.$$

Dans la plupart des cas, trouver une formule pour exprimer S_n directement en fonction de n n'est pas possible. Pour prouver la convergence ou la divergence de telles suites, on les compare avec des séries dont le comportement est connu ou on utilise des critères de convergence (ce qui revient essentiellement au même).

b. Quelques propriétés

• Si les séries $((a_n))_n$ et $((b_n))_n$ convergent, il en est de même de toutes leur combinaisons linéaires, c'est à dire, pour tout λ et μ réels, la série $((\lambda a_n + \mu b_n))_n$ converge. De plus, on a :

$$\sum_{i=0}^{+\infty} (\lambda a_i + \mu b_i) = \left(\lambda \sum_{i=0}^{+\infty} a_i \right) + \left(\mu \sum_{i=0}^{+\infty} b_i \right).$$

En effet, si on note (S_k) , (S'_k) , (S''_k) les suites des sommes partielles de respectivement, $(((\lambda a_n + \mu b_n))_n)$, $((a_n))_n$, et $((b_n))_n$, on a, par associativité des sommes finies :

$$S_k = \lambda S'_k + \mu S''_k.$$

En passant à la limite sur k , on voit que le terme de droite converge ; donc celui de gauche aussi. On obtient alors la formule annoncée plus haut.

Proposition 1 Soit $((u_n))_n$ une série. Si la suite $(u_n)_n$ ne converge pas vers 0, alors la série ne converge pas.

Preuve : Montrons que la série des sommes partielles ne converge pas. Puisque $S_k = \sum_{i=0}^k u_i$, on a :

$$S_{k+1} - S_k = u_{k+1}.$$

La suite S_k ne peut pas converger puisque la différence entre deux termes consécutifs ne converge pas vers 0. On en déduit par exemple que la “série” de terme général $u_n = (-1)^n$ ne converge pas. En effet, que vaudrait la somme suivante :

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 \dots ?$$

On a :

$$\begin{aligned} S &= 1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \dots = 1 \\ S &= (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots = 0. \end{aligned}$$

Il faut donc comprendre que cette somme ne peut pas avoir de valeur et que donc l'écriture “ $S =$ ” ci-dessus n'était pas valable.

• Remarquons encore que ce n'est pas parce que u_n converge vers 0 que la série de terme général u_n converge (voir un peu plus loin les nombres harmoniques).

B. Quelques séries à connaître

a. Séries géométriques

On appelle série géométrique toute série dont le terme général s'écrit $u_n = c\alpha^n$ où c et α sont deux réels (ou complexes) fixés. α s'appelle la *raison* de la suite géométrique (on passe de u_n à u_{n+1} en multipliant par α).

Proposition 2

- si $|\alpha| \geq 1$, la série $((u_n))_n$ n'est pas convergente.
- si $|\alpha| < 1$, la série $((u_n))_n$ converge et sa somme est $S = \sum_{k=0}^{+\infty} c\alpha^k = \frac{c}{1-\alpha}$

Preuve : Si $|\alpha| \geq 1$, le terme général de la série ne converge pas vers 0, donc la série ne converge pas. Sinon, on écrit

$$\begin{aligned} S_n &= c + c\alpha + c\alpha^2 + \dots + c\alpha^n \\ \alpha S_n &= c\alpha + c\alpha^2 + \dots + c\alpha^n + c\alpha^{n+1} \end{aligned}$$

De sorte que

$$S_n - \alpha S_n = c(1 - \alpha^{n+1})$$

Si $|\alpha| < 1$, la convergence de S_n vers la valeur de S indiquée plus haut est claire. Dans les autres cas, S_n diverge clairement.

b. Série de Riemann

Il s'agit des séries de terme général $U_n = \frac{1}{n^\alpha}$.

Proposition 3

- Si $\alpha > 1$ la série de terme général u_n converge.
- Si $\alpha \leq 1$ la série de terme général u_n diverge.

Preuve : En TD.

c. Série de l'exponentielle

Il s'agit des séries de terme général $u_n = \frac{a^n}{n!}$.

Proposition 4 Pour tout $a \in \mathbb{R}$, la série de terme général u_n converge. Sa somme vaut e^a .

$$S = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{a^i}{i!} = \exp(a).$$

Une remarque fondamentale

Dans ce cours, pour plus de simplicité dans l'énoncé des théorèmes et propriétés, on a décidé de faire commencer l'indice de sommation par 0. Ce n'est bien sûr pas une condition nécessaire pour aucun des résultats. De plus, il faut bien comprendre que le caractère convergent ou non d'une série ne dépend pas du tout de la valeur de ses premiers termes. Ceux-ci influent sur la valeur de la somme mais pas sur son existence.

Dans la section suivante, on parle souvent de séries à termes positifs. En fait, si une série possède un nombre fini de termes négatifs, et si N est le plus grand indice d'entre eux, la série u_{N+1}, u_{N+2}, \dots est à termes positifs. Tous les critères de convergence relatifs aux séries à termes positifs s'appliquent donc bien entendu aux séries qui n'ont qu'un nombre fini de termes négatifs.

De manière générale, chaque fois que dans un théorème une hypothèse est formulée sur les termes d'une série, le théorème reste valable si cette hypothèse n'est vérifiée qu'à partir d'un certain rang.

C. Séries à termes positifs

Comme dans le cas des intégrales généralisées, de nombreuses difficultés apparaissent lorsque le terme général des séries change de signes. Dans cette partie, on va s'intéresser uniquement aux séries à termes positifs. Cette restriction, qui peut sembler très forte a priori, ne l'est pas tant que ça. Il existe en effet (comme on le verra plus tard) des critères propres aux séries qui changent "souvent" de signe. De plus, comme dans le cas des intégrales généralisées, la convergence absolue d'une série (notion définie plus tard) entraîne la convergence simple. Il en résulte que, dans de nombreux cas, on déduit la convergence d'une série $((u_n))_n$ de celle de $((|u_n|))_n$.

Remarque : Tous les critères et propriétés donnés dans cette partie (Séries à termes positifs) sont tout à fait valables dans le cas où la série serait à termes tous négatifs (car si la série $((u_n))_n$ converge, il en va bien sûr de même pour $((-u_n))_n$). Ce que l'on cherche à éviter ici, ce sont les séries dont le terme général change une infinité de fois de signe.

Proposition 5 Soit $((u_n))_n$ une série à termes positifs. Notons $(S_n)_n$ la suite de ses sommes partielles. On a :

$$((u_n))_n \text{ converge} \Leftrightarrow S_n \text{ est une suite majorée}$$

Preuve : La suite S_n est bien sûr croissante car $S_{n+1} - S_n = u_{n+1}$ qui est positif par hypothèse. Une suite croissante converge ssi elle est majorée, d'où le résultat.

a. Critères de convergence

Proposition 6 Soit $((u_n))_n$ et $((v_n))_n$ deux séries à termes positifs telles que :

$$0 \leq u_n \leq v_n.$$

- a) si la série $((u_n))_n$ diverge alors la série $((v_n))_n$ diverge .
 b) si la série $((v_n))_n$ converge alors la série $((u_n))_n$ converge.

Preuve : (Attention, il s'agit de séries, pas de suites usuelles!) On a, pour tout k ,

$$0 \leq S_k \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=0}^k u_i \leq \tilde{S}_k \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=0}^k v_i.$$

Les suites de sommes partielles $(S_k)_k$ et $(\tilde{S}_k)_k$ sont croissantes. Dans le cas (a), $(S_k)_k$ est croissante et est non majorée et \tilde{S}_k est encore plus grande. On en déduit que \tilde{S}_k n'est pas non plus majorée et diverge donc vers $+\infty$.

Dans le cas (b), \tilde{S}_k converge, disons vers \tilde{S} . Il en résulte que S_k est également majorée par \tilde{S} . Puisqu'elle est croissante, elle converge.

Proposition 7 Soient $((u_n))_n$ et $((v_n))_n$ deux séries à termes positifs telles que

$$u_n \sim v_n.$$

La série $((u_n))_n$ converge ssi la série $((v_n))_n$ converge.

Ceci implique bien sûr que si l'une diverge, l'autre aussi.

Preuve : $u_n \sim v_n$ signifie que la suite $w_n = u_n/v_n \rightarrow 1$ en $+\infty$. On sait donc qu'il existe un entier N , tel que pour tout $n > N$, on a

$$v_n/2 \leq u_n \leq 2v_n.$$

Il est clair, par cette formule que si la somme des v_n diverge, celles des u_n aussi, et que si elle converge celle des u_n aussi.

Remarque : Cette proposition est mise en défaut si les termes ne sont pas positifs. Par exemple si $u_n = (-1)^n/\sqrt{n}$ et $v_n = (-1)^n/\sqrt{n} + 1/n$, u_n et v_n sont équivalentes, mais la série $((u_n))$ converge alors que $((v_n))$ non.

Proposition 8 (Comparaison avec des intégrales.) Soit $((u_n))_n$ une série à termes positifs telle que u_n s'écrive

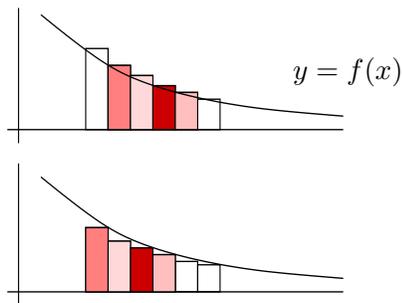
$$u_n = f(n)$$

où f est une fonction positive et décroissante sur \mathbb{R}^+ .

L'intégrale généralisée $\int^{+\infty} f(x)dx$ et la série $((u_n))_n$ sont de même nature.

La borne inférieure de l'intégrale n'est pas indiquée. Cela signifie que seul le comportement en $+\infty$ de l'intégrale nous intéresse. *Preuve* : Soit x un réel appartenant à l'intervalle $[n, n+1]$ puisque f est décroissante, on a :

$$f(n) \geq f(x) \geq f(n+1)$$



d'où

$$f(n) = \int_n^{n+1} f(n) dx \geq \int_n^{n+1} f(x) dx \geq \int_n^{n+1} f(n+1) dx = f(n+1)$$

et

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} f(n) &\geq \sum_{n=0}^{+\infty} \int_n^{n+1} f(x) dx \geq \sum_{n=0}^{+\infty} f(n+1) \\ \sum_{n=0}^{+\infty} f(n) &\geq \int_0^{+\infty} f(x) dx \geq \sum_{n=1}^{+\infty} f(n) \end{aligned}$$

Il apparaît clairement que l'intégrale de f et la série $((f(n)))_n$ ont même comportement.

Exemple : (Série et nombres harmoniques.)

On appelle nombre harmonique de rang n , la somme partielle

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

La somme de la série de terme général $u_k = 1/k$ est la limite de H_n lorsque n tend vers $+\infty$. On compare tout simplement cette série à l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$. Celle-ci étant divergente, on obtient la proposition :

Proposition 9

$$H_n \longrightarrow +\infty \text{ lorsque } n \longrightarrow +\infty.$$

b. Critère de Cauchy et de d'Alembert

Proposition 10 (Critère de d'Alembert¹)

Soit $((u_n))_n$ une série à termes positifs.

- Si il existe $0 < c < 1$ tel que $0 \leq u_{n+1}/u_n \leq c < 1$ la série $((u_n))_n$ converge.
- Si il existe $c > 1$ tel que $u_{n+1}/u_n \geq c \geq 1$ la série $((u_n))_n$ diverge.

La preuve donnée ici est simple et est représentative de beaucoup de raisonnements propres aux séries. L'idée est de comparer le terme général à celui des séries géométriques. Si $((u_n))_n$ était une série géométrique, la preuve serait finie : $u_{n+1}/u_n = \alpha$, la raison, et le critère sur les séries géométriques permet de conclure.

Preuve de (a) : Ici, puisque $u_{n+1} \leq cu_n$ pour tout n , on a :

$$0 \leq u_n \leq cu_{n-1} \leq c^2 u_{n-2} \leq \dots \leq c^n u_0.$$

¹Jean Le Rond d'ALEMBERT, français, 1717-1783

Ainsi, u_n est plus petit que le $n + 1^{\text{eme}}$ terme général de la série géométrique de premier terme u_0 et de raison c . La série $((u_n))_n$ converge donc d'après la Proposition 6.

Preuve de (b) : Ici, de même, on a :

$$u_n \geq cu_{n-1} \geq c^2u_{n-2} \geq \dots \geq c^n u_0.$$

u_n est supérieur au $n + 1^{\text{eme}}$ terme général de la série géométrique de premier terme u_0 et de raison c . La série $((u_n))_n$ diverge donc d'après la Proposition 6. On peut aussi remarquer que le terme général tend vers $+\infty$.

Proposition 11 (*Critère de Cauchy²*)

Soit $((u_n))_n$ une série à termes positifs. Si il existe un nombre $0 \leq c < 1$ tel que $0 \leq \sqrt[n]{u_n} \leq c$, la série $((u_n))_n$ converge.

Ici, il est intéressant de remarquer que même si u_n converge vers 0, $\sqrt[n]{u_n}$ peut ne pas converger vers 0. En fait, si u_n converge vers 0, à partir d'un moment, u_n est plus petit que 1. Donc $\sqrt[n]{u_n}$ aussi. Mais en fait, $\sqrt[n]{u_n}$ peut tendre vers 1. C'est uniquement ce cas qui est gênant ici.

Preuve : On compare encore la série $((u_n))_n$ à une série géométrique. Supposons que $0 \leq \sqrt[n]{u_n} \leq c < 1$. On a alors :

$$0 \leq \sqrt[n]{u_n} \leq c \iff 0 \leq (u_n)^{1/n} \leq c \iff 0 \leq u_n \leq c^n.$$

Si $c < 1$, la série $((u_n))_n$ est inférieure à une série géométrique de raison $c < 1$ qui converge. D'après la proposition 6, elle converge.

c. Séries absolument convergentes

Définition : La série $((u_n))_n$ est dite *absolument convergente* si la série $((|u_n|))_n$ est convergente.

On a la proposition fort utile suivante :

Proposition 12 *Si la série $((u_n))_n$ est absolument convergente alors elle est convergente.*

Preuve : La série $((u_n))_n$ peut être décomposée en deux parties : l'une ne contenant que des termes positifs $((u_n^+))_n$, l'autre de termes négatifs $((u_n^-))_n$ de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \text{si } u_n > 0 \quad \text{alors } u_n^+ &= u_n, \quad u_n^- = 0 \\ \text{si } u_n < 0 \quad \text{alors } u_n^+ &= 0, \quad u_n^- = u_n \end{aligned}$$

u_n^+ est une série à termes positifs, inférieure à u_n qui converge. Elle converge donc d'après la proposition 6. La série $((-u_n^-))_n$ converge exactement pour la même raison. Or, la série $((u_n))_n$ est égale à la somme des séries $((-u_n^-))_n$ et $((u_n^+))_n$. Elle converge donc et sa somme vaut la somme des sommes des deux séries $((u_n^-))_n$ et $((u_n^+))_n$.

Théorème 1 (Modification de l'ordre de sommation.)

Soit $((u_n))_n$ une série à termes positifs ou absolument convergente. En changeant l'ordre de sommation de la série $((u_n))_n$, on ne change pas le caractère convergent ou non de cette série. Si la série $((u_n))_n$ converge, sa somme est indépendante de l'ordre de sommation.

²CAUCHY Augustin Louis, français, 1789-1857

Ce théorème peut paraître au premier abord bizarre, évident, etc... Pourtant, il comporte l'hypothèse que la série doit être absolument convergente. Autrement dit, il ne peut pas être appliqué si la série est seulement convergente mais pas absolument convergente (on verra en TD qu'il existe beaucoup de séries comme ça). On sous-entend par là qu'il risque d'exister des cas, où changer l'ordre de sommation risque d'affecter la somme... ce qui déferait l'intuition ! C'est pourtant le cas, comme l'a mis en évidence Weierstrass³ :

Théorème 2 (*Weierstrass*)

Soit $((u_n))_n$ une série convergente mais non absolument convergente. En changeant l'ordre de sommation de la série, on peut obtenir comme somme n'importe quel nombre réel.

Il faut donc faire très attention lorsqu'on travaille avec des séries de ce genre. Une règle reste toutefois valable : si on ne change l'ordre de sommation que d'un nombre fini de termes, la somme de la série reste inchangée.

Voici, pour conclure ce paragraphe un exemple de série convergente mais non absolument convergente (on appelle ces séries semi-convergentes) :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n}$$

D. Séries alternées

Définition : La série $((u_n))_n$ est dite alternée si pour tout n , u_n et u_{n+1} sont de signes différents.

