

Partitions d'entiers, q -séries et lemme de Bailey.

Frédéric Jouhet

Institut Camille Jordan
Université Lyon 1

Journées de combinatoire de Bordeaux
Labri, mercredi 4 février 2009

Partitions d'entiers

Partition de $n \in \mathbb{N}^*$ de longueur l : suite d'entiers

$$\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_l > 0)$$

tels que

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_l = n.$$

Les parts de λ sont : $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l$.

Partitions d'entiers

Partition de $n \in \mathbb{N}^*$ de longueur l : suite d'entiers

$$\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_l > 0)$$

tels que

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_l = n.$$

Les parts de λ sont : $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l$.

Fonction génératrice :

$$\sum_{n \geq 0} p(n)q^n = \prod_{i \geq 1} \frac{1}{1 - q^i}.$$

Partitions d'entiers

Partition de $n \in \mathbb{N}^*$ de longueur l : suite d'entiers

$$\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_l > 0)$$

tels que

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_l = n.$$

Les parts de λ sont : $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l$.

Fonction génératrice :

$$\sum_{n \geq 0} p(n)q^n = \prod_{i \geq 1} \frac{1}{1 - q^i}.$$

Identité combinatoire :

$$\prod_{i \geq 1} (1 + q^i) = \prod_{i \geq 1} \frac{1 - q^{2i}}{1 - q^i} = \prod_{i \geq 1} \frac{1}{1 - q^{2i-1}}$$

nombre de partitions de n en parts impaires = nombre de partitions de n en parts distinctes

Identités de Rogers-Ramanujan

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^n)} = \prod_{\substack{n=1 \\ n \equiv \pm 1 \pmod{5}}}^{\infty} \frac{1}{1-q^n}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2+n}}{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^n)} = \prod_{\substack{n=1 \\ n \equiv \pm 2 \pmod{5}}}^{\infty} \frac{1}{1-q^n}$$

Identités de Rogers-Ramanujan

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^n)} = \prod_{\substack{n=1 \\ n \equiv \pm 1 \pmod{5}}}^{\infty} \frac{1}{1-q^n}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2+n}}{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^n)} = \prod_{\substack{n=1 \\ n \equiv \pm 2 \pmod{5}}}^{\infty} \frac{1}{1-q^n}$$

Interprétations combinatoires :

- nombre de partitions de n telles que $\lambda_i - \lambda_{i+1} \geq 2$ = nombre de partitions de n en parts $\equiv \pm 1 \pmod{5}$

Identités de Rogers-Ramanujan

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^n)} = \prod_{\substack{n=1 \\ n \equiv \pm 1 \pmod{5}}}^{\infty} \frac{1}{1-q^n}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2+n}}{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^n)} = \prod_{\substack{n=1 \\ n \equiv \pm 2 \pmod{5}}}^{\infty} \frac{1}{1-q^n}$$

Interprétations combinatoires :

- nombre de partitions de n telles que $\lambda_i - \lambda_{i+1} \geq 2 =$ nombre de partitions de n en parts $\equiv \pm 1 \pmod{5}$
- nombre de partitions de n en parts ≥ 2 telles que $\lambda_i - \lambda_{i+1} \geq 2 =$ nombre de partitions de n en parts $\equiv \pm 2 \pmod{5}$.

Notations des q -séries

Pour $|q| < 1$, on définit le q -factoriel montant :

$$(a; q)_n \equiv (a)_n := \begin{cases} 1, & n = 0, \\ (1 - a)(1 - aq) \cdots (1 - aq^{n-1}), & n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Notations des q -séries

Pour $|q| < 1$, on définit le q -factoriel montant :

$$(a; q)_n \equiv (a)_n := \begin{cases} 1, & n = 0, \\ (1 - a)(1 - aq) \cdots (1 - aq^{n-1}), & n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Notation compacte :

$$(a_1, \dots, a_m)_n := (a_1)_n \cdots (a_m)_n.$$

Notations des q -séries

Pour $|q| < 1$, on définit le q -factoriel montant :

$$(a; q)_n \equiv (a)_n := \begin{cases} 1, & n = 0, \\ (1-a)(1-aq)\cdots(1-aq^{n-1}), & n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Notation compacte :

$$(a_1, \dots, a_m)_n := (a_1)_n \cdots (a_m)_n.$$

Origine : $\lim_{q \rightarrow 1} \frac{1 - q^a}{1 - q} = a$ et donc

$$\lim_{q \rightarrow 1} \frac{(q^a; q)_n}{(1 - q)^n} = a(a + 1) \cdots (a + n - 1)$$

(symbole de Pochhammer)

Coefficients q -binomiaux

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} &\equiv \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q &:= & \frac{(q)_n}{(q)_k (q)_{n-k}} \\ & &= & \frac{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^n)}{(1-q)\dots(1-q^k)(1-q)\dots(1-q^{n-k})}. \end{aligned}$$

