

Percolation de premier passage et problèmes de compétition

Régine Marchand

Institut Elie Cartan, Université Henri Poincaré, Nancy

JCB 2012, Bordeaux

- ① Modèle de croissance aléatoire:
la percolation de premier passage
- ② Un modèle de compétition entre espèces:
la percolation de premier passage à deux types
- ③ Le cas équitable: les deux espèces ont même vitesse
- ④ Le cas biaisé: les deux espèces ont des vitesses différentes
- ⑤ Un modèle de compétition avec rémission: processus de contact à deux types

Modèle de croissance aléatoire: la percolation de premier passage classique

- Espace: la grille \mathbb{Z}^d
- Temps de passage aléatoires $t(e)$ strictement positifs, i.i.d, à densité , indexés par les arêtes
- Distance aléatoire:
$$d(x, y) = \inf_{\gamma: x \leftrightarrow y} \sum_{e \in \gamma} t(e).$$
- Points mouillés au temps t :
$$B_t = \{x \in \mathbb{Z}^d : d(0, x) \leq t\}.$$

Modèle de croissance aléatoire: la percolation de premier passage classique

- Espace: la grille \mathbb{Z}^d
- Temps de passage aléatoires $t(e)$ strictement positifs, i.i.d, à densité , indexés par les arêtes
- Distance aléatoire:
$$d(x, y) = \inf_{\gamma: x \leftrightarrow y} \sum_{e \in \gamma} t(e).$$
- Points mouillés au temps t :
$$B_t = \{x \in \mathbb{Z}^d : d(0, x) \leq t\}.$$

Question

Comportements asymptotiques:

- *vitesse directionnelle:* $d(0, nx) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} ?$
- *forme asymptotique:* $B_t \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} ?$

Résultat de croissance linéaire: théorème de forme asymptotique

$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ + Théorème ergodique sous-additif

Résultat de croissance linéaire: théorème de forme asymptotique

$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ + Théorème ergodique sous-additif

- Constante de temps $\mu(e_1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{d(0, ne_1)}{n}$ p.s.
- $\mu(\cdot)$ dans chaque direction rationnelle, puis sur \mathbb{R}^d .
- μ est une norme.
- $\frac{B_t}{t} \rightarrow B_\mu$.

Au premier ordre, $B_t \simeq tB_\mu$.

Résultat de croissance linéaire: théorème de forme asymptotique

$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ + Théorème ergodique sous-additif

- Constante de temps $\mu(e_1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{d(0, ne_1)}{n}$ p.s.
- $\mu(\cdot)$ dans chaque direction rationnelle, puis sur \mathbb{R}^d .
- μ est une norme.
- $\frac{B_t}{t} \rightarrow B_\mu$.

Au premier ordre, $B_t \simeq tB_\mu$.

Question

Forme asymptotique ? Stricte convexité ?

Boules obtenues ? [K86, HM95, CEG11]

Fluctuations ?

Résultat de croissance linéaire: théorème de forme asymptotique

$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ + Théorème ergodique sous-additif

- Constante de temps $\mu(e_1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{d(0, ne_1)}{n}$ p.s.
- $\mu(\cdot)$ dans chaque direction rationnelle, puis sur \mathbb{R}^d .
- μ est une norme.
- $\frac{B_t}{t} \rightarrow B_\mu$.

Au premier ordre, $B_t \simeq tB_\mu$.

Question

Forme asymptotique ? Stricte convexité ?

Boules obtenues ? [K86, HM95, CEG11]

Fluctuations ?

Théorème (Résultat de comparaison, vdBK93)

$$t_1 \prec t_2 \Rightarrow \mu_2 < \mu_1$$

Un modèle de compétition entre espèces: la percolation de premier passage à deux types

- Espace: la grille \mathbb{Z}^d
- Deux sources distinctes s_1 et s_2
- propagation des deux espèces: deux familles de voids $(t_1(e))$ et $(t_2(e))$ indexées par les arêtes
- un site reste définitivement occupé par la première espèce qui l'atteint.