Théorème 3 Si $((u_n))_n$ est une série alternée et si la suite $|u_n|$ est décroissante et de limite nulle, alors la série $((u_n))_n$ converge et on a :

$$|S - S_n| \leq |u_{n+1}|.$$

De plus, S est comprise entre S_n et S_{n+1} .

Preuve : Pour plus de simplicité (et sans perdre de généralité) on va supposer que u_{2n} est positif pour tout n et que u_{2n+1} est négatif. L'idée ici est de regarder d'une part les sommes partielles d'ordre pair $(S_{2n})_n$ et d'autre part, les sommes partielles d'ordre impair $(S_{2n+1})_n$.

$$\begin{aligned} S_{2n+2} - S_{2n} &= u_{2n+2} + u_{2n+1} \\ S_{2n+1} - S_{2n-1} &= u_{2n+1} + u_{2n} \end{aligned}$$

Puisque $|u_n|$ est décroissante vers 0, $S_{2n+2} - S_{2n}$ est négatif, tandis que $S_{2n+1} - S_{2n-1}$ est positif. La suite $(S_{2n})_n$ est donc décroissante, tandis que $(S_{2n+1})_n$ est croissante. De plus, $S_{2n} - S_{2n-1} = u_{2n}$ qui est positif. Il s'ensuit que les deux suites $(S_{2n})_n$ et $(S_{2n+1})_n$ sont adjacentes et admettent donc la même limite S qui pour tout n est dans l'intervalle $[S_{2n+1}, S_{2n}]$. S est donc compris entre deux valeurs consécutives de S_n , et de plus $|S - S_n|$ est plus petit que la largeur de "l'intervalle" $[S_n, S_{n+1}]$ qui est $|u_{n+1}|$.

Théorème 4 (*Abel*⁴)

Soit $((u_n))_n$ une série telle que $u_n = a_n b_n$. Si

³WEIERSTRASS Karl Wilhelm Theodor, allemand, 1815-1897

⁴ABEL Niels Henrik, Norvégien, 1802-1829

- a_n est une suite positive, décroissante vers 0
- Il existe un réel B tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|b_0 + b_1 + \dots + b_n| \leq B,$$

alors la série $((u_n))_n$ converge.

(Admis)

Corollaire 3 Si a_n est une suite positive décroissante vers 0, toutes les séries du type $((a_n \sin(nx)))_n$ convergent.

Preuve : Dans ce cas, on a :

$$\begin{aligned} |b_0 + b_1 + \dots + b_n| &= |\sin(0) + \sin(x) + \dots + \sin(nx)| \\ &= |\operatorname{Im}(0 + e^{ix} + \dots + e^{inx})| \end{aligned}$$

Pour x multiple de 2π , ceci fait 0. En remarquant (pour x non multiple de 2π) que $e^{ix} + \dots + e^{inx}$ est la somme de termes en progression géométrique (de raison e^{ix}). On trouve :

$$\begin{aligned} |b_0 + b_1 + \dots + b_n| &= \left| \operatorname{Im} \left(e^{ix} \frac{1 - e^{inx}}{1 - e^{ix}} \right) \right| \\ &\leq 2 \left| \frac{1}{1 - e^{ix}} \right| \end{aligned}$$

On voit que $B = 2 \left| \frac{1}{1 - e^{ix}} \right|$ est un majorant pour tout n de $|b_0 + b_1 + \dots + b_n|$ (B est fini car x est non multiple de 2π). Le lemme d'Abel permet de conclure que $((a_n \sin(nx)))_n$ converge.

On a bien sûr le même genre de corollaire pour $a_n \cos(nx)$, $a_n e^{inx}$ à ceci prêt qu'il faut écarter les valeurs de x multiples de 2π .

E. Exercices

Exercice 1

Calculer les sommes des deux séries suivantes :

- a. $((u_n))_{n \geq 0}$ avec $u_n = 3 \times 4^{-n}$
b. $((u_n))_{n \geq 3}$ avec $u_n = \frac{3^n + 4^n}{7^n}$

Exercice 2

Le but de cet exercice est de comprendre pourquoi un nombre possédant un développement décimal périodique est rationnel (c'est-à-dire qu'on peut l'écrire sous la forme p/q avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$).

- a) Ecrire le nombre $x = 0,1717171717\dots$ sous forme de la somme d'une série ; puis exprimer cette somme sous forme d'un nombre rationnel.
b) Pourquoi tout nombre possédant un développement décimal périodique est-il rationnel ?
c) Voyons maintenant la réciproque. Pourquoi un rationnel possède-t-il un développement décimal périodique ?
d) Conclure.

Exercice 3

Décider lesquelles des séries suivantes de terme général u_n sont convergentes.

$$\left. \begin{array}{l} a. \quad u_n = \sin(n), \\ c. \quad u_n = \frac{3^n + 5}{4^n + n^2}, \end{array} \right\} \begin{array}{l} b. \quad u_n = 1 - \cos(1/n), \\ d. \quad u_n = \exp(-n^2 + 3n - 3) \end{array}$$

Exercice 4

Montrez que pour tout $n \geq 0$ on a :

$$\frac{1}{n+1} - \frac{2}{n+2} + \frac{1}{n+3} = \frac{2}{(n+1)(n+2)(n+3)}.$$

En déduire la valeur de la somme de la série $((u_n))_{n \geq 0}$ de terme général

$$u_n = \frac{2}{(n+1)(n+2)(n+3)}.$$

Exercice 5

Soit $((u_n))_{n \geq 1}$ la série de terme général :

$$u_n = \frac{(1 + 2 + 3 + \dots + n)}{n^4}.$$

Montrez par récurrence que $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. Que peut-on dire de la série $((u_n))_{n \geq 1}$?

Exercice 6

Etudiez le comportement des séries suivantes :

$$\left. \begin{array}{l} a. \quad u_n = \frac{3^n + n^4}{7^n}, \\ c. \quad u_n = n/(3^n - 1), \end{array} \right\} \begin{array}{l} b. \quad u_n = 2^{-\sqrt{n}}, \\ d. \quad u_n = n/(3n - 1) \end{array}$$

Exercice 7

On décidera parmi les séries suivantes lesquelles sont convergentes, absolument convergentes :

$$\begin{array}{l} a. \quad u_n = \frac{(-1)^n}{n^2+2}, \\ c. \quad u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+1}}, \\ e. \quad u_n = \frac{1}{\log n}, \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} b. \quad u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}, \\ d. \quad u_n = \frac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{n} \\ f. \quad u_n = \frac{1}{\log(1+2^n)} \end{array} \right.$$

Exercice 8

Trouver des fonctions continues et positives sur \mathbb{R}^+ telle que $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ et la série $\sum_{n=0}^{+\infty} f(n)$ ne soient pas de même nature.

Exercice 9

Répondre par vrai ou faux. Justifier :

- Si la série $((u_n))_{n \geq 0}$ est convergente il en est de même de la série extraite $((u_{2n}))_n$
- Si les séries $((u_n))_n$ et $((v_n))_n$ sont convergentes, la série $((u_n v_n))_n$ aussi.
- Si la série $((u_n))$ est convergente, la série $((u_n^2))_n$ l'est aussi.
- Si la série $((u_n))$ est absolument convergente, la série $((u_n^2))_n$ aussi.

Exercice 10

a. Montrer que lorsque $n \rightarrow +\infty$, la suite a_n définie par :

$$a_n = \sum_{j=1}^n |\cos(j)| 2^{-j}$$

converge vers une limite que l'on notera S .

b. Calculer un entier N pour lequel on est sûr que

$$|S - a_N| \leq 10^{-5}.$$

Exercice 11

Montrer que la série $((u_n))_{n \geq 1}$ de terme général

$$u_n = \frac{(-1)^n + \cos(n)}{\sqrt{n}}$$

converge.

Exercice 12

Soit $(a_n)_n$ une suite de réels positifs (strictement). On considère la suite $(P_k)_k$ définie par :

$$P_k = \prod_{i=0}^k a_i.$$

Montrer la proposition suivante :

la suite $(P_k)_k$ converge vers un réel $\neq 0 \Leftrightarrow$ la série de terme général $\log a_n$ converge

En déduire la convergence ou non des produits infinis

$$\prod_{i=2}^{+\infty} (1 - 1/i) \quad \text{et} \quad \prod_{i=1}^{+\infty} (1 - 1/i^2).$$

Exercice 13

On note (I) l'hypothèse suivante : $((u_n))_n$ est une série absolument convergente.
Montrer que la série $((u_n q^n))_n$ est convergente pour tout $|q| < 1$.
Affaiblir très fortement l'hypothèse (I) tout en conservant la conclusion

Exercice 14

Soit $((u_n))_n$ une série. Dégager le vrai du faux :

- Si les séries extraites $((u_{2n}))_n$ et $((u_{2n+1}))_n$ convergent, il en est de même de $((u_n))_n$.
- Si la suite $(u_n)_n$ converge vers 0, la série $((u_n))_n$ converge.
- Si une suite à tous ses termes nuls sauf un nombre fini d'entre eux, elle converge vers 0.
- Si la série $((u_n))_n$ converge, la suite de ses restes i.e. $(\sum_{k=n}^{+\infty} u_k)_n$ converge vers 0.
- Si une série $((u_n))_n$ est telle que la suite de ses restes $(\sum_{k=n}^{+\infty} u_k)_n$ converge vers 0, alors elle converge.
- Si $((u_n))_n$ et $((v_n))_n$ sont deux séries positives, convergentes, $((u_n v_n))_n$ aussi.

Chapitre III. Suites et Séries de Fonctions

A. Suites de Fonctions

a. Convergence simple

On rappelle qu'une suite numérique $(u_n)_{n \geq 0}$ est définie formellement comme étant une application de \mathbb{N} dans \mathbb{R} :

$$\begin{aligned} u : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longmapsto u_n. \end{aligned}$$

Soit A une partie de \mathbb{R} . Une suite de fonctions de A à valeurs dans \mathbb{R} est formellement une application de \mathbb{N} dans $\mathcal{F}(A, \mathbb{R})$, l'ensemble des fonctions de A dans \mathbb{R} :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathcal{F}(A, \mathbb{R}) \\ n &\longmapsto f_n. \end{aligned}$$

f_n est une fonction définie sur A , à valeurs dans \mathbb{R} .

Définition : Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies sur un ensemble $A \subset \mathbb{R}$ et à valeurs dans \mathbb{R} .

$$\begin{aligned} f_n : A &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f_n(x). \end{aligned}$$

On dit que la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge simplement sur A , si pour tout $x \in A$, la suite numérique $(f_n(x))_n$ converge. Dans ce cas, on peut définir une fonction limite f par :

$$\begin{aligned} f : A &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x). \end{aligned}$$

On note communément :

$$f = \lim_n f_n.$$

Les techniques pour prouver la convergence simple d'une suite de fonctions sont les techniques habituelles et propres aux suites numériques. En effet, la suite $(f_n(x))_n$ est une suite de réels. x peut être vu comme un paramètre de la suite.

Exemples : • Soit $(f_n)_n$ la suite de fonctions définie pour tout $n > 0$ sur $[-5, 5]$ par :

$$f_n(x) = x^2 + \frac{\cos(nx)}{n}.$$

Alors la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge simplement et à pour limite la fonction f , définie sur $[-5, 5]$ par $f(x) = x^2$.

En effet, soit x quelconque et fixé appartenant à $[0, 1]$.

$$\lim_n f_n(x) = \lim_n x^2 + \frac{\cos(nx)}{n} = x^2,$$

car $\cos(nx)$ est borné (en valeur absolue) par 1.

• Soit $(f_n)_n$ la suite de fonctions définies sur \mathbb{R} par $f_n(x) = x^n$. La suite $(f_n)_n$ ne converge pas simplement sur \mathbb{R} . En effet, pour $|x| > 1$, la suite $(f_n(x))_n$ diverge (en fait, elle converge simplement

sur $] - 1, 1[$).

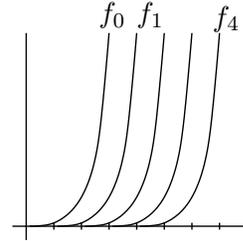
Propriétés

- La limite simple d’une suite de fonctions croissantes et croissante
- La limite simple d’une suite de fonctions paires et paire.

(Voir TD) En fait, la convergence simple de fonctions, sans autres hypothèses, ne possède pour ainsi dire aucune propriété. Par exemple, prenons $(f_n)_n$ une suite de fonctions continues et même C^∞ convergeant simplement vers une fonction f sur un compact $([0,1])$. Sous ces seules hypothèses, la limite f peut très bien ne pas être continue. Il est également tout à fait possible que la suite $(\int_0^1 f_n(x)dx)_n$ ne converge pas vers $\int_0^1 f(x)dx$ (voir TD).

Remarque :

La “faiblesse” de la convergence simple réside dans le fait qu’elle est juste une convergence points par points. De ce fait, la “distance” entre f_n et f ne converge pas forcément à la même vitesse vers 0 pour tous les points x . On donne ci-dessous un exemple d’une suite de fonctions $(f_n)_n$ qui converge simplement vers $f \equiv 0$ sur \mathbb{R} mais telle que chacune des fonctions f_n est très loin de valoir 0 partout. On considère la suite de fonctions f_n définie par :



$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq n \\ \exp(x - n) - 1 & \text{si } x > n \end{cases}$$

Et soit f la fonction identiquement nulle sur \mathbb{R} :

$$f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Les fonctions f_n sont croissantes et tendent toutes vers $+\infty$ en $+\infty$. Pourtant $f_n \xrightarrow{\text{simplement}} f \equiv 0$. Avec cet exemple, on voit que si $x < n$, $(f_n(x))_n$ a déjà atteint sa limite qui est 0, alors que ce n’est pas du tout le cas, sinon.

On définit alors un autre type de convergence pour les suites de fonctions en imposant une vitesse minimale de convergence pour tout les x , uniformément. Il s’agit de la :

b. Convergence uniforme

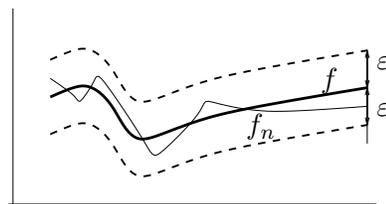
Définition : Soient A une partie de \mathbb{R} et $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies de A et à valeurs dans \mathbb{R} . On dira que la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers la fonction f si :

$$\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

On rappelle que la norme infinie (on dit aussi norme de la convergence uniforme) d’une fonction g définie de A dans \mathbb{R} est définie par :

$$\|g\|_\infty = \sup_{x \in A} \{|g(x)|\}.$$

Reformulons, par des quantificateurs, la définition de la convergence uniforme : $(f_n)_n$ converge uniformément vers la fonction f si :



$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \text{ tel que } \forall n \geq N, \|f_n - f\|_\infty \leq \epsilon.$$

Ainsi, si on fixe un $\varepsilon > 0$ quelconque, pour un n assez grand, pour tout x , $f_n(x)$ et $f(x)$ seront au plus distant de ε (penser à ε tout petit). Le dessin ci-contre rend compte de cette situation. f_n finit par se retrouver dans un “tube” de largeur ε autour de f .

Il s’ensuit toutes les propriétés de la convergence uniforme : l’aire sous la fonction f_n converge vers celle sous la fonction f (sur un compact, en tout cas). Si f_n est continue pour tout n , f aussi... En effet, comment f pourrait-elle présenter un saut en étant si proche de fonctions qui n’en ont pas ?

La convergence uniforme est une convergence beaucoup plus forte que la convergence simple. On a par exemple, la proposition suivante :

Proposition 1 *Si la suite de fonctions $(f_n)_n$, définies sur A , converge uniformément vers la fonction f alors $(f_n)_n$ converge simplement vers la fonction f sur l’ensemble A*

Preuve : On doit simplement prouver que pour un $x \in A$, $(f_n(x))_n$ converge (comme suite en n) vers $f(x)$. Or :

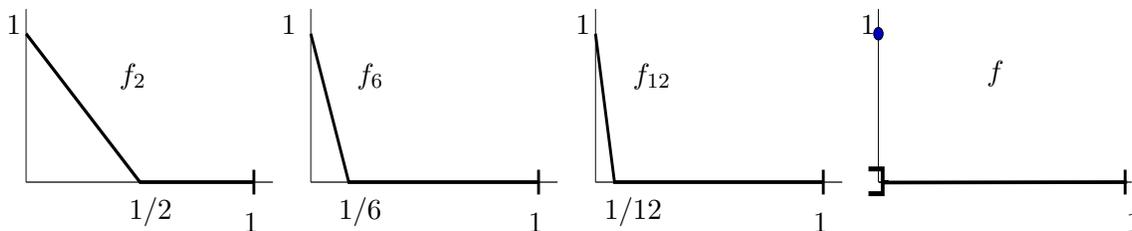
$$|f_n(x) - f(x)| \leq \sup_{t \in A} \{|f_n(t) - f(t)|\} = \|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0. \quad \square$$

Proposition 2 *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions continues convergeant uniformément vers une fonction f . Alors la fonction f est continue.*

Rappelons que ce n’est pas nécessairement le cas dans le cas de la convergence simple. Sur le dessin, ci-dessous, on a dessiné les premiers termes de la suite de fonctions $(f_n)_n$ définie par :

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [1/n, 1] \\ 1 - nx & \text{si } x \in [0, 1/n] \end{cases}$$

Chacune des fonctions f_n est continue. La limite quant à elle, ne l’est pas, puisque la suite $(f_n)_n$ converge vers la fonction f valant 0 pour $x \in]0, 1]$ et 1 pour $x = 0$. Bien sûr, dans cet exemple, la



suite f_n ne converge pas uniformément vers la fonction f . Sinon, la limite serait continue d’après notre proposition.