Coefficients q -binomiaux

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} &\equiv \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q &:= & \frac{(q)_n}{(q)_k (q)_{n-k}} \\ & &= & \frac{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^n)}{(1-q)\dots(1-q^k)(1-q)\dots(1-q^{n-k})}. \end{aligned}$$

On remarque que :

$$\lim_{q \rightarrow 1} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \binom{n}{k}.$$

Coefficients q -binomiaux

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} &\equiv \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q &:= & \frac{(q)_n}{(q)_k (q)_{n-k}} \\ & &= & \frac{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^n)}{(1-q)\dots(1-q^k)(1-q)\dots(1-q^{n-k})}. \end{aligned}$$

On remarque que :

$$\lim_{q \rightarrow 1} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \binom{n}{k}.$$

$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ = fonction génératrice des partitions de longueur $\leq k$ en parts $\leq n - k$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \in \mathbb{N}[q].$$

Lemme de Bailey

(α_n, β_n) est une paire de Bailey relative à a si

$$\beta_n = \sum_{k=0}^n \frac{\alpha_k}{(q)_{n-k}(aq)_{n+k}} \quad \forall n \geq 0.$$

Lemme de Bailey

(α_n, β_n) est une paire de Bailey relative à a si

$$\beta_n = \sum_{k=0}^n \frac{\alpha_k}{(q)_{n-k}(aq)_{n+k}} \quad \forall n \geq 0.$$

Lemme (Bailey, 1950)

Si (α_n, β_n) paire de Bailey relative à a , alors (α'_n, β'_n) est aussi une paire de Bailey relative à a , où

$$\alpha'_n = \frac{(b, c)_n}{(aq/b, aq/c)_n} (aq/bc)^n \alpha_n,$$

$$\beta'_n = \sum_{k=0}^n \frac{(b, c)_k (aq/bc)_{n-k}}{(q)_{n-k} (aq/b, aq/c)_n} (aq/bc)^k \beta_k.$$

Lemme de Bailey

(α_n, β_n) est une paire de Bailey relative à a si

$$\beta_n = \sum_{k=0}^n \frac{\alpha_k}{(q)_{n-k}(aq)_{n+k}} \quad \forall n \geq 0.$$

Lemme (Bailey, 1950)

Si (α_n, β_n) paire de Bailey relative à a , alors (α'_n, β'_n) est aussi une paire de Bailey relative à a , où

$$\alpha'_n = \frac{(b, c)_n}{(aq/b, aq/c)_n} (aq/bc)^n \alpha_n,$$

$$\beta'_n = \sum_{k=0}^n \frac{(b, c)_k (aq/bc)^{n-k}}{(q)_{n-k} (aq/b, aq/c)_n} (aq/bc)^k \beta_k.$$

Lemme de Bailey

(α_n, β_n) est une paire de Bailey relative à a si

$$\beta_n = \sum_{k=0}^n \frac{\alpha_k}{(q)_{n-k}(aq)_{n+k}} \quad \forall n \geq 0.$$

Lemme (Bailey, 1950)

Si (α_n, β_n) paire de Bailey relative à a , alors (α'_n, β'_n) est aussi une paire de Bailey relative à a , où

$$\alpha'_n = \frac{(b, c)_n}{(aq/b, aq/c)_n} (aq/bc)^n \alpha_n,$$

$$\beta'_n = \sum_{k=0}^n \frac{(b, c)_k (aq/bc)_{n-k}}{(q)_{n-k} (aq/b, aq/c)_n} (aq/bc)^k \beta_k.$$

En itérant : notion de chaîne de Bailey (Andrews, 1984) :

$$(\alpha_n, \beta_n) \longrightarrow (\alpha'_n, \beta'_n) \longrightarrow (\alpha''_n, \beta''_n) \longrightarrow \dots$$

Conséquences

Une paire de Bailey classique :

$$\alpha_n = (-1)^n q^{\binom{n}{2}} \frac{1 - aq^{2n}}{1 - a} \frac{(a)_n}{(q)_n}, \quad \beta_n = \delta_{n,0}.$$

Conséquences

Une paire de Bailey classique :

$$\alpha_n = (-1)^n q^{\binom{n}{2}} \frac{1 - aq^{2n}}{1 - a} \frac{(a)_n}{(q)_n}, \quad \beta_n = \delta_{n,0}.$$

Une itération $\Rightarrow (\alpha'_N, \beta'_N)$, qui donne :

$$\sum_{k=0}^N \frac{1 - aq^{2k}}{1 - a} \frac{(a, b, c, q^{-N})_k}{(q, aq/b, aq/c, aq^{N+1})_k} \left(\frac{aq^{1+N}}{bc} \right)^k = \frac{(aq, aq/bc)_N}{(aq/b, aq/c)_N}$$