Un modèle de compétition entre espèces: la percolation de premier passage à deux types

- Espace: la grille \mathbb{Z}^d
- Deux sources distinctes s_1 et s_2
- propagation des deux espèces: deux familles de voids $(t_1(e))$ et $(t_2(e))$ indexées par les arêtes
- un site reste définitivement occupé par la première espèce qui l'atteint.

Question

Situation finale?

- *Soit une infection encercle l'autre*
- *Soit coexistence*

$\mathbb{P}(\text{Coex}(s_1, s_2)) > 0?$

[HP98]: modèle de Richardson à deux types (temps exponentiels)

- Cas déterministe: $t_1 = t_2$ et $t_1 < t_2$
- Cas aléatoire: si on éloigne les deux sources, on récupère le comportement déterministe au premier ordre.

Conjecture (HP98)

- $t_1 = t_2$ alors $\mathbb{P}(\text{Coex}(s_1, s_2)) > 0$.
- $t_1 < t_2$ alors $\mathbb{P}(\text{Coex}(s_1, s_2)) = 0$.

Le cas équitable: $t_1 = t_2$

$$D(s_1) = \{x : d(x, s_1) < d(x, s_2)\} \quad \text{et} \quad D(s_2) = \{x : d(x, s_2) < d(x, s_1)\}.$$

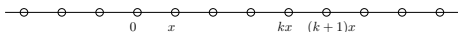
Théorème (HP98)

$d = 2$, temps exponentiels: $\mathbb{P}(\text{Coex}(s_1, s_2)) > 0$.

Théorème (GM05, H05)

d quelconque, temps de passage "presque" quelconques:
 $\mathbb{P}(\text{Coex}(s_1, s_2)) > 0$.

Idée de preuve: 1. Il existe x tel que $\mathbb{P}(Coex(0, x) > 0$



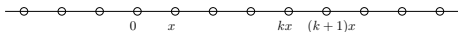
$$Z_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n d(\mathbf{0}, kx) - d(x, kx)$$

$$\mathbb{E} Z_n = \frac{\mathbb{E} d(\mathbf{0}, nx)}{n} \sim \mu(x).$$

$$\tilde{Z}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} d(x, -kx) - d(\mathbf{0}, -kx)$$

$$\mathbb{E} \tilde{Z}_n = \frac{\mathbb{E} d(\mathbf{0}, -nx)}{n} \sim \mu(x).$$

Idée de preuve: 1. Il existe x tel que $\mathbb{P}(Coex(0, x) > 0) > 0$

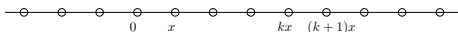


$$Z_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n d(\mathbf{0}, kx) - d(x, kx) \qquad \mathbb{E} Z_n = \frac{\mathbb{E} d(\mathbf{0}, nx)}{n} \sim \mu(x).$$

$$\tilde{Z}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} d(x, -kx) - d(\mathbf{0}, -kx) \qquad \mathbb{E} \tilde{Z}_n = \frac{\mathbb{E} d(\mathbf{0}, -nx)}{n} \sim \mu(x).$$

- si x ne survit pas: $\forall k \geq K \ d(\mathbf{0}, kx) - d(x, kx) \leq 0 \Rightarrow \overline{\lim} Z_n \leq 0,$

Idée de preuve: 1. Il existe x tel que $\mathbb{P}(Coex(0, x)) > 0$

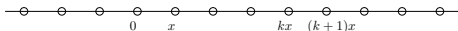


$$Z_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n d(0, kx) - d(x, kx) \quad \mathbb{E} Z_n = \frac{\mathbb{E} d(0, nx)}{n} \sim \mu(x).$$

$$\tilde{Z}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} d(x, -kx) - d(0, -kx) \quad \mathbb{E} \tilde{Z}_n = \frac{\mathbb{E} d(0, -nx)}{n} \sim \mu(x).$$