Preuve de la proposition 2 : On va utiliser la caractérisation suivante des fonctions continues : Une fonction f est continue en x_0 si pour toute suite de réels $(y_n)_n$ convergeant vers x_0 , on a :

$$\lim_n f(y_n) = f(\lim_n y_n) = f(x_0).$$

On prend donc un x_0 quelconque dans A , ainsi qu’une suite quelconque $(y_n)_n$ de A qui converge vers x_0 . Montrons que sous les hypothèses de la proposition 2, on a :

$$|f(y_k) - f(x_0)| \longrightarrow 0.$$

On a, par l’inégalité triangulaire, pour tout n :

$$|f(y_k) - f(x_0)| \leq |f(y_k) - f_n(y_k)| + |f_n(y_k) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)|. \quad (1)$$

Occupons nous du membre de droite de (1). Les arguments sont les suivants :

- Les deux termes extrémaux convergent vers 0, lorsque n tend vers $+\infty$ car la suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers f .

- Le terme du milieu converge vers 0 lorsque $k \rightarrow +\infty$ puisque f_n est continue.

Le problème est qu'il est difficile de faire tendre k et n vers $+\infty$ en même temps. Il faut donc être un peu plus soigneux, ici : soit $\varepsilon > 0$ quelconque. On choisit N tel que $\forall n > N$:

$$\|f_n - f\|_\infty < \varepsilon/4,$$

ce qui est possible car $f_n \rightarrow f$ unif.. Pour $n > N$, la somme des deux termes extrémaux est bornée par $\varepsilon/2$. On fixe donc un tel n . Puisque f_n est continue en x_0 , il existe un K tel que $k > K$ implique

$$|f_n(y_k) - f_n(x_0)| \leq \varepsilon/2.$$

La somme de droite de (1) est donc plus petite que ε si k est assez grand. On peut prendre ε aussi petit que l'on veut et refaire le même raisonnement. Le membre de gauche de (1) converge donc vers 0 lorsque k tend vers $+\infty$. \square

Proposition 3 (*Interversion de la limite et du signe \int*)

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies sur un compact $[a, b]$ de \mathbb{R} et à valeur dans \mathbb{R} convergeant uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction f . On a :

$$\lim_n \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \lim_n f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

Preuve :

$$\left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| = \left| \int_a^b f_n(x) - f(x) dx \right| \leq \int_a^b \|f_n - f\|_\infty dx = (b - a) \|f_n - f\|_\infty.$$

Ce dernier terme converge vers 0 puisque $(f_n)_n$ converge vers f uniformément. Remarquons que le fait que $b - a$ est fini est utilisé dans cette preuve. La proposition reste valable si l'intervalle a, b est ouvert avec $-\infty < a < b < +\infty$. Par contre, si a ou b est infini, la conclusion de cette proposition n'est plus garantie.

B. Séries de Fonctions

Définition : Soit $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite de fonctions réelles ou complexes définies sur un intervalle I de \mathbb{R} . La suite de ses *sommes partielles* $(S_n)_n$ est définie par

$$S_k = \sum_{i=0}^k f_i.$$

Attention, ici S_k est une fonction :

$$S_k(x) = \sum_{i=0}^k f_i(x), \text{ pour tout } x \in I.$$

La série de terme général f_n , notée

$$((f_n))_n$$

est par définition le couple formé par les deux suites $(f_n)_n$ et $(S_n)_n$.
Ainsi, pour tout x , la série $((f_n(x)))_n$ est une série numérique standard.

Définition : (Convergence simple) On dit que la série de fonction $((f_n))_n$ converge simplement sur I , si pour tout $x \in I$, la série numérique standard $((f_n(x)))_n$ converge.

Dans le cas où $((f_n))_n$ converge simplement, la fonction S définie pour tout $x \in I$ par

$$S(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n f_k(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x),$$

est appelée somme de la série.

La convergence simple de la série $((f_n))$ est équivalente à la convergence simple de la suite $(S_n)_n$.

Définition : (Convergence uniforme) Soit $((f_n))_n$ une série de fonctions de limite (simple) S sur un intervalle I . On dit que la série $((f_n))_n$ converge uniformément vers S si la suite des (fonctions) sommes partielles $(S_n)_n$ converge uniformément vers S .

$$S_n = f_0 + \dots + f_n.$$

$$((f_n)) \xrightarrow{Unif.} S \Leftrightarrow \|S_n - S\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

La convergence uniforme de la série $((f_n))$ est équivalente à la convergence uniforme de la suite de fonctions $(S_n)_n$.

La convergence uniforme est toujours aussi intéressante, puisque tous les théorèmes valables pour les suites de fonctions le sont encore ici (la suite $(S_n)_n$ est une suite de fonctions !); mais, il n'est pas toujours aisé d'obtenir la convergence uniforme directement. Souvent, on l'obtient comme corollaire de la convergence normale :

Définition : (Convergence normale) La série $((f_n))$ définie sur un intervalle I est dite normalement convergente si la série numérique

$$((\|f_n\|_\infty))_n$$

est convergente. Cette convergence est relativement exigeante. Pour que la convergence soit normale il faut que les maxima des fonctions f_n soient sommables. On s'interdit donc a priori les phénomènes de compensation type séries alternées.

Exemples : • Soit $((f_n))_{n \geq 1}$ la série de terme général f_n défini pour tout $n \geq 1$ sur $[0, 1]$ par :

$$f_n(x) = x/n^2 + 1/n^3.$$

f_n est croissante sur $[0, 1]$ et atteint son maximum $1/n^2 + 1/n^3$ en 1. Donc, on a $\|f_n\|_\infty = 1/n^2 + 1/n^3$. La série $((\|f_n\|_\infty))_n$ converge. La convergence est donc normale.

• Soit $((f_n))_{n \geq 1}$ la série de terme général f_n défini sur $[0, 1]$ par :

$$f_n(x) = (-1)^n \frac{x}{n}.$$

La série $((f_n))$ converge simplement puisque, pour tout $x \in [0, 1]$, la série $(((-1)^n \frac{x}{n}))_n$ est une série alternée. Par contre, elle ne converge pas normalement : $\|f_n\|_\infty = 1/n$, valeur atteinte pour $x = 1$. La série $((\|f_n\|_\infty))_n$ diverge.

Proposition 4 Si une série de fonctions converge normalement, alors elle converge uniformément, et donc elle converge simplement.

Preuve : La somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \|f_n\|_\infty$ converge par hypothèse. De ce fait, la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} |f_n(x)|$ aussi puisque chacun de ses termes est majoré par $\|f_n\|_\infty$. Ainsi, la série $((f_n(x)))$ converge absolument et donc simplement. Notons S sa limite. Puisque $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = S(x)$, on a :

$$\left\| \sum_{n=0}^N f_n(x) - S(x) \right\|_\infty = \left\| \sum_{n=N+1}^{+\infty} f_n(x) \right\|_\infty \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} \|f_n(x)\|_\infty$$

ce dernier terme converge vers 0 car c'est le reste d'une série convergente. Les sommes partielles convergent donc uniformément. \square

Proposition 5 Si la série $((f_n))_n$ converge uniformément vers la fonction S sur un intervalle $[a, b]$ alors :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \int_a^b f_k(x) dx = \int_a^b \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x) dx = \int_a^b S(x) dx.$$

Preuve : Ceci découle tout simplement du fait que la convergence est uniforme. \square

Remarque : En pratique, comment montre-t-on la convergence normale ou simple d'une série de fonctions ? Pour la convergence simple, on doit montrer que la série $((f_n(x)))_n$ converge. Il s'agit d'une série numérique classique ; on peut utiliser tous les critères propres aux séries numériques. Pour la convergence normale, il faut montrer que la série $((\|f_n\|_\infty))_n$ converge. C'est également une série numérique classique. Le plus dur est souvent de trouver une bonne borne pour $\|f_n\|_\infty$. Puisque la convergence normale implique la convergence uniforme, on a :

Proposition 6 Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions continues. Si la série $((f_n))_n$ converge uniformément vers une fonction S , S est continue.

Preuve : Si on considère la somme partielle S_k . C'est une fonction continue, comme somme de fonctions continues. On passe à la limite grâce à la proposition 2.

Proposition 7 (Dérivée d'une série de fonctions)

Soit $((f_n))_n$ une série de fonctions continûment dérivables sur un intervalle I ; supposons que

- la série de fonctions $((f'_n))_n$ est uniformément convergente
- il existe $x_0 \in I$, telle que la série $((f_n(x_0)))_n$ soit convergente,

alors la série de terme général $((f_n))_n$ converge et sa limite S est dérivable sur I et on a :

$$S' = \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n.$$

Preuve (un peu difficile) : Soit $x \in I$. Posons $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n(x)$. Cette série converge uniformément par hypothèse sur l'intervalle $[x, x_0]$. D'après la proposition 5, on a

$$\left| \int_{x_0}^x g(t) dt - \int_{x_0}^x \sum_{j=0}^n f'_j(t) dt \right| \longrightarrow 0.$$

Réécrivons le terme de droite :

$$\int_{x_0}^x \sum_{j=0}^n f'_j(t) dt = \sum_{j=0}^n \int_{x_0}^x f'_j(t) dt = \sum_{j=0}^n [f_j(t)]_{x_0}^x = \sum_{j=0}^n f_j(x) - f_j(x_0) = \sum_{j=0}^n f_j(x) - \sum_{j=0}^n f_j(x_0).$$

On obtient donc :

$$\left| \left(\int_{x_0}^x g(t) dt + \sum_{j=0}^n f_j(x_0) \right) - \sum_{j=0}^n f_j(x) \right| \rightarrow 0.$$

Pour tout x , la suite $\left(\sum_{j=0}^n f_j(x) \right)_n$ converge vers $\int_{x_0}^x g(t) dt + \sum_{j=0}^{+\infty} f_j(x_0)$ qui est une fonction dérivable en x . A la limite, pour tout x , on a :

$$\sum_{j=0}^{+\infty} f_j(x) = \int_{x_0}^x g(t) dt + \sum_{j=0}^{+\infty} f_j(x_0).$$

$\sum_{j=0}^{+\infty} f_j(x)$ est donc dérivable (car égale à une fonction dérivable!) et a pour dérivée $g(x)$. La convergence en x_0 est nécessaire car une fonction n'est pas définie par sa seule dérivée; un "point d'attache" est nécessaire.

C. Série entières

L'étude des séries entières et de leurs très nombreuses propriétés nécessiterait au bas mot un trimestre... On se "contentera" ici de quelques mots...

Définition : On appelle série entière une série de fonctions $((f_n))_n$ où f_n s'exprime sous la forme

$$f_n(x) = a_n x^n;$$

$(a_n)_n$ est une suite de réels. Autrement dit, f_n est un monôme de degré n .

a. Rayon de convergence

Définition : Le rayon de convergence R d'une série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est la borne supérieure de l'ensemble des $r \geq 0$ pour lesquels $\sum_n |a_n| r^n$ converge. C'est un élément de $[0, +\infty]$.

Le disque de convergence de $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est le disque de centre 0 et de rayon R . Cette définition est valable pour les séries entières dans \mathbb{C} . Le disque $\mathcal{D}(0, R)$ dans \mathbb{R} est tout simplement l'intervalle ouvert $] -R, R[$.

Proposition 8 Soit R le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Supposons $0 \leq R \leq +\infty$.

a. Pour chaque x , $|x| < R$, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ converge absolument.

b. Pour chaque x , $|x| > R$, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ diverge.

Proposition 9 Une série entière est continue dans son disque de convergence. Elle est également dérivable dans son domaine de convergence et de plus, sa dérivée s'obtient en dérivant la série d'origine terme à terme :

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1}.$$

Les séries entières apparaissent relativement souvent dans la nature car la plupart des fonctions simples peuvent s'exprimer sous la forme de série entière.

b. Détermination du rayon de convergence

La plupart des méthodes se réfèrent aux critères propres aux séries.

L'idée est de comparer $u_n = |a_n|R^n$ à $u_{n+1} = |a_{n+1}|R^{n+1}$.

Par exemple, le critère de Cauchy dit que si $0 < u_{n+1}/u_n < c \leq 1$, la série converge. Or

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}R$$

On prend pour R le plus grand nombre tel que cette quantité soit plus petite que 1 (en $+\infty$). On obtient la formule

$$R = \lim_n \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$$

lorsque cette limite existe.

D. Exercices

Exercice 1

Soit $(f_n)_n$ la suite définie par

$$f_n : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^n.$$

Montrer que les fonctions f_n sont continues, \mathcal{C}^∞ .

Montrer que les f_n convergent simplement. Identifier la limite. La limite est-elle continue ? Dérivable ?

La convergence est-elle uniforme ?

Exercice 2

Etudier la convergence simple et uniforme des fonctions suivantes :

a. $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \cos(nx)$

b. $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \cos(nx)/n$

c. $f_n : [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{nx}{(1+nx)}$

d. $f_n : [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{nx^3}{1+nx^2}$

e. $f_n :]-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{x^n - 1}{x^n + 1}$

f. $f_n : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \ln(1 + x/n)$

Exercice 3

Soit $(f_n)_n$ la suite de fonctions définie sur $[0, 1]$ par :

$$f_n : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} n^2x & \text{si } 0 \leq x \leq 1/n \\ -n^2x + 2n & \text{si } 1/n \leq x \leq 2/n \\ 0 & \text{si } 2/n \leq x \leq n. \end{cases}$$

a. Donner l'allure générale de f_n .

b. Montrez que f_n converge simplement vers une fonction f que l'on identifiera. La convergence est-elle uniforme ?

c. Calculer $\int_0^1 f_n(x)dx$, ainsi que $\int_0^1 f(x)dx$. Conclure.

Exercice 4

Soit f et g deux fonctions définies sur un ensemble A et à valeurs dans \mathbb{R} .

a. Montrer que $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$

b. En déduire que si λ et μ sont deux réels, $\|\lambda f + \mu g\|_\infty \leq |\lambda| \|f\|_\infty + |\mu| \|g\|_\infty$

c. Montrez que la suite de fonctions $(g_n)_n$ définie sur $[0, 1]$ par

$$g_n(x) = xe^{-nx}$$

converge uniformément sur $[0, 1]$.

d. Montrez que la suite de fonctions $(f_n)_n$ définie sur $[0, 1]$ par

$$f_n(x) = xe^{-nx} + \frac{x^2 \tan x}{n} + 1$$

converge uniformément sur $[0, 1]$.

Exercice 5

Soit g une fonction définie sur $[0, 2]$.

a. Montrer que

$$\sup\{|g(x)|, 0 \leq x \leq 2\} \geq \sup\{|g(x)|, 0 \leq x \leq 1\}.$$

Enoncer une propriété générale valable sur deux ensembles A et B

b. En déduire que si (f_n) est une suite de fonctions convergeant uniformément sur $[0, 2]$, elle converge uniformément aussi sur $[0, 1]$.

La réciproque est-elle encore vraie ?

Exercice 6

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies sur \mathbb{R} , convergeant simplement vers une fonction f . Répondre par vrai ou faux. Justifier.

a. Si les fonctions f_n sont croissantes alors f est croissante.

b. Si les fonctions f_n sont paires alors f est paire

c. Si les fonctions f_n sont continues f est continue ?

d. Si les fonctions f_n sont dérivables f est dérivable ?

Supposons maintenant que les f_n sont définies sur $[0, 1]$.

e. La longueur de la courbe $\{(x, f_n(x)), x \in [0, 1]\}_n$ converge vers celle de $\{(x, f(x)), x \in [0, 1]\}$.