Conséquences

Une paire de Bailey classique :

$$\alpha_n = (-1)^n q^{\binom{n}{2}} \frac{1 - aq^{2n}}{1 - a} \frac{(a)_n}{(q)_n}, \quad \beta_n = \delta_{n,0}.$$

Une itération $\Rightarrow (\alpha'_N, \beta'_N)$, qui donne :

$$\sum_{k=0}^N \frac{1 - aq^{2k}}{1 - a} \frac{(a, b, c, q^{-N})_k}{(q, aq/b, aq/c, aq^{N+1})_k} \left(\frac{aq^{1+N}}{bc} \right)^k = \frac{(aq, aq/bc)_N}{(aq/b, aq/c)_N}$$

Deux itérations $\Rightarrow (\alpha''_N, \beta''_N)$, qui donne la transformation finie de Watson :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^N \frac{1 - aq^{2k}}{1 - a} \frac{(a, b, c, d, e, q^{-N})_k}{(q, aq/b, aq/c, aq/d, aq/e, aq^{N+1})_k} \left(\frac{a^2 q^{2+N}}{bcde} \right)^k \\ = \frac{(aq, aq/de)_N}{(aq/d, aq/e)_N} \sum_{k=0}^N \frac{(aq/bc, d, e, q^{-N})_k}{(q, aq/b, aq/c, deq^{-N}/a)_k} q^k \end{aligned}$$

Conséquences

Une paire de Bailey classique :

$$\alpha_n = (-1)^n q^{\binom{n}{2}} \frac{1 - aq^{2n}}{1 - a} \frac{(a)_n}{(q)_n}, \quad \beta_n = \delta_{n,0}.$$

Une itération $\Rightarrow (\alpha'_N, \beta'_N)$, qui donne :

$$\sum_{k=0}^N \frac{1 - aq^{2k}}{1 - a} \frac{(a, b, c, q^{-N})_k}{(q, aq/b, aq/c, aq^{N+1})_k} \left(\frac{aq^{1+N}}{bc} \right)^k = \frac{(aq, aq/bc)_N}{(aq/b, aq/c)_N}$$

Deux itérations $\Rightarrow (\alpha''_N, \beta''_N)$, qui donne la transformation finie de Watson :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^N \frac{1 - aq^{2k}}{1 - a} \frac{(a, b, c, d, e, q^{-N})_k}{(q, aq/b, aq/c, aq/d, aq/e, aq^{N+1})_k} \left(\frac{a^2 q^{2+N}}{bcde} \right)^k \\ = \frac{(aq, aq/de)_N}{(aq/d, aq/e)_N} \sum_{k=0}^N \frac{(aq/bc, d, e, q^{-N})_k}{(q, aq/b, aq/c, deq^{-N}/a)_k} q^k \end{aligned}$$

Si $b, c, d, e, N \rightarrow \infty$, on obtient les identités de RR pour $a = 1$ et $a = q$.

Chaîne de Bailey due à Andrews

$m + 1$ itérations du Lemme de Bailey :

Chaîne de Bailey due à Andrews

$m + 1$ itérations du Lemme de Bailey :

Théorème (Andrews, 1975, 1986)

Pour des entiers $m \geq 0$ et $N \geq 0$:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^N \frac{1 - aq^{2k}}{1 - a} \frac{(a, b_1, c_1, \dots, b_{m+1}, c_{m+1}, q^{-N})_k}{(q, aq/b_1, aq/c_1, \dots, aq/b_{m+1}, aq/c_{m+1}, aq^{N+1})_k} \\ & \quad \times \left(\frac{a^{m+1} q^{m+1+N}}{b_1 c_1 \dots b_{m+1} c_{m+1}} \right)^k \\ & = \frac{(aq, aq/b_{m+1} c_{m+1})_N}{(aq/b_{m+1}, aq/c_{m+1})_N} \sum_{0 \leq l_1 \leq \dots \leq l_m \leq N} \frac{a^{l_1 + \dots + l_{m-1}} q^{l_1 + \dots + l_m}}{(b_2 c_2)^{l_1} \dots (b_m c_m)^{l_{m-1}}} \\ & \quad \times \frac{(q^{-N})_{l_m}}{(b_{m+1} c_{m+1} q^{-N}/a)_{l_m}} \prod_{i=1}^m \frac{(b_{i+1}, c_{i+1})_{l_i}}{(aq/b_i, aq/c_i)_{l_i}} \frac{(aq/b_i c_i)_{l_i - l_{i-1}}}{(q)_{l_i - l_{i-1}}}. \end{aligned}$$