- si x ne survit pas: $\forall k \geq K \ d(0, kx) - d(x, kx) \leq 0 \Rightarrow \overline{\lim} Z_n \leq 0$,
- si 0 ne survit pas: $\forall k \geq K \ d(x, -kx) - d(0, -kx) \leq 0 \Rightarrow \overline{\lim} \tilde{Z}_n \leq 0$,

Idée de preuve: 1. Il existe x tel que $\mathbb{P}(Coex(0, x)) > 0$

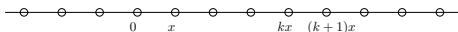


$$Z_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n d(\mathbf{0}, kx) - d(x, kx) \quad \mathbb{E} Z_n = \frac{\mathbb{E} d(\mathbf{0}, nx)}{n} \sim \mu(x).$$

$$\tilde{Z}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} d(x, -kx) - d(\mathbf{0}, -kx) \quad \mathbb{E} \tilde{Z}_n = \frac{\mathbb{E} d(\mathbf{0}, -nx)}{n} \sim \mu(x).$$

- si x ne survit pas: $\forall k \geq K \ d(\mathbf{0}, kx) - d(x, kx) \leq 0 \Rightarrow \overline{\lim} Z_n \leq 0$,
- si $\mathbf{0}$ ne survit pas: $\forall k \geq K \ d(x, -kx) - d(\mathbf{0}, -kx) \leq 0 \Rightarrow \overline{\lim} \tilde{Z}_n \leq 0$,
- $|d(\mathbf{0}, y) - d(x, y)| \leq d(\mathbf{0}, x) \Rightarrow$ si non-coexistence: $\overline{\lim} (Z_n + \tilde{Z}_n) \leq d(\mathbf{0}, x)$.

Idée de preuve: 1. Il existe x tel que $\mathbb{P}(Coex(0, x)) > 0$



$$Z_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n d(\mathbf{0}, kx) - d(x, kx) \quad \mathbb{E} Z_n = \frac{\mathbb{E} d(\mathbf{0}, nx)}{n} \sim \mu(x).$$

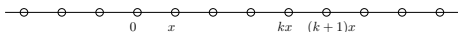
$$\tilde{Z}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} d(x, -kx) - d(\mathbf{0}, -kx) \quad \mathbb{E} \tilde{Z}_n = \frac{\mathbb{E} d(\mathbf{0}, -nx)}{n} \sim \mu(x).$$

- si x ne survit pas: $\forall k \geq K \ d(\mathbf{0}, kx) - d(x, kx) \leq 0 \Rightarrow \overline{\lim} Z_n \leq 0$,
- si $\mathbf{0}$ ne survit pas: $\forall k \geq K \ d(x, -kx) - d(\mathbf{0}, -kx) \leq 0 \Rightarrow \overline{\lim} \tilde{Z}_n \leq 0$,
- $|d(\mathbf{0}, y) - d(x, y)| \leq d(\mathbf{0}, x) \Rightarrow$ si non-coexistence: $\overline{\lim} (Z_n + \tilde{Z}_n) \leq d(\mathbf{0}, x)$.

Donc si $\mathbb{P}(Coex(0, x)) = 0$ alors

$$\mathbb{E} d(\mathbf{0}, x) \geq \mathbb{E} (\overline{\lim} (Z_n + \tilde{Z}_n)) \geq \overline{\lim} \mathbb{E} (Z_n + \tilde{Z}_n) = 2\mu(x).$$

Idée de preuve: 1. Il existe x tel que $\mathbb{P}(Coex(0, x)) > 0$



$$Z_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n d(\mathbf{0}, kx) - d(x, kx) \quad \mathbb{E} Z_n = \frac{\mathbb{E} d(\mathbf{0}, nx)}{n} \sim \mu(x).$$

$$\tilde{Z}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} d(x, -kx) - d(\mathbf{0}, -kx) \quad \mathbb{E} \tilde{Z}_n = \frac{\mathbb{E} d(\mathbf{0}, -nx)}{n} \sim \mu(x).$$