Exercice 7

Etudier la convergence simple, uniforme et normale des séries de fonctions suivantes $((f_n))$:

a. $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \cos(nx), n \geq 0$

b. $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \cos(nx)/n, n \geq 1$

c. $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \cos(nx)/n^2, n \geq 1$

d. $f_n : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{nx}{(1+nx)}, n \geq 1$

e. $f_n : [1, 12] \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{(-1)^n}{\log n} x, n \geq 2$

f. $f_n : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{(-1)^n}{\log n} x, n \geq 2$

g. $f_n : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = xe^{-n^2x}, n \geq 0$

Exercice 8

Soit $((f_n))_{n \geq 1}$ la série définie par :

$$f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{sur } [n, n+1[\\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

a. Montrer que la série $((f_n))$ converge uniformément.

b. Montrer que la série $((f_n))$ ne converge pas normalement.

Exercice 9

a. Donner un exemple de suite de fonctions $((g_n))$ convergeant uniformément vers une fonction g , mais telle que $\lim_n \int g_n(x) dx \neq \int g(x) dx$

b. En déduire une série de fonctions $((f_n))_n$ convergeant uniformément, dont les sommes partielles S_k (et la somme S) vérifient $\lim_k \int S_k(x) dx \neq \int S(x) dx$

Exercice 10

a. Etudier la convergence simple, uniforme, normale de la série de fonctions $((f_n))_{n \geq 1}$ définie par :

$$f_n : \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^n$$

- b. Sur quels intervalles peut-on étendre ces résultats ?
c. Montrer que la somme de la série est continue sur $] -1, 1[$.

Exercice 11

Soit $((f_n))_{n \geq 1}$ la série de fonctions de terme général :

$$f_n : \left[0, \frac{1}{2}\right] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto nx^{n-1}$$

- a. Montrer que la série $((f_n))$ est normalement convergente.
On note S sa somme.
b. Calculer $\int_0^{1/2} S(t) dt$.
c. Calculer $\int_0^a S(t) dt$ pour $0 < a < 1$.
d. En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} na^{n-1}$.

Exercice 12

- a. Soit $((f_n))_{n \geq 1}$ la série de fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} de terme général $f_k(t) = \frac{\sin^k(t)}{k2^k}$
Calculer la somme de cette série.
b. Soit $((f_n))_{n \geq 1}$ la série de fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} de terme général $f_k(x) = \frac{e^{-kx}}{k}$:
- Trouver l'ensemble E des points sur lesquels la série $((f_n))_{n \geq 0}$ converge simplement.
- Montrer que la série $((f_n))_n$ converge normalement dans tout intervalle $[a, b] \subset E$.

On rappelle que dans le cas des séries entières, la convergence de la série est uniforme (et même normale) dans tout compact $[a, b]$ inclu dans $] -R, R[$, R étant le rayon de convergence.

SÉRIES ENTIÈRES

Exercice 13

Donner le rayon de convergence. Préciser le domaine de convergence.

$$a. \sum_{k \geq 1} \frac{x^k (-1)^k}{k} \qquad b. \sum_{k \geq 1} k(k+1)x^k \\ c. \sum_{k \geq 1} k^k x^k \qquad d. \sum_{k \geq 1} \frac{k^k}{k!} x^k$$

Exercice 14

On considère la série entière $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$.

- Pour $x \in [-1, 1]$, converge-t-elle simplement ? uniformément ? normalement ?
- Sa somme est-elle continue sur $[-1, 1]$?
- Calculer sa somme pour $x \in [-1, 1]$.

Exercice 15

Calculer les séries suivantes après avoir indiqué le domaine de convergence :

$$a. \sum_{k \geq 1} kx^k \qquad b. \sum_{k \geq 1} k(k+1)x^k \qquad c. \sum_{k \geq 1} k^2x^k$$

Exercice 16

Les séries entières servent également à résoudre certaines équations différentielles :

- Soit (E) l'équation différentielle d'inconnue $x \mapsto y(x)$ suivante :

$$(E) \quad \begin{cases} 2xy(x) + y'(x) & = 0 \\ y(0) & = 1 \end{cases}$$

- En supposant qu'il existe une série entière

$$y(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$$

solution de cette équation, caractériser les coefficients a_k .

- Trouve-t-on ainsi toutes les solutions de cette équation ?
- Quels sont les rayons de convergence ?

- Mêmes questions avec l'équation

$$(E') \quad (1 + 4x^2)y''(x) - 8y(x) = 0$$

Chapitre IV. Séries de Fourier

Les séries trigonométriques sont des séries de fonctions dont le terme général s'écrit sous la forme $a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)$ ou encore $c_n e^{int}$. Fourier¹, entre autres, a découvert que sous des hypothèses relativement faibles, toute fonction périodique peut s'écrire comme limite de telle série. Autrement dit, on peut décomposer une fonction périodique (suffisamment régulière) sous la forme d'une somme infinie de fonction cosinus et sinus. Ce chapitre a pour but de donner ces hypothèses et de montrer comment on calcule les coefficients, a_n et b_n ou c_n en fonction de la fonction f que l'on cherche à décomposer.

A. Fonctions périodiques

Définition : Soit f une fonction de \mathbb{R} et à valeurs dans \mathbb{R} . On dit que T est une période de f si $f(T+x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Si une fonction est T -périodique, elle est également $-T, 2T, 3T, kT (k \in \mathbb{N})$ périodique. Si $T > 0$ est la plus petite période positive de f , T est appelé période fondamentale de f . Une fonction est non périodique si sa seule période est 0.

Lemme 1

- La somme et le produit de fonctions T -périodique est une fonction T -périodique.
- Lorsqu'elle existe, la limite simple de fonctions T -périodiques est une fonction T -périodique.

Preuve laissée en exercice. Remarquons tout de même que T n'est pas nécessairement la plus petite période de la somme, du produit ou de la limite, même si elle l'était des fonctions ajoutées, multipliées ou dont on prend la limite.

Changement de période : Si f est T périodique alors la fonction $x \mapsto f(ax)$ est T/a périodique ($a \neq 0$). En effet $f(a(x+T/a)) = f(ax+T) = f(ax)$.

La suite du cours, par commodité, est consacrée aux fonctions de période 2π . Grâce au changement de période, tous les résultats qui seront établis peuvent bien sûr être étendu à toute fonction périodique de période $\neq 0$.

Proposition 1 Si f est une fonction T -périodique et dérivable alors sa fonction dérivée est T -périodique.

Preuve : Il suffit de remarquer que pour tout x_0 ,

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \frac{f(x_0+T+h) - f(x_0+T)}{h}$$

et donc que la dérivée en x_0 et en x_0+T sont égales, quel que soit x_0 .

Lemme 2 Si f est une fonction réglée périodique de période $T > 0$, le nombre

$$M = \frac{1}{T} \int_a^{a+T} f(x) dx$$

est indépendant du choix de a mais aussi de choix de T parmi les périodes non nulles de f .

¹FOURIER Jean Baptiste Joseph, français, 1768-1830

M est appelé valeur moyenne de f sur une période.

Remarque : La primitive d'une fonction périodique n'est pas nécessairement périodique : par exemple, $f : x \mapsto 1$ est périodique de période 0 (tous les réels sont des périodes de f). Les primitives de f sont les fonctions du type $x \mapsto x + \text{const}$ qui ne sont pas périodiques.

Par contre, si la valeur moyenne de f sur une période est nulle, les primitives de f sont périodiques, car

$$F(T+x) - F(x) = \int_x^{T+x} f(t)dt = 0.$$

B. Polynômes et séries trigonométriques

a. Polynômes trigonométriques réels

Définition : On appelle polynôme trigonométrique réel de degré inférieur ou égal à n toute combinaison linéaire des fonctions $t \mapsto \cos(kt)$ et $t \mapsto \sin(kt)$ avec $0 \leq k \leq n$. Une telle combinaison s'écrit :

$$t \mapsto S_n(t) = \sum_{k=0}^n (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)),$$

où les nombres a_k et b_k sont des réels pouvant être nuls.

Un espace vectoriel de fonctions : Notons $\mathcal{E}_n^{\mathbb{R}}$ l'ensemble des polynômes trigonométriques réels de degré inférieur ou égal à n à coefficients réels. $\mathcal{E}_n^{\mathbb{R}}$ est un ensemble de fonctions qui est un espace vectoriel. C'est à dire que l'on peut voir les éléments de $\mathcal{E}_n^{\mathbb{R}}$ (autrement dit les polynômes trigonométriques) comme des vecteurs. Ce point de vue est fondamental pour l'analyse de Fourier, où l'algèbre linéaire et la géométrie constituent des outils d'étude particulièrement efficaces.

Lemme 3 $\mathcal{E}_n^{\mathbb{R}}$ est un espace vectoriel.

Preuve : En fait, $\mathcal{E}_n^{\mathbb{R}}$ est un sous ensemble de l'espace des applications de \mathbb{R} dans \mathbb{R} qui est un espace vectoriel. Il suffit donc de montrer que toute combinaison linéaire de deux éléments de $\mathcal{E}_n^{\mathbb{R}}$ est encore dans $\mathcal{E}_n^{\mathbb{R}}$. On considère donc P_n et Q_n deux éléments de $\mathcal{E}_n^{\mathbb{R}}$. P_n et Q_n , en tant que fonctions de t , s'écrivent :

$$P_n(t) = \sum_{k=0}^n (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)), \quad Q_n(t) = \sum_{k=0}^n (\tilde{a}_k \cos(kt) + \tilde{b}_k \sin(kt)).$$

Soit λ et μ deux réels. Montrons que $\lambda P_n + \mu Q_n \in \mathcal{E}_n^{\mathbb{R}}$:

$$\begin{aligned} (\lambda P_n + \mu Q_n)(t) &= \lambda \sum_{k=0}^n (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)) + \mu \sum_{k=0}^n (\tilde{a}_k \cos(kt) + \tilde{b}_k \sin(kt)) \\ &= \sum_{k=0}^n ((\lambda a_k + \mu \tilde{a}_k) \cos(kt) + (\lambda b_k + \mu \tilde{b}_k) \sin(kt)). \quad \square \end{aligned}$$

Lemme 4 La famille $F_n = \{t \mapsto 1/\sqrt{2}, t \mapsto \cos(kt), t \mapsto \sin(kt), 1 \leq k \leq n\}$ est une base de $\mathcal{E}_n^{\mathbb{R}}$.

Preuve très importante : Le fait que la famille F_n engendre $\mathcal{E}_n^{\mathbb{R}}$ ne fait pas de doute, puisque $\mathcal{E}_n^{\mathbb{R}}$ est justement, par définition, l'ensemble des fonctions engendrées par F_n . Il reste à montrer que la famille F_n est libre, c'est à dire que

$$\text{si } \sum_{k=0}^n a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt) = 0, \text{ pour tout } t \in [0, 2\pi]$$

alors tous les a_k et tous les b_k sont nuls. La démonstration donnée ici nécessite un argument “géométrique” et augure des méthodes et arguments qui seront utilisés par la suite.

un produit scalaire sur l’espace vectoriel $\mathcal{E}_n^{\mathbb{R}}$

si f, g sont deux fonctions de $\mathcal{E}_n^{\mathbb{R}}$, le produit scalaire $\langle f, g \rangle$ est défini par :

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx.$$

Ce produit scalaire a les mêmes propriétés que le produit scalaire entre vecteurs “géométriques usuels”. C’est à dire que le produit scalaire est à valeur dans \mathbb{R} , il est linéaire en f et en g , il ne change pas si l’on interchange f et g . On dit que c’est une forme bilinéaire symétrique, plus formellement :

$$\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle, \quad \langle \lambda f + \mu g, h \rangle = \langle h, \lambda f + \mu g \rangle = \lambda \langle f, h \rangle + \mu \langle g, h \rangle. \quad (1)$$

Ce produit scalaire induit une orthogonalité entre fonctions :

deux fonctions f et g sont dites orthogonales si

$$\langle f, g \rangle = 0.$$

Remarque : Pour prouver que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire, on doit aussi prouver que si $\langle f, f \rangle = 0$ alors $f = 0$, c’est à dire, $f(t) = 0$ pour tout t . Or $\langle f, f \rangle = \int_0^{2\pi} f^2(t)dt$; si f est un polynôme trigonométrique de $\mathcal{E}_n^{\mathbb{R}}$ alors f est une fonction continue. Si $\int_0^{2\pi} f^2(t)dt = 0$ c’est que f est nulle. En général on a seulement : $\langle f, f \rangle = 0$ implique que f est nulle presque partout (en gros, sauf sur un “petit” ensemble de points).

Lemme 5 Les $2n + 1$ fonctions de la famille F_n sont orthogonales entre elles.

Preuve : • $\langle \sin(nx), \cos(mx) \rangle = 0$ pour tout $n \geq 1$ et $m \geq 0$. ($m = 0$ correspond à la fonction $t \mapsto 1/\sqrt{2}$).

Ceci provient du fait que l’on peut intégrer sur $[-\pi, \pi]$ sans changer le résultat et que $x \mapsto \sin(nx) \cos(mx)$ est une fonction impaire.

• $\langle \sin(nx), \sin(mx) \rangle = 0$ si $m \neq n$ et $\langle \sin(nx), \sin(mx) \rangle = 1$ si $m = n$

$$\begin{aligned} \langle \sin(nx), \sin(mx) \rangle &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin(nx) \sin(mx) dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(nx - mx) - \cos(nx + mx) dx, \end{aligned}$$

ceci car $\sin(a) \sin(b) = \frac{1}{2}(\cos(a - b) - \cos(a + b))$. Cette dernière intégrale est nulle si $n \neq m$ car $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(kx) dx = 0$ si $k \in \mathbb{N}^*$ et vaut 1 si $k = 0$.

De même, on a :

• $\langle \cos(nx), \cos(mx) \rangle = 0$ si $m \neq n$ et $\langle \cos(nx), \cos(mx) \rangle = 1$ si $m = n$

En effet :

$$\begin{aligned} \langle \cos(nx), \cos(mx) \rangle &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos(nx) \cos(mx) dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(nx - mx) + \cos(nx + mx) dx. \quad \square \end{aligned}$$

La famille F_n est donc une famille orthogonale pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. De plus :

Lemme 6 La famille F_n est orthonormée, i.e. pour tout $k \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned} \langle \cos(kx), \cos(kx) \rangle &= 1 \\ \langle \sin(kx), \sin(kx) \rangle &= 1 \\ \langle 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2} \rangle &= 1. \end{aligned}$$

Preuve : Laissée en exercice.

Montrons que ceci implique que la famille F_n est libre :
supposons que

$$t \longrightarrow S_n(t) = \sum_{k=0}^n a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt) = 0 \text{ pour tout } t$$

et calculons $\langle S_n, S_n \rangle$ de deux manières :

$$\langle S_n, S_n \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} S_n(t) S_n(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} 0 \times 0 dt = 0.$$

Mais aussi, on a :

$$\langle S_n, S_n \rangle = \left\langle \sum_{k=0}^n a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt), \sum_{k=0}^n a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt) \right\rangle. \quad (2)$$

En utilisant les propriétés de linéarité du produit scalaire (l'égalité (1)), on voit que le produit scalaire (2) peut être réécrit comme la somme de $(2n+1)^2$ produits scalaires, chacun d'eux étant le produit scalaire de deux fonctions du type $\sin(kt)$ ou $\cos(kt)$. Or ces produits sont nuls sauf si ils invoquent les mêmes termes. On obtient donc :

$$\begin{aligned} \langle S_n, S_n \rangle &= a_0^2 + \sum_{k=1}^n a_k^2 \langle \cos(kt), \cos(kt) \rangle + b_k^2 \langle \sin(kt), \sin(kt) \rangle \\ &= a_0^2 + \sum_{k=1}^n a_k^2 + b_k^2 \end{aligned}$$

Cette somme étant nulle, il en résulte que chacun des a_k et des b_k sont également nuls. \square

Corollaire 1 $\mathcal{E}_n^{\mathbb{R}}$ est un espace vectoriel de dimension $2n+1$.

Preuve : F_n est une base de $\mathcal{E}_n^{\mathbb{R}}$ et son cardinal est $2n+1$. \square

Espace L_2 des fonctions de carré intégrable

On a vu plus haut, que les vecteurs $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}}, x \mapsto \cos(jx), x \mapsto \sin(jx)$ forment une base orthonormée de l'espace vectoriel $\mathcal{E}_n^{\mathbb{R}}$. Le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ permet de définir une notion de norme, appelée norme 2 :

$$\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \sqrt{\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f^2(x) dx}.$$

Le cours sur les intégrales généralisées nous dit que cette quantité n'est pas toujours finie. On introduit donc un espace (vectoriel) de fonctions, appelé L_2 , des fonctions de carré intégrable sur $[0, 2\pi]$, c'est à dire :

$$L_2 = \{f \mid f \text{ est } 2\pi \text{ périodique et } \|f\|_2 < +\infty\}.$$

En particuliers, les fonctions continues par morceaux et bornées sont dans L_2 ; L_2 en fait est un espace de fonctions très vaste.