Fonction zêta de Riemann

Rappelons que pour $\operatorname{Re}(s) > 1$:

$$\zeta(s) = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^s}$$

Fonction zêta de Riemann

Rappelons que pour $Re(s) > 1$:

$$\zeta(s) = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^s}$$

Aux entiers pairs $2m \geq 2$:

$$\zeta(2m) = (-1)^{m-1} 2^{2m-1} B_{2m} \frac{\pi^{2m}}{(2m)!}$$

où $B_{2m} \in \mathbb{Q}$ nombres de Bernoulli définis par $\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n \geq 0} B_n \frac{x^n}{n!}$

Fonction zêta de Riemann

Rappelons que pour $Re(s) > 1$:

$$\zeta(s) = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^s}$$

Aux entiers pairs $2m \geq 2$:

$$\zeta(2m) = (-1)^{m-1} 2^{2m-1} B_{2m} \frac{\pi^{2m}}{(2m)!}$$

où $B_{2m} \in \mathbb{Q}$ nombres de Bernoulli définis par $\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n \geq 0} B_n \frac{x^n}{n!}$

Ainsi pour $m \in \mathbb{N}^*$, $\zeta(2m)$ est un nombre transcendant.

Comportement diophantien des $\zeta(2m + 1)$, $m \in \mathbb{N}^*$

Apéry (1979) : $\zeta(3) \notin \mathbb{Q}$.

Comportement diophantien des $\zeta(2m + 1)$, $m \in \mathbb{N}^*$

Apéry (1979) : $\zeta(3) \notin \mathbb{Q}$.

Rivoal, Ball-Rivoal (2000) : il y a parmi les $\zeta(2m + 1)$ une infinité de nombres irrationnels.

Comportement diophantien des $\zeta(2m + 1)$, $m \in \mathbb{N}^*$

Apéry (1979) : $\zeta(3) \notin \mathbb{Q}$.

Rivoal, Ball-Rivoal (2000) : il y a parmi les $\zeta(2m + 1)$ une infinité de nombres irrationnels.

Zudilin (2004) : au moins l'un des nombres $\zeta(5), \zeta(7), \zeta(9), \zeta(11)$ est irrationnel.

Comportement diophantien des $\zeta(2m + 1)$, $m \in \mathbb{N}^*$

Apéry (1979) : $\zeta(3) \notin \mathbb{Q}$.

Rivoal, Ball-Rivoal (2000) : il y a parmi les $\zeta(2m + 1)$ une infinité de nombres irrationnels.

Zudilin (2004) : au moins l'un des nombres $\zeta(5), \zeta(7), \zeta(9), \zeta(11)$ est irrationnel.

Rivoal (2002) : au moins l'un des nombres $\zeta(5), \zeta(7), \dots, \zeta(21)$ est irrationnel.

Krattenthaler-Rivoal (2007) : au moins l'un des nombres $\zeta(5), \zeta(7), \dots, \zeta(19)$ est irrationnel.

q -analogues des $\zeta(m)$, $m \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$

Pour $s \in \mathbb{N}^*$ et $|q| < 1$ (Kaneko-Kurokawa-Wakayama, 2003) :

$$\zeta_q(s) := \sum_{k \geq 1} q^k \sum_{d|k} d^{s-1} = \sum_{k \geq 1} k^{s-1} \frac{q^k}{1 - q^k}.$$

q -analogues des $\zeta(m)$, $m \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$

Pour $s \in \mathbb{N}^*$ et $|q| < 1$ (Kaneko-Kurokawa-Wakayama, 2003) :

$$\zeta_q(s) := \sum_{k \geq 1} q^k \sum_{d|k} d^{s-1} = \sum_{k \geq 1} k^{s-1} \frac{q^k}{1 - q^k}.$$

On a pour $s \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$:

$$\lim_{q \rightarrow 1} (1 - q)^s \zeta_q(s) = (s - 1)! \zeta(s)$$

q -analogues des $\zeta(m)$, $m \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$

Pour $s \in \mathbb{N}^*$ et $|q| < 1$ (Kaneko-Kurokawa-Wakayama, 2003) :

$$\zeta_q(s) := \sum_{k \geq 1} q^k \sum_{d|k} d^{s-1} = \sum_{k \geq 1} k^{s-1} \frac{q^k}{1 - q^k}.$$

On a pour $s \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$:

$$\lim_{q \rightarrow 1} (1 - q)^s \zeta_q(s) = (s - 1)! \zeta(s)$$

car

$$\begin{aligned} \zeta_q(s) &= \sum_{k \geq 1} k^{s-1} \sum_{m \geq 0} q^{(m+1)k} \\ &= \sum_{k, m \geq 0} (k + 1)^{s-1} q^{(m+1)(k+1)} \\ &= \sum_{k, m \geq 0} \sum_{j=1}^{s-1} q^{(m+1)(k+1)} (-1)^{s-1-j} S(s-1, j) j! \binom{k+j}{j} \\ &= \sum_{j=1}^{s-1} (-1)^{s-1-j} S(s-1, j) j! \sum_{m \geq 0} \frac{q^{m+1}}{(1 - q^{m+1})^{j+1}}. \end{aligned}$$

Résultats aux entiers pairs

Pour $s = 2m$, on a :

$$\zeta_q(2m) = \frac{B_{2m}}{4m} (1 - E_{2m}(q))$$

où les $E_{2m}(q)$ sont les séries d'Eisenstein.