Propriétés

- (i) $\|\lambda f\|_2 = |\lambda| \|f\|_2$
- (ii) $\|f + g\|_2 \leq \|f\|_2 + \|g\|_2$
- (iii) $\|f\|_2 = 0$ ssi f est négligeable
- (iv) $|\langle f, g \rangle| \leq \|f\|_2 \|g\|_2$ inégalité de Cauchy-Schwarz

b. Polynômes trigonométriques complexes

Définition : On appelle polynôme trigonométrique complexe de degré inférieur ou égal à n toute combinaison linéaire des fonctions du type $t \mapsto e^{ikt}$ où k est un entier vérifiant $0 \leq |k| \leq n$. Plus formellement :

$$t \mapsto S_n(t) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikt}.$$

Notons $\mathcal{E}_n^{\mathbb{C}}$ l'espace vectoriel des polynômes trigonométriques complexes de degré inférieur ou égal à n sur \mathbb{C} . On a :

Lemme 7 $\mathcal{E}_n^{\mathbb{C}}$ est un espace vectoriel de dimension $2n + 1$.

Preuve : La famille $G_n = \{e^{ikt}, |k| \leq n\}$ engendre évidemment $\mathcal{E}_n^{\mathbb{C}}$. Pour montrer que la famille G_n est libre nous avons en gros deux méthodes. La première consiste à calquer la démonstration du cas réel avec le produit "scalaire" :

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \overline{g(x)} dx,$$

où $\overline{g(x)}$ désigne le conjugué de $g(x)$. En fait, $\langle f, g \rangle$ n'est pas un produit scalaire car il n'est pas symétrique, ni bilinéaire (dans \mathbb{C}), ni à valeurs réelles. On appelle ce produit un produit hermitien. Le reste de la démonstration est identique car :

$$\langle e^{inx}, e^{imx} \rangle = \delta_{n,m}$$

où δ est le symbole de Kroneker.

La deuxième méthode est certainement plus intéressante pour la suite. Elle consiste à montrer qu'avec les polynômes de la famille G_n on peut engendrer la famille F_n et donc aussi $\mathcal{E}_n^{\mathbb{R}}$, ce qui est évident grâce à la formule de Moivre : $\cos(kx) = (e^{ikx} + e^{-ikx})/2$, $\sin(kx) = (e^{ikx} - e^{-ikx})/2i$; de même, avec la famille F_n on peut engendrer la famille G_n car $e^{ikx} = \cos(kx) + i \sin(kx)$ et $e^{-ikx} = \cos(kx) - i \sin(kx)$. Il résulte de ceci que les espaces engendré par F_n et par G_n sont de même dimension (pour être précis, les espaces $\mathcal{E}_n^{\mathbb{C}}$ et $\mathcal{E}_n^{\mathbb{R}}$ ne sont pas tout à fait les mêmes, puisque les polynômes de $\mathcal{E}_n^{\mathbb{R}}$ sont à coefficients réels. Pour engendrer $\mathcal{E}_n^{\mathbb{C}}$ à partir de F_n , on doit considérer les combinaisons linéaires à coefficients complexes.)

c. Séries trigonométriques réelles et complexes

Définition : On appelle série trigonométrique réelle, toute série de fonctions $((f_n))$ dont le terme général est de la forme :

$$t \mapsto f_n(t) = \begin{cases} a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt) & \text{pour } n \geq 1 \\ a_0/2 & \text{pour } n = 0 \end{cases}$$

On appelle série trigonométrique complexe toute série de fonctions dont le terme général $((f_n))$ est de la forme

$$t \mapsto f_n(t) = \begin{cases} c_{-n}e^{-int} + c_n e^{int} & \text{pour } n \geq 1 \\ c_0 & \text{pour } n = 0 \end{cases}$$

Si ces séries convergent, on note leurs sommes respectives :

$$t \mapsto S(t) = \frac{a_0}{2} + \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt),$$

et

$$t \mapsto S(t) = c_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} (c_{-k}e^{-ikt} + c_k e^{ikt}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikt}$$

Lien entre les deux séries

On a déjà entrevu le lien un peu plus haut. On utilise les formules de Moivre :

$$\begin{aligned} a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt) &= a_n \left(\frac{e^{int} + e^{-int}}{2} \right) + b_n \left(\frac{e^{int} - e^{-int}}{2i} \right) \\ &= \left(\frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2i} \right) e^{int} + \left(\frac{a_n}{2} - \frac{b_n}{2i} \right) e^{-int} \end{aligned}$$

d'où :

$$c_n = \frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2i}, \quad c_{-n} = \frac{a_n}{2} - \frac{b_n}{2i} \quad \text{et} \quad c_0 = \frac{a_0}{2}.$$

Réciproquement :

$$c_n e^{int} + c_{-n} e^{-int} = (c_n + c_{-n}) \cos(nt) + i(c_n - c_{-n}) \sin(nt).$$

d'où :

$$a_n = c_n + c_{-n}, \quad b_n = i(c_n - c_{-n}) \quad \text{et bien sûr} \quad a_0 = 2c_0.$$

Remarquons que les coefficients a_n et b_n sont réels si et seulement si $c_n = \overline{c_{-n}}$.

d. Convergences

Les séries trigonométriques sont des séries de fonctions et en tant que telles, tous les critères et propriétés des séries de fonctions et de leurs limites sont encore valables ici.

Proposition 2 (Convergence simple) Soit $((f_n))$ une série trigonométrique de terme général :

$$t \mapsto f_n(t) = a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt).$$

Si les deux suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ sont positives, décroissantes, de limite 0, alors la série converge simplement en tout x de \mathbb{R} non multiple de 2π .

Preuve : C'est tout simplement une application du corollaire du Théorème d'Abel (p.22). \square

De même

Proposition 3 (Convergence simple) Soit $((f_n))$ une série trigonométrique de terme général :

$$t \mapsto f_n(t) = c_n e^{int} + c_{-n} e^{-int}.$$

Si les deux suites $(c_n)_n$ et $(c_{-n})_n$ sont positives, décroissantes vers 0, alors la série converge simplement en tout x de \mathbb{R} non multiple de 2π .

Proposition 4 (Convergence normale) Si les deux séries $((a_n))_n$ et $((b_n))_n$ sont absolument convergentes, la série $((f_n))$ (définie ci-dessus) converge normalement.

Preuve : Il faut prouver que la série $((\|f_n\|_\infty))_n$ converge. Or

$$\sup\{|a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)|, t \in \mathbb{R}\} \leq |a_n| + |b_n|.$$

Si les deux séries $((a_n))$ et $((b_n))$ sont absolument convergentes, alors la série $((|a_n| + |b_n|))$ est convergente et donc la série $((f_n))$ converge normalement. \square .

De même, on a :

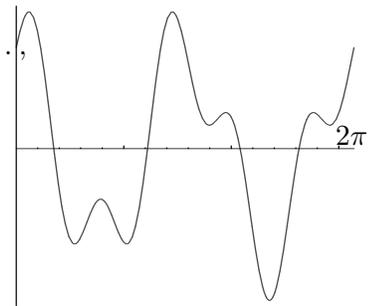
Proposition 5 (Convergence normale) Si les séries $((c_n))$ et $((c_{-n}))$ sont absolument convergentes, la série $((f_n))$ converge normalement.

Corollaire 2 Si la convergence est normale, la somme est continue et la série est intégrable terme à terme.

C. Développement en série de Fourier d'une fonction

Le but ici est de voir, dans quelle mesure, une fonction f donnée peut s'écrire sous la forme $f(t) = \sum a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)$. Dans ce cas, comment calcule-t-on les a_n et les b_n ? En physique, de nombreux phénomènes vibratoires apparaissent (son, courant alternatif, marée (à l'origine des travaux de Fourier), etc...). Si f est la mesure de l'amplitude d'un son (en fonction du temps), sa décomposition en série de Fourier permet de décomposer ce son en fonction de "composantes ondulatoires élémentaires régulières", c'est à dire des sinusoïdales. $a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)$ apparaît alors comme la contribution de fréquence $2\pi/n$ au son.

Il est naturel de penser qu'une fonction 2π périodique est une somme de fonctions dont la période fondamentale est $2\pi, 2\pi/2, 2\pi/3, \dots$, puisqu'une fonction $2\pi/n$ -périodique est également 2π périodique. Le fait que toute fonction suffisamment régulière puisse s'écrire sous forme de somme de sinus et de cosinus est beaucoup plus troublant au premier abord, car l'intuition suggère qu'on ne peut pas atteindre beaucoup de fonctions comme ça. En fait deux éléments viennent un peu aider l'intuition. Sur le dessin ci-dessous on a tracé la courbe d'équation $x \mapsto \cos(2x) + 0.5 \sin(5x)$. Les nombreuses disymétries qui apparaissent montrent pourquoi ou comment on peut décomposer des fonctions "bizarres".



D'un point de vue physique, il peut sembler très étonnant que tout phénomène vibratoire soit en quelque sorte "une somme" de phénomènes sinusoïdaux. En fait, il ne faut pas oublier qu'il s'agit de somme infinie et on a vu à plusieurs reprises que la somme d'un nombre infini de fonctions

n'a souvent plus grand chose à voir avec chacune des fonctions. De plus, le choix de décomposer f comme somme de cosinus et de sinus est relativement arbitraire. Il existe en effet d'autres familles de fonctions (que cosinus et sinus), qui permettent exactement le même type de développement. Il suffit qu'elles soient suffisamment nombreuses et qu'il existe pour elles un produit scalaire comme celui que l'on a construit qui fasse d'elles une famille orthonormée.

a. Coefficients de Fourier d'une fonction

Définition : Soit f une fonction intégrable. On appelle coefficients de Fourier réels de f les nombres

$$a_n = a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(nt) dt, \quad b_n = b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(nt) dt.$$

Les coefficients de Fourier complexes de f sont les nombres

$$c_n = c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt$$

Définition : On appelle série de Fourier réelle de f la série

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n(f) \cos(nt) + b_n(f) \sin(nt) \right).$$

On appelle série de Fourier complexe de f la série

$$c_0 + \sum_{n \in \mathbb{N}^*} (c_n e^{int} + c_{-n} e^{-int}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{int}.$$

On ne présume pas de la convergence de ces séries.

Lemme 8

Si f est paire, tous les b_n sont nuls.

Si f est impaire, tous les a_n sont nuls.

Preuve : Evidente.

b. Convergence de la série de Fourier d'une fonction

Pourquoi les a_n et les b_n ??

Ce paragraphe a pour ambition de donner une "explication" de pourquoi la série réelle suivante

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n(f) \cos(nt) + b_n(f) \sin(nt) \right) \text{ ou complexe } \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{int},$$

est une bonne candidate pour "converger" vers f .

Proposition 6 Soit $P(t) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{int}$ un polynôme trigonométrique.

(i) Pour tout $n \in \{-N, \dots, N\}$, on a : $c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(t) e^{-int} dt$

(ii) P s'écrit : $P(t) = a_0/2 + \sum_{n=1}^N (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt))$ avec :

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} P(t) \cos(nt) dt, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} P(t) \sin(nt) dt.$$

(iii) $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |P(t)|^2 dt = \sum_{n=-N}^N |c_n|^2 = \frac{|a_0|^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N (|a_n|^2 + |b_n|^2)$

Autrement dit, la série de Fourier d'un polynôme trigonométrique est le polynôme trigonométrique lui-même. De là à penser que la série de Fourier d'une fonction est la fonction elle-même il y n'a qu'une porte qu'il faut parfois éviter de franchir.

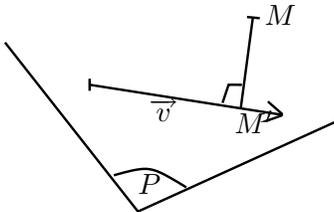
Preuve : Les trois preuves s'obtiennent très simplement (en utilisant les propriétés du produit scalaire). Par exemple : $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(t) e^{-int} dt = c_n$ et par définition c_n est exactement le $n^{ème}$ coefficient de Fourier complexe.

Montrons (iii). Les vecteurs e^{int} sont orthogonaux 2 à 2 par rapport au produit hermitien. On a donc :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |P(t)|^2 dt = \langle P, P \rangle = \sum_{m,n} c_m \bar{c}_n \langle e^{imt}, e^{int} \rangle = \sum_n |c_n|^2.$$

La démonstration est identique dans le cas réel.

Une notion de projection sur L_2



En géométrie euclidienne classique, si P est un plan de l'espace et M est un point du plan, le projeté orthogonal de M sur P est défini comme le point M' de P tel que :

$$\langle \overrightarrow{MM'}, \vec{v} \rangle = 0 \text{ pour tout vecteur } \vec{v} \text{ du plan } P.$$

M' est le point de P le plus proche de M (pour la distance euclidienne classique).

Soit f une fonction de L_2 et considérons $S_n(f)$ la somme partielle d'ordre n de la série de Fourier de f :

$$S_n(f)(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k(f) \cos(kt) + b_k(f) \sin(kt)).$$

Proposition 7 Si f est dans L_2 , la fonction $S_n(f)$ est le projeté orthogonal de f sur l'espace vectoriel $\mathcal{E}_n^{\mathbb{R}}$. $S_n(f)$ est donc la fonction de $\mathcal{E}_n^{\mathbb{R}}$ la plus proche de f pour la norme 2.

Preuve : Notons

$$Q(t) = \sum_{k=0}^n \tilde{a}_k \cos(kt) + \tilde{b}_k \sin(kt)$$

(le ?) un polynôme trigonométrique, projeté orthogonal de f sur $\mathcal{E}_n^{\mathbb{R}}$. Montrons que $Q = S_n(f)$. Par définition, Q vérifie :

$$\langle f - Q, P_n \rangle = 0,$$

pour tout vecteur P_n de $\mathcal{E}_n^{\mathbb{R}}$. $f - Q$ est l'analogie de $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM}$. Le produit scalaire étant linéaire, il suffit que

$$\begin{aligned} \langle f - Q, \cos(kt) \rangle &= 0, \forall 0 \leq k \leq n \text{ et} \\ \langle f - Q, \sin(kt) \rangle &= 0, \forall 1 \leq k \leq n. \end{aligned}$$

Ceci équivaut à

$$\langle Q, \cos(kt) \rangle = \langle f, \cos(kt) \rangle = a_k(f) \text{ et } \langle Q, \sin(kt) \rangle = \langle f, \sin(kt) \rangle = b_k(f) \quad \forall 0 \leq k \leq n.$$

Ainsi, le polynôme Q a comme coefficients de Fourier les a_k et b_k , $k \leq n$. Q existe, est unique et est :

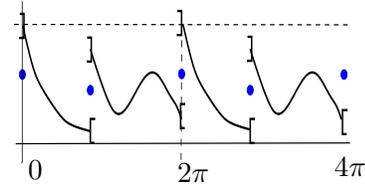
$$Q(t) = a_0/2 + \sum_{k=1}^n a_k(f) \cos(kt) + b_k(f) \sin(kt)$$

autrement dit $S_n(f)$. \square

Définition : On dit qu'une fonction f est \mathcal{C}^1 par morceaux sur $[0, 2\pi]$ s'il existe une suite de points $0 = a_1 < a_2 < \dots < a_n = 2\pi$ t.q. $\forall k \in \{1, \dots, n\}$, il existe une fonction ϕ_k continue et dérivable sur $[a_{k-1}, a_k]$ qui coïncide avec f sur $]a_{k-1}, a_k[$. C'est à dire que f est prolongeable par continuité et par dérivabilité sur chacun des morceaux $]a_{k-1}, a_k[$.

Définition : Une fonction f définie sur \mathbb{R} est dite *équilibrée* si pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}.$$



Les fonctions continues sont équilibrées. Voici, ci-contre le graphe typique d'une fonction équilibrée.

Proposition 8 (Dirichlet) Si f est une fonction \mathcal{C}^1 par morceaux sur \mathbb{R} et 2π périodique sa série de Fourier converge simplement sur \mathbb{R} ; sa somme est égale à $f(x)$ si f est continue en x et à $\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$ si f n'est pas continue en x .

Remarque : Autrement dit, si f est équilibrée, sous les hypothèses de la proposition, la suite de fonction $S_n(f)$ converge simplement vers f . Dans le cas où f n'est pas équilibrée, sa série de Fourier converge vers une "équilibration" de f .

La preuve de la proposition de Dirichlet sort un peu du cadre de ce cours. Nous ne la donnerons donc pas ici. La preuve de la proposition 12 (qui nécessite des hypothèses plus fortes) donne toutefois une idée des arguments utilisés.