Résultats aux entiers pairs

Pour $s = 2m$, on a :

$$\zeta_q(2m) = \frac{B_{2m}}{4m} (1 - E_{2m}(q))$$

où les $E_{2m}(q)$ sont les séries d'Eisenstein.

Par la structure de l'espace des formes modulaires sur $SL_2(\mathbb{Z})$, on sait que pour $m \geq 2$:

$$E_{2m}(q) = \sum_{4a+6b=2m} c_{a,b} E_4(q)^a E_6(q)^b, \quad c_{a,b} \in \mathbb{Q}.$$

Résultats aux entiers pairs

Pour $s = 2m$, on a :

$$\zeta_q(2m) = \frac{B_{2m}}{4m} (1 - E_{2m}(q))$$

où les $E_{2m}(q)$ sont les séries d'Eisenstein.

Par la structure de l'espace des formes modulaires sur $SL_2(\mathbb{Z})$, on sait que pour $m \geq 2$:

$$E_{2m}(q) = \sum_{4a+6b=2m} c_{a,b} E_4(q)^a E_6(q)^b, \quad c_{a,b} \in \mathbb{Q}.$$

Théorème (Nesterenko, 1996)

Pour $q \in \mathbb{C}$ tel que $0 < |q| < 1$, au moins trois des nombres q , $E_2(q)$, $E_4(q)$ et $E_6(q)$ sont algébriquement indépendants.

Résultats aux entiers pairs

Pour $s = 2m$, on a :

$$\zeta_q(2m) = \frac{B_{2m}}{4m} (1 - E_{2m}(q))$$

où les $E_{2m}(q)$ sont les séries d'Eisenstein.

Par la structure de l'espace des formes modulaires sur $SL_2(\mathbb{Z})$, on sait que pour $m \geq 2$:

$$E_{2m}(q) = \sum_{4a+6b=2m} c_{a,b} E_4(q)^a E_6(q)^b, \quad c_{a,b} \in \mathbb{Q}.$$

Théorème (Nesterenko, 1996)

Pour $q \in \mathbb{C}$ tel que $0 < |q| < 1$, au moins trois des nombres q , $E_2(q)$, $E_4(q)$ et $E_6(q)$ sont algébriquement indépendants.

Résultats aux entiers pairs

Pour $s = 2m$, on a :

$$\zeta_q(2m) = \frac{B_{2m}}{4m} (1 - E_{2m}(q))$$

où les $E_{2m}(q)$ sont les séries d'Eisenstein.

Par la structure de l'espace des formes modulaires sur $SL_2(\mathbb{Z})$, on sait que pour $m \geq 2$:

$$E_{2m}(q) = \sum_{4a+6b=2m} c_{a,b} E_4(q)^a E_6(q)^b, \quad c_{a,b} \in \mathbb{Q}.$$

Théorème (Nesterenko, 1996)

Pour $q \in \mathbb{C}$ tel que $0 < |q| < 1$, au moins trois des nombres q , $E_2(q)$, $E_4(q)$ et $E_6(q)$ sont algébriquement indépendants.

Conclusion : pour $m \geq 1$ et q algébrique, $\zeta_q(2m)$ est un nombre transcendant.

Résultats aux entiers pairs

Pour $s = 2m$, on a :

$$\zeta_q(2m) = \frac{B_{2m}}{4m} (1 - E_{2m}(q))$$

où les $E_{2m}(q)$ sont les séries d'Eisenstein.

Par la structure de l'espace des formes modulaires sur $SL_2(\mathbb{Z})$, on sait que pour $m \geq 2$:

$$E_{2m}(q) = \sum_{4a+6b=2m} c_{a,b} E_4(q)^a E_6(q)^b, \quad c_{a,b} \in \mathbb{Q}.$$

Théorème (Nesterenko, 1996)

Pour $q \in \mathbb{C}$ tel que $0 < |q| < 1$, au moins trois des nombres q , $E_2(q)$, $E_4(q)$ et $E_6(q)$ sont algébriquement indépendants.

Conclusion : pour $m \geq 1$ et q algébrique, $\zeta_q(2m)$ est un nombre transcendant.