Proposition 9 (Formule de Parseval)

$$\begin{aligned} \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n \geq 1} (a_n^2 + b_n^2) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt. \\ |c_0|^2 + \sum_{n \geq 1} (|c_n|^2 + |c_{-n}|^2) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt. \end{aligned}$$

La formule de Parseval est une généralisation du théorème de Pythagore à l'espace L_2 . En effet, le théorème de Pythagore dans le plan peut être formulé ainsi :

si $\vec{W} = \vec{U} + \vec{V}$ et si $\langle \vec{U}, \vec{V} \rangle = 0$ alors $\|\vec{W}\|^2 = \|\vec{U}\|^2 + \|\vec{V}\|^2$.

Le rapport avec le th. de Pythagore est le suivant : lorsque f est somme de sa série de Fourier, f s'écrit :

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n(f) \cos(nt) + b_n(f) \sin(nt)) \text{ ou } c_0 + \sum_{n \in \mathbb{N}^*} (c_n e^{int} + c_{-n} e^{-int}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{int}.$$

Ainsi, f est la somme de vecteurs orthogonaux, comme on l'a déjà dit ; la formule de Parseval dit que la norme de f au carré est tout simplement la somme des normes L_2 de chacun des vecteurs orthogonaux de sa décomposition. Or les normes de ces décompositions sont tout simplement les a_n^2 et les b_n^2 . En effet, on a par exemple :

$$\|a_n \cos(nt)\|_2^2 = \langle a_n \cos(nt), a_n \cos(nt) \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (a_n \cos(nt))^2 dt = a_n^2$$

Éléments d'une preuve de la formule de Parseval : Si f est une fonction de L_2 , il est clair que les quantités a_n et b_n existent pour tout n . On peut donc considérer S_n , le projeté orthogonal de f sur $\mathcal{E}_n^{\mathbb{R}}$. Ainsi, puisque $f = (f - S_n(f)) + S_n(f)$ et par orthogonalité de $S_n(f)$ et $f - S_n(f)$ on a :

$$\|f\|_2^2 = \|S_n(f)\|_2^2 + \|f - S_n(f)\|_2^2.$$

Or, il est facile de montrer que

$$\|S_n(f)\|_2^2 = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) = |c_0|^2 + \sum_{k=-n}^n (|c_k|^2 + |c_{-k}|^2).$$

Ainsi, la formule de Parseval est équivalente au fait que

$$\|f - S_n(f)\|_2^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Ici est le point difficile. Pour prouver ceci, on doit utiliser des théorèmes forts d'analyse. Ils sont essentiellement de deux types : on peut approcher f aussi près que l'on veut par une suite de fonctions continues (au sens de la norme 2), c'est à dire que l'ensemble des fonctions continues est dense dans L_2 . Le deuxième pas consiste à prouver que l'on peut approcher les fonctions continues par des polynômes trigonométriques toujours au sens de la norme L_2 .

Proposition 10 (Unicité de la décomposition en série trigonométrique) *Si deux séries trigonométriques $\sum_n (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt))$ et $\sum_n (a'_n \cos(nt) + b'_n \sin(nt))$ convergent simplement toutes deux vers la même fonction f et si $\sum_n (a_n^2 + b_n^2)$ et $\sum_n (a'^2_n + b'^2_n)$ convergent, alors on a pour tout n , $a_n = a'_n$ et $b_n = b'_n$.*

On ne prouvera pas cette proposition ici. L'intérêt de cette proposition est le suivant : considérons une fonction f dans L_2 . On sait alors, d'après la formule de Parseval que $\sum_n (a_n^2 + b_n^2)$. La proposition dit, qu'il n'y a pas d'autres séries trigonométriques (dont les coefficients sont de carrés sommables) dont la limite est f .

Proposition 11 *Si $f \in C_0(\mathbb{R})$ et si la série de Fourier converge normalement sur \mathbb{R} , la somme en est f .*

Preuve : Considérons les nombres $c_n(f)$. La série de terme général $c_n(f)e^{int}$ converge normalement. Notons g sa somme :

$$g(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{int}.$$

g est continue car limite normale d'une série de fonctions continues. Les coefficients de Fourier de g sont les $(c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}}$, en effet :

$$c_m(g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{int} e^{-imt} dt = c_m(f).$$

Donc $f - g$ a tous ses coefficients de Fourier nuls et elle est continue, donc $f - g = 0$. On conclut en utilisant le théorème d'unicité. \square

Proposition 12 *si $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$, 2π périodique, sa série de Fourier converge normalement sur \mathbb{R} et sa somme est f .*

Preuve : Nous allons vérifier que la série de Fourier de f est normalement convergente ; la conclusion suivra alors simplement de la proposition 11. Tout repose sur une double intégration par parties, possible grâce au caractère doublement dérivable de f .

$$\begin{aligned} c_n(f) &= \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt \\ &= \left[f(t) \frac{e^{-int}}{-in} \right]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} f'(t) \frac{e^{-int}}{in} dt \\ &= \left[f'(t) \frac{e^{-int}}{-(in)^2} \right]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} f''(t) \frac{e^{-int}}{(in)^2} dt \end{aligned}$$

Les deux crochets sont nuls car f et f' sont 2π périodiques. On a :

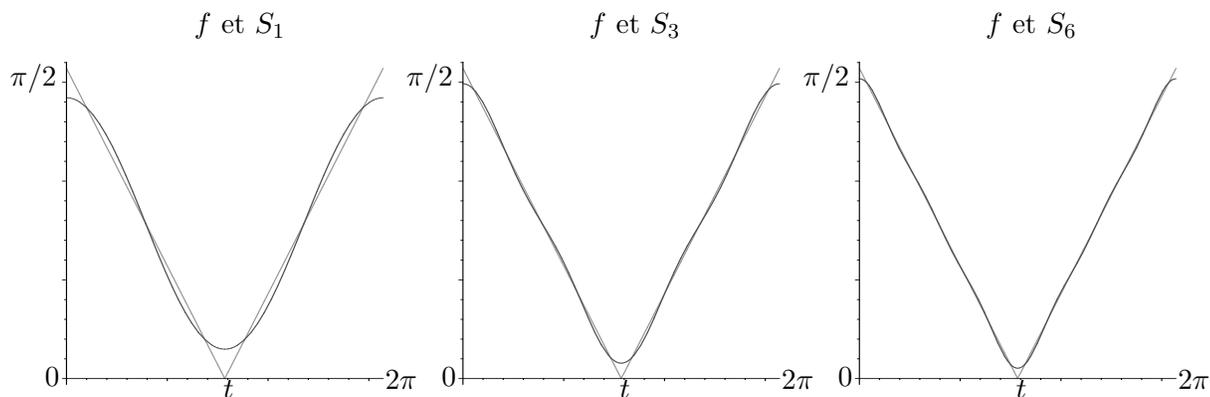
$$|c_n(f)| \leq \frac{2\pi}{n^2} \sup\{|f''(t)|, t \in [0, 2\pi]\}.$$

Ce sup est fini car f'' étant par hypothèse continue sur l'intervalle compact $[0, 2\pi]$, f'' est bornée sur cet intervalle. Ainsi, $c_n(f)$ est une série convergeant absolument. Or,

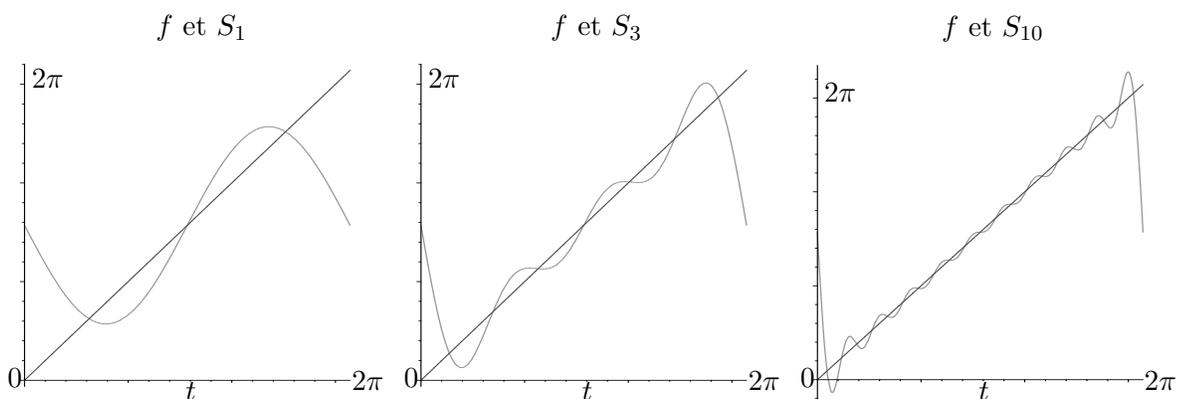
$$|c_n(f)| = \sup\{|c_n e^{int}|, t \in [0, 2\pi]\}.$$

Ainsi, la série de Fourier converge normalement. \square

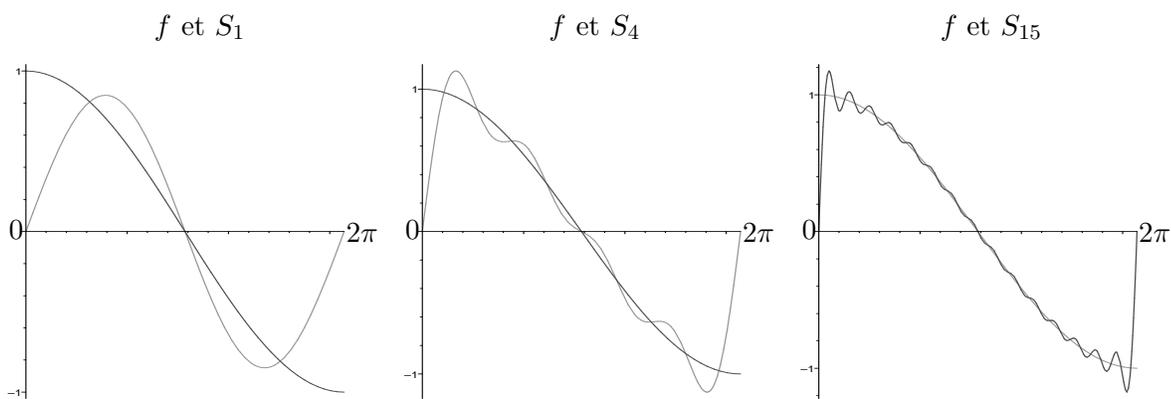
Exemples : • Série de Fourier de la fonction f , 2π -périodique définie par $f(x) = |x - \pi|/2$ sur $]0, 2\pi[$. Sur les figures ci-dessous ont été représentées quelques fonctions S_n .



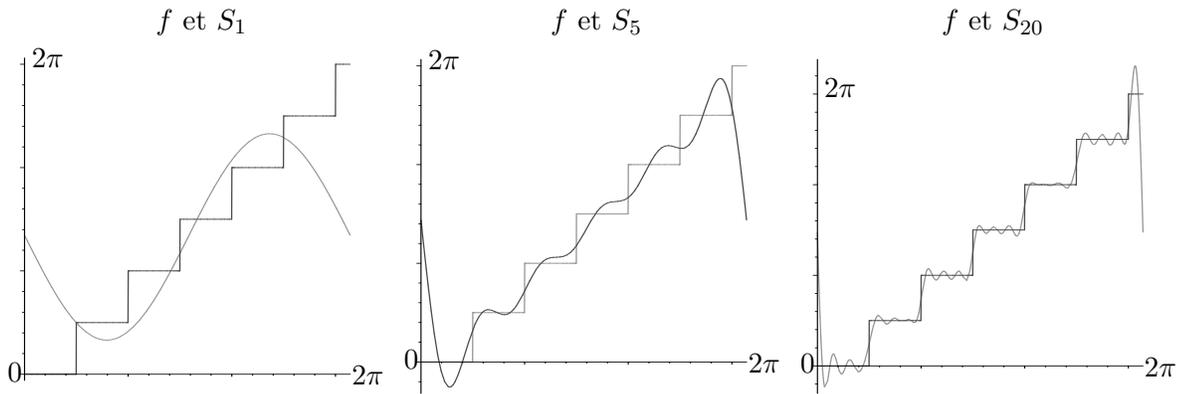
• Série de Fourier de la fonction f , 2π -périodique définie par $f(x) = x$ sur $]0, 2\pi[$ et $f(x) = \pi$ sur $\{0, 2\pi\}$.



• Série de Fourier de la fonction f , 2π -périodique définie par $f(x) = \cos(x/2)$ sur $]0, 2\pi[$ et $f(x) = 0$ sur $\{0, 2\pi\}$.



• Série de Fourier de la fonction f , 2π -périodique définie par $f(x) = [x]$ (partie entière de x) sur $]0, 2\pi[$ et $f(x) = 3$ sur $\{0, 2\pi\}$.



D. Exercices

Exercice 1

Connaissant le graphe d'une fonction f sur un intervalle de \mathbb{R} , expliquer par quel procédé on peut tracer le graphe de $t \mapsto f(t) \cos(t)$, $t \mapsto f(t) \sin(t)$, $t \mapsto f(t) \sin^2(t)$.
Tracer le graphe de $t \mapsto t^2 \cos(t)$ et de $t \mapsto t \cos(5t)$.

Exercice 2

Soient f une fonction \mathcal{C}^1 et a et b deux réels fixés. Montrer que

$$\int_a^b f(x) \sin(\lambda x) dx \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{et} \quad \int_a^b f(x) \cos(\lambda x) dx \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} 0.$$

Exercice 3

a. Montrer que pour tout $x \neq 2k\pi, (k \in \mathbb{Z})$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$1 + 2 \cos(x) + 2 \cos(2x) + \dots + 2 \cos(nx) = \frac{\sin((n + 1/2)x)}{\sin(x/2)}.$$

Soit D_n la fonction définie par :

$$D_n(t) = \frac{\sin((n + 1/2)t)}{\sin(t/2)}$$

pour t tel que $\sin(t/2) \neq 0$ et prolongée par continuité aux points où $\sin(t/2)$ s'annule.

b. Montrer que D_n est un polynôme trigonométrique ; en déduire que D_n est \mathcal{C}^∞ .

c. Montrer que $\int_0^{2\pi} D_n(t) dt = 2\pi$

d. Montrer que $\forall \theta \in]0, 2\pi[$, on a :

$$\lim_n \int_\theta^{2\pi-\theta} D_n(t) dt = 0.$$

(On pourra intégrer D_n par parties et borner la valeur absolue de la quantité intégrée.)

e. Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_\theta^{2\pi-\theta} D_n(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2\pi - 2\theta - 4 \sin(\theta) - \dots - \frac{4}{n} \sin(n\theta) = 0.$$

f. En déduire que $\forall \theta \in]0, 2\pi[$,

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(\theta n)}{n} = \frac{\pi - \theta}{2}.$$

g. Donner la limite simple de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(n\theta)}{n}$ sur \mathbb{R} .

Exercice 4

Décider si les séries $((f_n))$ de fonctions suivantes convergent simplement, uniformément et (ou) normalement :

a. $f_n(t) = \frac{1}{n^{3/2}} \cos(nt) + \frac{1}{n^{5/4}} \sin(nt)$

b. $f_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} (\cos(nt) + \sin(nt))$

c. $f_n(t) = \frac{1}{n!} \cos(nt) + \sin(nt)$

d. $f_n(t) = \frac{n^n}{n!} \cos(nt)$

Exercice 5

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 2π périodique, impaire, telle que :

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \forall t \in]0, \pi[, \\ 0 & \text{si } t = k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a. Calculer les coefficients réels et complexes de Fourier de f .

Donner les séries de Fourier réelles et complexes de f

b. La série de Fourier de f converge-t-elle ? Si oui, vers quelle limite et de quelle manière ?

c. En déduire une expression de f sous forme de série trigonométrique

d. Calculer

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1}$$

Exercice 6

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 2π périodique, paire telle que, $\forall t \in [0, \pi], f(t) = t$.

a. Calculer la série de Fourier associée à f . Etudier la convergence de cette série.

b. Montrer que $\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$

c. En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ et de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$.

Exercice 7

Soit f la fonction $|\cos|$.

a.) Calculer les coefficients de Fourier de f .

b.) Etudier la convergence de la série de Fourier de f .

En déduire la valeur des sommes suivantes :

$$A = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{4n^2 - 1}, \quad B = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{4n^2 - 1}, \quad C = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(4n^2 - 1)^2}.$$

Exercice 8

Soit f la fonction \sin^2 .

- Calculer les coefficients de Fourier de f .
 - Etudier la convergence de la série de Fourier de f .
- Quelles sommes peut-on calculer grâce à cette étude ?

Exercice 9

Soit f la fonction 2π périodique, telle que $f(t) = e^t$ sur $[0, 2\pi[$.

- Calculer les coefficients de Fourier de f .
- Etudier la convergence de la série de Fourier de f .
- Quelles sommes peut-on calculer grâce à cette étude ?

Exercice 10

Reprendre l'exercice (6). Calculer $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^4}$.

Exercice 11

- Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 2π -périodique continue et C^1 par morceaux. Soit $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\phi(t) = f'(t)$ si f est dérivable en t et par $\phi(t) = \frac{f'(t+0) + f'(t-0)}{2}$ sinon. Montrer que les coefficients de Fourier de ϕ sont donnés par $C_n(\phi) = inC_n(f)$.
- Montrer que si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 2π -périodique et C^1 de moyenne nulle alors

$$\int_0^{2\pi} f^2(t) dt \leq \int_0^{2\pi} f'^2(t) dt \quad (3)$$

Exercice 12

- Soit $f(x) = x^2 + 1$ sur $[0, \pi]$. Trouver une suite $(a_n)_{n \geq 0}$ telle que

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} a_n \cos(nx) \text{ sur }]0, \pi[$$

Que se passe-t-il aux points 0 et π ?

- Trouver une suite $(b_n)_{n \geq 1}$ telle que

$$f(x) = \sum_{n \geq 1} b_n \sin(nx) \text{ sur }]0, \pi[$$

Que se passe-t-il aux points 0 et π ?

- Doit-on en déduire qu'une fonction possède plusieurs séries de Fourier ?

Exercice 13

Soit $f(x) = e^{4x}$ pour $x \in [-1, 1]$.

Ecrire f sous la forme d'une série de Fourier. (Ind : on pourra se ramener d'abord à une fonction 2π périodique par un changement de variables.)

Exercice 14

A. Soit $(S_n)_n$ la suite de fonctions 2π périodique définie par :

$$S_n(x) = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j^2} (\cos(jx) + \sin(jx)).$$

a. Montrez que S_n converge uniformément vers une fonction S .

b. Pourquoi S est-elle continue ?

On s'intéresse maintenant à la dérivée de S . Considérons la suite des dérivées des fonctions S_n à savoir $(S'_n)_{n \geq 1}$.

c. Pourquoi les fonctions S_n sont-elles dérivables ?

d. La suite des fonctions S'_n converge-t-elle simplement ? Uniformément ?

B. Soit f une fonction 2π périodique, dérivable, dont la série de Fourier converge vers f .

a. En supposant que f' est somme de sa série de Fourier, quels liens existent-ils entre les coefficients de Fourier de f' et ceux de f ?

b. Donner une condition suffisante pour que f' soit également somme de sa série de Fourier.

Exercice 15

On notera $a_n(h)$ et $b_n(h)$ les coefficients de Fourier réels de h , c'est-à-dire :

$$a_n(h) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} h(t) \cos(nt) dt, \quad b_n(h) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} h(t) \sin(nt) dt.$$

La série de Fourier de h est la série :

$$S_{(h)}(x) = \frac{a_0(h)}{2} + \sum_{n \geq 1} (a_n(h) \cos(nx) + b_n(h) \sin(nx)).$$

On utilisera à loisir les formules suivantes :

(★) si f et g sont deux fonctions continues par morceaux 2π périodiques, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n(f+g) = a_n(f) + a_n(g), \quad b_n(f+g) = b_n(f) + b_n(g).$$

(★★) Pour tout $\beta \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n(\beta h) = \beta a_n(h), \quad b_n(\beta h) = \beta b_n(h).$$

Les représentations graphiques seront données sur $[-2\pi, 2\pi]$.

A. a). Soit f la fonction 2π périodique, telle que $f(x) = 0$ pour $x \in]-\pi, 0]$ et $f(x) = x$ pour $x \in [0, \pi]$. Calculer les coefficients $a_n(f)$ et $b_n(f)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b). Etudier la convergence de $S_{(f)}$, préciser sa limite lorsqu'elle converge (en tout point). Représenter f et $S_{(f)}$ sur le même graphique (sur $[-2\pi, 2\pi]$).

B). On va maintenant en déduire les séries de Fourier de toute une famille de fonctions. On ne détaillera plus les convergences (tout se passant comme en (A.b.)).

a). On note g la fonction symétrique de f par rapport à l'axe des ordonnées. Exprimer g en fonction de f . En déduire les coefficients de Fourier de g . Tracer g et $S_{(g)}$ sur le même graphique.

b). Soit h la fonction, 2π périodique, valant 0 sur $[-\pi, 0[$ et $\pi - x$ sur $[0, \pi]$. Remarquer que la

courbe représentant h est translatée de celle de g ; donner une relation liant h et g . En déduire les coefficients de Fourier de h (une relation les liants avec ceux de g suffit). Tracer h et $S_{(h)}$.

c). Soit k la fonction somme de h et g . Tracer k et $S_{(k)}$. Exprimer les coefficients de Fourier de k en fonction de coefficients vus dans les questions précédentes.

C.) Fin de la construction de la famille de fonctions.

a). Remarquer que l'on peut construire la fonction l symétrique de k par rapport à l'axe des ordonnées grâce à une technique déjà employée dans cet exercice.

b). On peut, grâce à (\star) et $(\star\star)$ trouver les séries de Fourier de toute combinaison linéaire des fonctions f, g, h, k . Quel est l'ensemble de fonctions ainsi atteint.

Annales

TD1 - Deug SM, 2^{ème} année, 1999-2000

Devoir maison n°1 : Sur la formule de Stirling

Le but de ce devoir est d'établir la formule de Stirling² à savoir :

$$n! \simeq \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \text{ en } +\infty.$$

A . On considère la suite numérique $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ définie par :

$$\alpha_n = \frac{n! e^n}{n^n \sqrt{n}}.$$

La première partie a pour but de prouver que la suite $(\alpha_n)_n$ converge.

Soit $(v_n)_{n \geq 2}$ la suite de terme général $v_n = \alpha_n - \alpha_{n-1}$, et $v_1 = \alpha_1$.

a. Montrer que la suite $(v_n)_n$ converge

b. Montrer que la série $((v_n))_n$ converge

On note S la somme de la série $((v_n))$, i.e. $S = \sum_{k=1}^{+\infty} v_k$.

c. Montrer que α_n converge vers S . (On pourra utiliser le fait que $((v_n))_n$ est une "série télescopique")

d. Donner un équivalent de $n!$ en fonction de S .

B. Le but de cette deuxième partie est de calculer S .

Pour cela, on étudie les intégrales dites de Wallis³ :

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t dt.$$

a. Calculer I_0, I_1, I_2

b. Trouver une relation simple entre I_n et I_{n-2} (pour $n \geq 2$). En déduire les valeurs de I_{2n} et de I_{2n+1}

c. Montrer que pour tout n , $I_n < I_{n-1} < I_{n-2}$

d. En déduire que $\lim_n \frac{I_n}{I_{n-1}} = 1$

e. Montrer que $nI_n I_{n-1}$ est une constante (ne dépendant pas de n).

f. En déduire que $\sqrt{n}I_n$ converge vers une limite que l'on précisera.

g. Montrez la formule de Wallis :

$$\lim_n \frac{2^{2n} (n!)^2}{\sqrt{n} (2n)!} = \sqrt{\pi}$$

h. Prouver la formule de Stirling.

²James Stirling, Écossais, 1682-1770

³John Wallis, Anglais, 1616-1703

Contrôle continu.

Exercice 1

Chacune des affirmations suivantes est fausse. On demande dans chaque cas d'exhiber un contre-exemple et de montrer en quoi il constitue un contre-exemple.

- a. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq |v_n|$ et si la série $((v_n))$ converge alors la série $((u_n))$ aussi.
- b. Si la suite de fonction (f_n) converge simplement, alors la série de fonction $((f_n))$ aussi.

Exercice 2

Dire si les intégrales généralisées suivantes convergent ou non :

$$a). \int_2^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2-1} dx, \quad b). \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)^3} dx$$

Exercice 3

Dire si les séries de terme général $((u_n))_n$ suivantes convergent ou non :

$$a). u_n = \frac{n^2 + 3n}{2n^3 + 1}, \quad b). u_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$$

On pourra utiliser le dl suivant : $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n + o(x^n)$ en 0.

Exercice 4

On considère la série de fonctions de terme général $((f_n))_{n \geq 0}$:

$$\begin{aligned} f_n : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \theta &\longmapsto \frac{\cos(n\theta)}{10^n} \end{aligned}$$

- a. Rappeler la définition de la convergence simple pour une série de fonctions
- b. Montrer que la série de fonctions $((f_n))$ converge simplement.

On note S_n la somme partielle d'ordre n de la série $((f_n))$ c'est à dire :

$$\begin{aligned} S_n : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \theta &\longmapsto \sum_{j=0}^n f_j(\theta) \end{aligned}$$

et S la limite de la suite $(S_n)_n$.

- c. Donner deux réels a et b tels que

$$a \leq S(\theta) \leq b, \text{ pour tout } \theta \in \mathbb{R}.$$

- d. Donner une valeur de N telle que $|S_N(\theta) - S(\theta)| \leq 10^{-5}$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.
- e. Montrer que la série de fonction $((f_n))$ converge uniformément sur \mathbb{R} .
- f. Montrer que la limite S est continue
- g. Montrer que S est paire. (On ne se contentera pas d'affirmer que la somme de fonctions paires est paire, mais on fera une vraie démonstration)

Barème approximatif : 1 : 5, 2 : 4, 3 : 4, 4 : 10

Calculatrices interdites. Autorisée : une feuille A4, recto-verso, avec notes personnelles.

On pourra utiliser dans chaque question les résultats énoncés dans les questions précédentes même si ceux-ci n'ont pas été établis.

Partiel.

Exercice 1 *Le but de cet exercice est d'observer sur un exemple, pourquoi (et comment) l'exponentielle l'emporte sur les polynômes. Les arguments du genre : "l'exponentielle l'emporte sur les puissances de x " sont donc à proscrire absolument.*

Soit g la fonction définie par $g(x) = x^{17}e^{-x}$ sur \mathbb{R}^+ .

a. Etudier les variations de g (on ne demande pas la limite de g en $+\infty$)

Soit h la fonction définie par $h(x) = x^{15}e^{-x}$ sur \mathbb{R}^+ .

b. En écrivant la relation liant h et g et en utilisant (a), montrer qu'il existe un nombre C tel que $h(x) \leq \frac{C}{x^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$.

c. En déduire la nature de $\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{15}dx$ (converge ou non?).

d. En déduire la nature de $\sum_{n=1}^{+\infty} n^{15}e^{-n}$ (converge ou non?).

e. En utilisant un raisonnement du type des questions (a) et (b), montrer qu'il existe une constante C' , telle que $h(x) \leq \frac{C'}{x^{175}}$ sur \mathbb{R}^+ .

Exercice 2

Soit la série de fonction $((f_n))_{n \geq 1}$ définie par :

$$f_n(x) = (-1)^n \frac{x}{n} \text{ pour } 0 \leq x \leq 14.$$

a. Etudier la convergence simple, uniforme, normale de cette série de fonctions.

b. Expliquer, ce que signifie les résultats obtenus en (a) sur la série $((f_n))$ et sur sa limite.

PROBLÈME :

On notera $a_n(h)$ et $b_n(h)$ les coefficients de Fourier réels de h , c'est à dire. :

$$a_n(h) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} h(t) \cos(nt) dt, \quad b_n(h) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} h(t) \sin(nt) dt.$$

La série de Fourier de h sera alors notée :

$$S_{(h)}(x) = \frac{a_0(h)}{2} + \sum_{n \geq 1} (a_n(h) \cos(nx) + b_n(h) \sin(nx)).$$

A. Préliminaires.

a. Montrer que si f et g sont deux fonctions bornées, 2π périodiques, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n(f+g) = a_n(f) + a_n(g), \quad b_n(f+g) = b_n(f) + b_n(g).$$

b. Montrer que, pour tout $\beta \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n(\beta h) = \beta a_n(h), \quad b_n(\beta h) = \beta b_n(h).$$

B. Série de Fourier de fonctions associées

On considère f , la fonction 2π périodique, définie sur $] -\pi, \pi]$ par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in] -\pi, 0], \\ x^2 & \text{si } x \in]0, \pi]. \end{cases}$$

a. Donner une représentation graphique de f . On note \mathcal{C}_f son graphe.

b. Montrer que

$$a_0(f) = \pi^2/3; \text{ pour } n \geq 1 : a_n(f) = \frac{2(-1)^n}{n^2}, \quad b_n(f) = -\frac{(-1)^n \pi}{n} + \frac{2(-1)^n - 2}{n^3 \pi}.$$

c. La série de Fourier de f converge-t-elle ? Préciser sa limite (on précisera sa limite en chaque point).

On note g , la fonction dont le graphe \mathcal{C}_g est le symétrique de \mathcal{C}_f par rapport à l'axe des abscisses.

d. Donner une représentation graphique de g . Exprimer la fonction g en fonction de f .

e. En déduire la série de Fourier de g sans faire aucun calcul. Dire pourquoi cette série converge.

On note k la fonction dont le graphe \mathcal{C}_k est le symétrique de \mathcal{C}_f par rapport à l'axe des ordonnées.

f. Donner une représentation graphique de k . Exprimer la fonction k en fonction de f . En déduire la série de Fourier de k (sans faire aucun calcul).

g. En déduire, que la série de Fourier de la fonction l , 2π périodique et coïncidant avec $x \mapsto x^2$ sur $[-\pi, \pi]$ s'écrit :

$$S_{(l)}(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n \geq 1} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos(nx).$$

h. En déduire les sommes suivantes :

$$s_1 = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^2}, \quad s_2 = \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^k}{k^2}, \quad s_3 = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^4}.$$

C. Dérivation des séries de Fourier.

a. Soit $\lambda(x)$, la fonction 2π -périodique, coïncidant avec $x^2 - \pi^2/3$ sur $] -\pi, \pi]$. Déduire de ce qui précède la série de Fourier de λ . Donner la primitive Λ de λ nulle en 0.

b. Montrer que la série de Fourier de Λ s'obtient à partir de celle de λ par intégration terme à terme. On donnera tous les arguments nécessaires.

c. En cours, il a été établi que

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(n\theta)}{n} = \frac{\pi - \theta}{2} \text{ pour tout } \theta \in]0, 2\pi[.$$

(On ne cherchera pas à redémontrer ce résultat). Montrer que la somme des dérivées du membre de gauche n'est pas égale à la dérivée du membre de droite. Quelle est la série de Fourier de $(\frac{\pi - \theta}{2})'$? Conclure.

Calculatrices interdites. Autorisée : une feuille A4, recto-verso, avec notes personnelles.

Par amabilité avec le correcteur (ou peur de représailles), on s'efforcera d'apporter tout le soin nécessaire à la rédaction.

UE8 – Examen.

Exercice 1 Série de fonctions

On considère la série de fonctions $((f_n))_{n \geq 0}$ de terme général f_n défini, pour $n \geq 0$, par

$$f_n(x) = \frac{1}{(x+n)^2}.$$

Lorsque la série converge, on désigne par S sa somme, de sorte que dans ce cas,

$$S(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(x+n)^2}.$$

- a. Pour quelles valeurs de $x \in \mathbb{R}$, le terme général de cette série est-il défini pour tout $n \in \mathbb{N}$?
- b. Pour quelles valeurs de $x \in \mathbb{R}^+$, la série converge-t-elle ?
- c. Soit $a > 0$ quelconque. Montrer que la série $((f_n))_{n \geq 0}$ converge normalement sur $[a, \infty[$.
- d. En déduire que S est définie et continue sur $[a, \infty[$.
- e. Peut-on affirmer que S est continue sur $]0, +\infty[$? $[0, +\infty[$?
- f. On considère maintenant la série de fonctions $((f'_n))_{n \geq 0}$, de terme général f'_n . Montrer que cette série converge normalement sur $[a, +\infty[$.
- g. En déduire que S est dérivable sur $[a, +\infty[$. Quel est le signe de S' ? En déduire la croissance ou la décroissance de la suite $(S(k))_{k \geq 1}$.
- h. Montrer que $S(k)$ est le reste d'une somme partielle apparaissant lors du calcul de $S(1)$. En déduire que la suite $S(n)$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 2 Série entière

Soit la série entière

$$S(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n}.$$

- a). Calculer le rayon de convergence de cette série.
- b). Quel est le domaine de convergence de cette série ?
- c). Calculer $S'(x)$ pour $x \in]-1, 1[$, justifier.
- d). Calculer $S(x)$ pour $x \in]-1, 1[$, justifier.