Résultats aux entiers impairs (1)

$\zeta_q(1)$ irrationnel pour certaines valeurs de q (Borwein, 1992).

Résultats aux entiers impairs (1)

$\zeta_q(1)$ irrationnel pour certaines valeurs de q (Borwein, 1992).

$\zeta_q(3)$...on ne sait rien !

Résultats aux entiers impairs (1)

$\zeta_q(1)$ irrationnel pour certaines valeurs de q (Borwein, 1992).

$\zeta_q(3)$...on ne sait rien !

Théorème (Krattenthaler-Rivoal-Zudilin, 2006)

Pour $1/q \in \mathbb{Z} \setminus \{-1; 1\}$ et A entier pair :

$$\dim_{\mathbb{Q}} (\mathbb{Q} + \mathbb{Q}\zeta_q(3) + \cdots + \mathbb{Q}\zeta_q(A-1)) \geq f(A),$$

où

$$f(A) = \max_{\substack{r \in \mathbb{N} \\ 1 \leq r \leq A/2}} f(r; A) \quad \text{avec} \quad f(r; A) := \frac{4rA + A - 4r^2}{\left(\frac{24}{\pi^2} + 2\right)A + 8r^2}$$

Résultats aux entiers impairs (1)

$\zeta_q(1)$ irrationnel pour certaines valeurs de q (Borwein, 1992).

$\zeta_q(3)$...on ne sait rien !

Théorème (Krattenthaler-Rivoal-Zudilin, 2006)

Pour $1/q \in \mathbb{Z} \setminus \{-1; 1\}$ et A entier pair :

$$\dim_{\mathbb{Q}} (\mathbb{Q} + \mathbb{Q}\zeta_q(3) + \cdots + \mathbb{Q}\zeta_q(A-1)) \geq f(A),$$

où

$$f(A) = \max_{\substack{r \in \mathbb{N} \\ 1 \leq r \leq A/2}} f(r; A) \quad \text{avec} \quad f(r; A) := \frac{4rA + A - 4r^2}{\left(\frac{24}{\pi^2} + 2\right)A + 8r^2}$$

Résultats aux entiers impairs (1)

$\zeta_q(1)$ irrationnel pour certaines valeurs de q (Borwein, 1992).

$\zeta_q(3)$...on ne sait rien !

Théorème (Krattenthaler-Rivoal-Zudilin, 2006)

Pour $1/q \in \mathbb{Z} \setminus \{-1; 1\}$ et A entier pair :

$$\dim_{\mathbb{Q}} (\mathbb{Q} + \mathbb{Q}\zeta_q(3) + \cdots + \mathbb{Q}\zeta_q(A-1)) \geq f(A),$$

où

$$f(A) = \max_{\substack{r \in \mathbb{N} \\ 1 \leq r \leq A/2}} f(r; A) \quad \text{avec} \quad f(r; A) := \frac{4rA + A - 4r^2}{\left(\frac{24}{\pi^2} + 2\right)A + 8r^2}$$

Théorème (Krattenthaler-Rivoal-Zudilin, 2006)

Pour $1/q \in \mathbb{Z} \setminus \{-1; 1\}$, au moins l'un des nombres $\zeta_q(3), \zeta_q(5), \zeta_q(7), \zeta_q(9), \zeta_q(11)$ est irrationnel.

Résultats aux entiers impairs (2)

Théorème (J-Mosaki, 2007)

Pour $1/q \in \mathbb{Z} \setminus \{-1; 1\}$ et $A \geq 4$ pair, on a :

$$\dim_{\mathbb{Q}} (\mathbb{Q} + \mathbb{Q}\zeta_q(3) + \cdots + \mathbb{Q}\zeta_q(A-1)) \geq g(A),$$

où

$$g(A) = \max_{\substack{r \in \mathbb{N} \\ 1 \leq r \leq A/2}} g(r; A) \quad \text{avec} \quad g(r; A) := \frac{4rA + A - 4r^2}{\left(\frac{24}{\pi^2} + 2\right)A - \frac{24}{\pi^2} + 8r^2}$$

Résultats aux entiers impairs (2)

Théorème (J-Mosaki, 2007)

Pour $1/q \in \mathbb{Z} \setminus \{-1; 1\}$ et $A \geq 4$ pair, on a :

$$\dim_{\mathbb{Q}} (\mathbb{Q} + \mathbb{Q}\zeta_q(3) + \cdots + \mathbb{Q}\zeta_q(A-1)) \geq g(A),$$

où

$$g(A) = \max_{\substack{r \in \mathbb{N} \\ 1 \leq r \leq A/2}} g(r; A) \quad \text{avec} \quad g(r; A) := \frac{4rA + A - 4r^2}{\left(\frac{24}{\pi^2} + 2\right)A - \frac{24}{\pi^2} + 8r^2}$$

Résultats aux entiers impairs (2)

Théorème (J-Mosaki, 2007)

Pour $1/q \in \mathbb{Z} \setminus \{-1; 1\}$ et $A \geq 4$ pair, on a :

$$\dim_{\mathbb{Q}} (\mathbb{Q} + \mathbb{Q}\zeta_q(3) + \cdots + \mathbb{Q}\zeta_q(A-1)) \geq g(A),$$

où

$$g(A) = \max_{\substack{r \in \mathbb{N} \\ 1 \leq r \leq A/2}} g(r; A) \quad \text{avec } g(r; A) := \frac{4rA + A - 4r^2}{\left(\frac{24}{\pi^2} + 2\right)A - \frac{24}{\pi^2} + 8r^2}$$

Théorème (J-Mosaki, 2007)

Pour $1/q \in \mathbb{Z} \setminus \{-1; 1\}$, au moins l'un des nombres $\zeta_q(3), \zeta_q(5), \zeta_q(7), \zeta_q(9)$ est irrationnel.

Méthode (1)

Proposition (Nesterenko, 1985)

Soient un entier $N \geq 2$ et des réels v_1, \dots, v_N . Supposons qu'il existe N suites d'entiers $(p_{j,n})_{n \geq 0}$ et des réels α_1 et α_2 avec $\alpha_2 > 0$ tels que :

$$i) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} \log |p_{1,n}v_1 + \dots + p_{N,n}v_N| = -\alpha_1,$$

$$ii) \text{ pour tout } j \in \{1, \dots, N\}, \text{ on a } \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} \log |p_{j,n}| \leq \alpha_2.$$

Alors :

$$\dim_{\mathbb{Q}} (\mathbb{Q}v_1 + \dots + \mathbb{Q}v_N) \geq 1 + \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$$

Méthode (1)

Proposition (Nesterenko, 1985)

Soient un entier $N \geq 2$ et des réels v_1, \dots, v_N . Supposons qu'il existe N suites d'entiers $(p_{j,n})_{n \geq 0}$ et des réels α_1 et α_2 avec $\alpha_2 > 0$ tels que :

$$i) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} \log |p_{1,n}v_1 + \dots + p_{N,n}v_N| = -\alpha_1,$$

$$ii) \text{ pour tout } j \in \{1, \dots, N\}, \text{ on a } \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} \log |p_{j,n}| \leq \alpha_2.$$

Alors :

$$\dim_{\mathbb{Q}} (\mathbb{Q}v_1 + \dots + \mathbb{Q}v_N) \geq 1 + \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$$

Méthode (1)

Proposition (Nesterenko, 1985)

Soient un entier $N \geq 2$ et des réels v_1, \dots, v_N . Supposons qu'il existe N suites d'entiers $(p_{j,n})_{n \geq 0}$ et des réels α_1 et α_2 avec $\alpha_2 > 0$ tels que :

$$i) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} \log |p_{1,n}v_1 + \dots + p_{N,n}v_N| = -\alpha_1,$$

$$ii) \text{ pour tout } j \in \{1, \dots, N\}, \text{ on a } \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} \log |p_{j,n}| \leq \alpha_2.$$

Alors :

$$\dim_{\mathbb{Q}} (\mathbb{Q}v_1 + \dots + \mathbb{Q}v_N) \geq 1 + \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$$

Une série hypergéométrique basique :

$$\tilde{S}_n(q) := (q)_n^{A-2r} \sum_{k \geq 1} (1 - q^{2k+n}) \frac{(q^{k-rm}, q^{k+n+1})_{rm}}{(q^k)_{n+1}^A} q^{k(A-2r)n/2+kA/2-k}$$

Méthode (1)

Proposition (Nesterenko, 1985)

Soient un entier $N \geq 2$ et des réels v_1, \dots, v_N . Supposons qu'il existe N suites d'entiers $(p_{j,n})_{n \geq 0}$ et des réels α_1 et α_2 avec $\alpha_2 > 0$ tels que :

$$i) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} \log |p_{1,n}v_1 + \dots + p_{N,n}v_N| = -\alpha_1,$$

$$ii) \text{ pour tout } j \in \{1, \dots, N\}, \text{ on a } \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} \log |p_{j,n}| \leq \alpha_2.$$

Alors :

$$\dim_{\mathbb{Q}} (\mathbb{Q}v_1 + \dots + \mathbb{Q}v_N) \geq 1 + \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$$

Une série hypergéométrique basique :

$$\tilde{S}_n(q) := (q)_n^{A-2r} \sum_{k \geq 1} (1 - q^{2k+n}) \frac{(q^{k-rm}, q^{k+n+1})_{rm}}{(q^k)_{n+1}^A} q^{k(A-2r)n/2+kA/2-k}$$