Exercice 3 Série de Fourier

On notera $a_n(h)$ et $b_n(h)$ les coefficients de Fourier réels de h , c'est-à-dire :

$$a_n(h) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} h(t) \cos(nt) dt, \quad b_n(h) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} h(t) \sin(nt) dt.$$

La série de Fourier de h est la série :

$$S_{(h)}(x) = \frac{a_0(h)}{2} + \sum_{n \geq 1} (a_n(h) \cos(nx) + b_n(h) \sin(nx)).$$

On utilisera à loisir les formules suivantes :

(★) si f et g sont deux fonctions continues par morceaux 2π périodiques, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n(f + g) = a_n(f) + a_n(g), \quad b_n(f + g) = b_n(f) + b_n(g).$$

(★★) Pour tout $\beta \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n(\beta h) = \beta a_n(h), \quad b_n(\beta h) = \beta b_n(h).$$

Les représentations graphiques seront données sur 2 périodes .

On note f la fonction 2π périodique définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\pi, 0[\\ x & \text{si } x \in]0, \pi[\\ 4 & \text{si } x \in \{0, \pi\} \end{cases}$$

A.)a.) Tracer le graphe de f . Calculer les coefficients de Fourier de f . Montrer que $S_{(f)}$ s'écrit :

$$S_{(f)}(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n \geq 1} \left(\frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2} \cos(nx) + \frac{-(-1)^n}{n} \sin(nx) \right).$$

b. Etudier la convergence de $S_{(f)}$. Préciser sa limite en chaque point. Sur le dessin fait en (a) tracer $S_{(f)}$ (prendre une autre couleur).

c). En utilisant $S_{(f)}$ calculer successivement :

$$S_1 = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n - 1}{n^2}, \quad S_2 = \sum_{p \geq 0} \frac{1}{(2p + 1)^2}, \quad S_3 = \sum_{p \geq 1} \frac{1}{p^2}$$

B.)a). Soit g la fonction dont le graphe est symétrique de celui de f par rapport à l'axe des ordonnées. Tracer g . Exprimer g en fonction de f , puis sans faire de nouveaux calculs d'intégrales, donner les coefficients de Fourier de g .

b). Soit h , 2π périodique, valant αx pour $x \in]-\pi, 0[$, βx pour $x \in]0, \pi[$ (α et β sont deux constantes) et ce que vous voulez en 0 et π . Donner les coefficients de Fourier de h . $S_{(h)}$ converge-t-elle ? Vers quoi ?

c). Tracer la fonction h correspondant au choix $\alpha = 1$ et $\beta = 2$, ainsi que $S_{(h)}$ sur le même graphique

UE8. Examen septembre 2002.

Dans tout le contrôle, on distinguera la suite (a_n) de la série $((a_n))$ par le nombre de parenthèses, qu'il s'agisse de nombres ou de fonctions.

Exercice 1 *Etudier la convergence des séries $((a_n))_{n \geq 1}$ suivantes :*

$$a.) \quad a_n = \frac{\exp(-n)}{n} \qquad b.) \quad a_n = (-1)^n \sqrt{n}$$

Exercice 2 *Etudier la convergence des intégrales suivantes :*

$$a.) \quad \int_0^1 \frac{1}{\sin(t)} dt \qquad b.) \quad \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx$$

Exercice 3 *Vrai ou faux ? On demande une preuve si c'est vrai, un contre exemple si c'est faux.*

- Si (a_n) est une suite qui converge vers 0, la série $((a_n))$ converge.
- Si $((a_n))$ est une série numérique dont la suite des sommes partielles converge vers 2, la suite (a_n) converge vers 0.

Exercice 4

Soit $(f_n)_{n \geq 1}$ la suite de fonctions définies sur $[0, 1]$ par

$$f_n(x) = (1 - x)^n.$$

- a. Montrer que la suite (f_n) converge simplement sur $[0, 1]$ vers une fonction f que l'on déterminera.
- b. La suite (f_n) converge-t-elle uniformément vers f sur $[0, 1]$?

B. On se place maintenant sur l'intervalle $I = [1/2, 1]$. On note S_n la somme partielle associée à la série de fonctions $((f_n))$; c'est à dire, pour tout $x \in I$,

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x).$$

- Calculer $S_n(x)$ pour tout $n \geq 1$ et tout $x \in I$.
- En utilisant B.a., montrer que la suite de fonction S_n converge simplement (vers une fonction limite que l'on appellera S).
- Montrer de nouveau que la suite de fonctions S_n converge simplement sans utiliser la formule établie en B.a..
- La série $((f_n))$ converge-t-elle uniformément ? Normalement ?
- Calculer $\int_I S(x) dx$
- Peut-on affirmer que $\lim_n \int_I S_n(x) dx = \int_I S(x) dx$?

Exercice 5

On considère la fonction 2π périodique f définie pour tout $x \in [0, 2\pi[$ par

$$f(x) = \sqrt{x^3 + 1}.$$

On note, comme d'habitude $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ la suite de ses coefficients de Fourier.

Surtout ne calculez pas les coefficients a_n et b_n !!

a. Comment sait-on que la série de Fourier de f converge ? Que vaut la somme de la série de Fourier ?

a. Comment sait-on que les suites (a_n^2) et (b_n^2) tendent vers 0 ? (Ind : on pourra utiliser un théorème sur les séries de Fourier ainsi que la question 2.b.)

Calculatrices interdites. Autorisée : une feuille A4, recto-verso, avec notes personnelles.

Barème approximatif : 3 4 7 9

UE8 – Examen.

Exercice 1

Établir la convergence ou la non convergence de l'intégrale généralisée suivante :

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

(Ne surtout pas chercher de primitive!)

Exercice 2

Pour tout $n \geq 1$, on définit la fonction f_n par

$$f_n(x) = \frac{\cos(nx)}{\sqrt{n}} \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

La suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 1}$ converge-t-elle simplement ? uniformément ? (Si oui, donner la limite)

Exercice 3 *On prendra soin de justifier entièrement chaque calcul. On remarquera qu'il n'est pas toujours nécessaire de connaître $S_i(x)$ pour calculer $S_{i+1}(x)$.*

On considère la série entière de terme général f_n avec

$$f_n(x) = x^n \text{ pour } n \geq 1;$$

lorsque la somme de cette série converge, on la note S , de sorte que

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n.$$

- a) Trouver le plus grand intervalle I de \mathbb{R} sur lequel la série de terme général f_n converge.
- b) Calculer $S(x)$ pour tout x appartenant à I .
- c) Calculer $S_1(x) = \sum_{n \geq 1} nx^{n-1}$ pour x dans I .
- d) Calculer $S_2(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{x^{n+1}}{n+1}$ pour x dans I .

- e) Calculer $S_3(x) = \sum_{n \geq 1} nx^n$ pour x dans I .
- f) Calculer $S_4(x) = \sum_{n \geq 1} x^{2n}$. Pour quels x votre calcul est-il valable ?
- g) Calculer $S_5(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n+1} \left(\frac{\cos(x)}{2}\right)^{n+1}$. Pour quels x votre calcul est-il valable ?

Exercice 4 Les coefficients de Fourier réels d'une fonction h , 2π -périodique, sont les nombres

$$a_n(h) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} h(t) \cos(nt) dt, \quad b_n(h) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} h(t) \sin(nt) dt;$$

la série de Fourier de h est

$$S_h(t) = \frac{a_0(h)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(h) \cos(nt) + b_n(h) \sin(nt).$$

On suppose ici que h est dérivable sur $]0, 2\pi[$, et bornée. Le but de cet exercice est d'observer les liens entre la série de Fourier de h et celle de sa dérivée h' .

a) Montrer que, pour $n \geq 1$

$$a_n(h) = -\frac{b_n(h')}{n} \text{ et } b_n(h) = \frac{1}{\pi n} (h(0^+) - h(2\pi^-)) + \frac{a_n(h')}{n}. \quad (4)$$

(Indication : Intégrer $a_n(h)$ par parties pour faire apparaître $b_n(h')$. Appliquer la même méthode à $b_n(h)$. Expliquer pourquoi ce sont $h(2\pi^-)$ et $h(0^+)$ qui apparaissent au lieu de $h(2\pi)$ et $h(0)$)

remarque : attention, la formule (4) n'est valable que pour $n \geq 1$.

b) On prend pour g la fonction définie pour $x \in [0, 2\pi[$, par $g(x) = 1$ et 2π périodique. (En fait $g(x) = 1$ quelque soit x dans \mathbb{R} .)

Montrer que $a_0(g) = 2$, et que les autres coefficients de Fourier de g sont tous nuls.

c) On prend h la fonction valant x sur $[0, 2\pi[$ et 2π périodique. (On a bien sûr $h' = g$ sur $]0, 2\pi[$!). De la formule (4) et de (b), déduire les coefficients de Fourier de h (ne pas calculer d'intégrales!).

d) Grâce à la formule (1) et à (c), calculer les coefficients de Fourier de la fonction H , valant $\frac{x^2}{2}$ sur $[0, 2\pi[$ et 2π périodique.

Etablir que

$$S_H(x) = \frac{2\pi^2}{3} + \sum_{n \geq 1} \frac{2 \cos(nt)}{n^2} - \frac{2\pi \sin(nt)}{n}$$

e) Démontrer que $\sum_{p \geq 1} \frac{1}{p^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Ex 1. la fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$ donc localement intégrable. On a un problème uniquement en $+\infty$ (car en 0 la fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ est continue). Or, pour $x \geq 1$, $0 \leq e^{-x^2} \leq e^{-x}$ qui est intégrable sur \mathbb{R}^+ . Par comparaison, on obtient que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ est convergente.

Ex 2. Pour x fixé, on voit aisément que $f_n(x)$ tend vers 0 (car $-1 \leq \cos(nx) \leq 1$ et par une application du théorème des gendarmes). On note f la fonction valant 0 sur tout \mathbb{R} . On a

$$f_n \xrightarrow[n]{simple} f.$$

D'autre part,

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup\left\{\frac{1}{\sqrt{n}}|\cos(nx)|, x \in \mathbb{R}\right\} = \frac{1}{\sqrt{n}} \longrightarrow 0.$$

Ainsi, on a $f_n \xrightarrow[n]{unif} f$.

Ex 3. a) Il s'agit de la sempiternelle série géométrique de raison x , elle converge pour $|x| < 1$. Donc $I =]-1, 1[$.

b) $S(x) = \frac{x}{1-x}$

c) S_1 est la somme des dérivées terme à terme de la série S , on a donc $S_1 = S'$ sur I (ceci est dû aux propriétés des séries entières.), donc $S_1(x) = (1-x)^{-2}$.

d) Si on dérive S_2 terme à terme on trouve S . Donc S_2 est la primitive de S , nulle en 0. En écrivant $S(x) = -1 + 1/(1-x)$, on trouve $S_2(x) = -x - \ln(|1-x|) = -x - \ln(1-x)$. La dérivation terme à terme de S_2 est légal car il s'agit toujours de séries entières (le rayon de convergence de S_2 est 1 aussi).

e) On a $S_3(x) = xS_1(x)$

f) On a $S_4(x) = S(x^2)$, le calcul est valable pour $|x^2| \leq 1$ c'est à dire pour $x \in I$.

g) On a $S_5(x) = S_2\left(\frac{\cos(x)}{2}\right)$, ceci est valable pour x tel que $|\frac{\cos(x)}{2}| < 1$, c'est à dire tout x réel.

Ex 4. On a

$$a_n(h) = \frac{1}{\pi} \left(\left[\frac{\sin(nt)}{n} h(t) \right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \frac{\sin(nt)}{n} h'(t) dt \right).$$

Le crochet étant nul, on trouve la première formule annoncée (car $\sin(0) = \sin(2\pi n) = 0$ et h bornée). D'autre part,

$$b_n(h) = \frac{1}{\pi} \left(\left[\frac{-\cos(nt)}{n} h(t) \right]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \frac{\cos(nt)}{n} h'(t) dt \right).$$

Cette fois, le crochet n'est pas nul. Lorsque l'on calcule les coeffs de Fourier $a_n(h)$ et $b_n(h)$ on calcule en fait des intégrales généralisée si h n'est pas continue en 0 et 2π ; les valeurs de ces fonctions en 0 et 2π n'importent pas. Ce qui nous intéresse c'est

$$\lim_{c \rightarrow 0^+} \int_c^\pi h(t) \sin(nt) dt + \lim_{c \rightarrow 2\pi^-} \int_\pi^c h(t) \sin(nt) dt.$$

Il faut donc prendre les limites dans les crochets (faire tendre t vers 0, faire tendre t vers 2π mais en restant dans l'intervalle d'intégration); finalement, on trouve la formule demandée.

b) On l'obtient en faisant un calcul simple ou en évoquant le fait que le vecteur constant est orthogonal aux autres (par le produit scalaire vu en cours).

c) Il faut calculer $a_0(h)$ par ailleurs, la formule (1) n'étant valable que pour $n \geq 1$. On trouve $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} t dt = 2\pi$ et d'ailleurs que tous les a_i sont nuls. On a

$$b_n(h) = \frac{1}{\pi n} (0 - 2\pi) = \frac{-2}{n}$$

On trouve $S_h(t) = \pi + \sum_{n \geq 1} \frac{-2 \sin(nt)}{n}$

d) On note H cette fonction. On a $H' = h$, de sorte que, pour $n \geq 1$

$$a_n(H) = \frac{-1}{n} b_n(h) = \frac{2}{n^2} \text{ et } b_n(H) = \frac{1}{\pi n} \frac{-(2\pi)^2}{2} + 0 = -\frac{2\pi}{n}.$$

D'autre part, $a_0(H) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x^2/2 dx = 4\pi^2/3$. On obtient donc bien la série de Fourier indiquée.

e) D'après Dirichlet, puisque H est C_1 par morceaux, on a

$$S_H(0) = \frac{H(0^+) + H(0^-)}{2} = \pi^2 = \frac{2\pi^2}{3} + \sum_{n \geq 1} \frac{2}{n^2}.$$

On résout et on trouve le résultat demandé

UE8. Examen septembre 2003.**Exercice 1** *Etudier la convergence des séries $((a_n))_{n \geq 1}$ de terme général suivant :*

$$a.) \quad a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \qquad b.) \quad a_n = \exp(-n^3)$$

Exercice 2 *Etudier la convergence des intégrales suivantes :*

$$a.) \quad \int_0^1 \frac{t}{\sin(t)} dt, \qquad b.) \quad \int_0^{+\infty} e^{\cos(x)} dx$$

Exercice 3 *Vrai ou faux ? On demande une preuve si c'est vrai, un contre exemple si c'est faux.*a.) Si la suite $(a_n)_n$ décroît et tend vers 0 alors la série de terme général a_n converge.b.) Soit $v(t)$ la vitesse au temps t d'un mobile. On suppose que pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $v(t) > 0$. On note D_t la distance parcourue par le mobile entre le temps 0 et le temps t et $D = \lim_{t \rightarrow +\infty} D_t$ la distance totale parcourue par le mobile (pendant l'éternité...). Est-il vrai que nécessairement $D = +\infty$?c.) Une fonction 2π -périodique est égale à la somme de sa série de Fourier.**Exercice 4**Soit $(f_n)_{n \geq 1}$ la suite de fonctions définies sur $[0, 1]$ par

$$f_n(x) = (1 - x)^n.$$

A. a.) Montrer que la suite (f_n) converge simplement sur $[0, 1]$ vers une fonction f que l'on déterminera.b.) La suite (f_n) converge-t-elle uniformément vers f sur $[0, 1]$?B. On se place maintenant sur l'intervalle $I = [1/2, 1]$. On note S_n la somme partielle associée à la série de fonctions $((f_n))$; c'est à dire, pour tout $x \in I$,

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x).$$

On pourra remarquer (et utiliser !) le fait que pour x fixé, la suite $(f_n(x))_n$ est une suite géométrique.a.) Calculer $S_n(x)$ pour tout $n \geq 1$ et tout $x \in I$.b.) En utilisant B.a., montrer que la suite de fonctions $(S_n)_n$ converge simplement (vers une fonction limite que l'on appellera S).c.) Montrer de nouveau que la suite de fonctions $(S_n)_n$ converge simplement sans utiliser la formule établie en B.a..d.) La série $((f_n))$ converge-t-elle uniformément ? Normalement ?e.) Calculer $\int_I S(x) dx$ f.) Peut-on affirmer que $\lim_n \int_I S_n(x) dx = \int_I S(x) dx$?

Exercice 5

On considère la fonction 2π périodique f définie pour tout $x \in [0, 2\pi[$ par

$$f(x) = \sqrt{x^3 + 1}.$$

On note, comme d'habitude $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ la suite de ses coefficients de Fourier.

Surtout ne calculez pas les coefficients a_n et b_n !!

a.) Comment sait-on que la série de Fourier de f converge ? Que vaut la somme de la série de Fourier ?

b.) Comment sait-on que les suites (a_n^2) et (b_n^2) tendent vers 0 ? (Ind : on pourra utiliser un théorème sur les séries de Fourier)