Combinaisons linéaires :

$$\tilde{S}_n(q) = \hat{P}_{0,n}(q) + \sum_{\substack{j=3 \\ j \text{ impair}}}^{A-1} \hat{P}_{j,n}(q) \zeta_q(j) \quad \text{où } \hat{P}_{j,n}(q) \in \mathbb{Q}(q)$$

Méthode (2)

On montre que :

$$D_n(q) \hat{P}_{j,n}(q) \in \mathbb{Z} \left[\frac{1}{q} \right] \quad \forall j \in \{0, 3, 5, \dots, A-1\}$$

où $D_n(q) = (A-1)! q^{\lfloor \alpha n^2 + \beta n + \gamma \rfloor} d_n(1/q)^A$, $\alpha = -A/8 - r^2/2$ et $d_n(q) = \text{ppcm}(q-1, \dots, q^n - 1)$.

Méthode (2)

On montre que :

$$D_n(q)\hat{P}_{j,n}(q) \in \mathbb{Z} \left[\frac{1}{q} \right] \quad \forall j \in \{0, 3, 5, \dots, A-1\}$$

où $D_n(q) = (A-1)! q^{\lfloor \alpha n^2 + \beta n + \gamma \rfloor} d_n(1/q)^A$, $\alpha = -A/8 - r^2/2$ et $d_n(q) = \text{ppcm}(q-1, \dots, q^n-1)$.

L'asymptotique de $\tilde{S}_n(q)$, $D_n(q)$ et $\hat{P}_{j,n}(q)$ redonne le résultat de Krattenthaler, Rivoal et Zudilin.

Méthode (2)

On montre que :

$$D_n(q)\hat{P}_{j,n}(q) \in \mathbb{Z} \left[\frac{1}{q} \right] \quad \forall j \in \{0, 3, 5, \dots, A-1\}$$

où $D_n(q) = (A-1)! q^{\lfloor \alpha n^2 + \beta n + \gamma \rfloor} d_n(1/q)^A$, $\alpha = -A/8 - r^2/2$ et $d_n(q) = \text{ppcm}(q-1, \dots, q^n-1)$.

L'asymptotique de $\tilde{S}_n(q)$, $D_n(q)$ et $\hat{P}_{j,n}(q)$ redonne le résultat de Krattenthaler, Rivoal et Zudilin.

Théorème (J-Mosaki, 2007)

On a

$$\tilde{D}_n(q)\hat{P}_{j,n}(q) \in \mathbb{Z} \left[\frac{1}{q} \right] \quad \forall j \in \{0, 3, 5, \dots, A-1\}$$

où $\tilde{D}_n(q) = (A-1)! q^{\lfloor \alpha n^2 + \beta n + \gamma \rfloor} d_n(1/q)^{A-1}$.

Utilisation de la formule d'Andrews

Il faut montrer que :

$$\frac{1}{1 - q^{-k}} \frac{d_n(1/q)^{A-s}}{(A-s)!} \left[\frac{d^{A-s}}{du^{A-s}} \sum_{j=k}^n e_j(u)(1 - q^{n-2j}u^2) \right]_{u=1} \in \mathbb{Z} \left[q; \frac{1}{q} \right]$$

Utilisation de la formule d'Andrews

Il faut montrer que :

$$\frac{1}{1 - q^{-k}} \frac{d_n(1/q)^{A-s}}{(A-s)!} \left[\frac{d^{A-s}}{du^{A-s}} \sum_{j=k}^n e_j(u)(1 - q^{n-2j}u^2) \right]_{u=1} \in \mathbb{Z} \left[q; \frac{1}{q} \right]$$

Par la formule d'Andrews :

$$\sum_{j=k}^n e_j(u)(1 - q^{n-2j}u^2) = \sum_j v_j(u)$$

Utilisation de la formule d'Andrews

Il faut montrer que :

$$\frac{1}{1 - q^{-k}} \frac{d_n(1/q)^{A-s}}{(A-s)!} \left[\frac{d^{A-s}}{du^{A-s}} \sum_{j=k}^n e_j(u)(1 - q^{n-2j}u^2) \right]_{u=1} \in \mathbb{Z} \left[q; \frac{1}{q} \right]$$

Par la formule d'Andrews :

$$\sum_{j=k}^n e_j(u)(1 - q^{n-2j}u^2) = \sum_{\underline{j}} v_{\underline{j}}(u)$$

et avec une étude arithmétique

$$\frac{1}{1 - q^{-k}} \frac{d_n(1/q)^{A-s}}{(A-s)!} \left[\frac{d^{A-s}}{du^{A-s}} v_{\underline{j}}(u) \right]_{u=1} \in \mathbb{Z} \left[q; \frac{1}{q} \right]$$