- si x ne survit pas: $\forall k \geq K \ d(\mathbf{0}, kx) - d(x, kx) \leq 0 \Rightarrow \overline{\lim} Z_n \leq 0$,
- si $\mathbf{0}$ ne survit pas: $\forall k \geq K \ d(x, -kx) - d(\mathbf{0}, -kx) \leq 0 \Rightarrow \overline{\lim} \tilde{Z}_n \leq 0$,
- $|d(\mathbf{0}, y) - d(x, y)| \leq d(\mathbf{0}, x) \Rightarrow$ si non-coexistence: $\overline{\lim} (Z_n + \tilde{Z}_n) \leq d(\mathbf{0}, x)$.

Donc si $\mathbb{P}(Coex(0, x)) = 0$ alors

$$\mathbb{E} d(\mathbf{0}, x) \geq \mathbb{E} (\overline{\lim} (Z_n + \tilde{Z}_n)) \geq \overline{\lim} \mathbb{E} (Z_n + \tilde{Z}_n) = 2\mu(x).$$

Mais si x grand, $\mathbb{E} d(\mathbf{0}, x) \sim \mu(x)$: absurde!

Lemme

$$\mathbb{P}(Coex(s_1, s_2)) > 0 \Leftrightarrow \mathbb{P}(Coex(s_3, s_4)) > 0$$

Lemme

$$\mathbb{P}(\text{Coex}(s_1, s_2)) > 0 \Leftrightarrow \mathbb{P}(\text{Coex}(s_3, s_4)) > 0$$

Question

- $\lim_{|s_1 - s_2| \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(\text{Coex}(s_1, s_2)) = 1?$
- *Forme des territoires occupés?*
- *Plus de sources?*

Percolation de premier passage à n types, compétition avec même vitesse

- Temps de passage aléatoires iid sur les arêtes
- n sources distinctes: s_1, s_2, \dots, s_n .
- $D(s_i) = \{x : d(x, s_i) < d(x, s_j) \quad \forall j \neq i\}$.

Percolation de premier passage à n types, compétition avec même vitesse

- Temps de passage aléatoires iid sur les arêtes

- n sources distinctes: s_1, s_2, \dots, s_n .

- $D(s_i) = \{x : d(x, s_i) < d(x, s_j) \quad \forall j \neq i\}$.

μ norme donnée par la PPP, cellules de Voronoï associées:

$$V(s_i) = \{x : \mu(x - s_i) < \mu(x - s_j) \quad \forall j \neq i\}.$$

Percolation de premier passage à n types, compétition avec même vitesse

- Temps de passage aléatoires iid sur les arêtes
- n sources distinctes: s_1, s_2, \dots, s_n .
- $D(s_i) = \{x : d(x, s_i) < d(x, s_j) \quad \forall j \neq i\}$.

μ norme donnée par la PPP, cellules de Voronoï associées:

$$V(s_i) = \{x : \mu(x - s_i) < \mu(x - s_j) \quad \forall j \neq i\}.$$

Théorème (H05,G06)

Si les $(s_i)_i$ sont raisonnables, pour tout $\varepsilon > 0$, pour R suffisamment grand, avec grande probabilité,

$$\forall i \quad D(Rs_i) \text{ ressemble à } V(Rs_i).$$

Percolation de premier passage à n types, compétition avec même vitesse

- Temps de passage aléatoires iid sur les arêtes
- n sources distinctes: s_1, s_2, \dots, s_n .
- $D(s_i) = \{x : d(x, s_i) < d(x, s_j) \quad \forall j \neq i\}$.

μ norme donnée par la PPP, cellules de Voronoï associées:

$$V(s_i) = \{x : \mu(x - s_i) < \mu(x - s_j) \quad \forall j \neq i\}.$$

Théorème (H05,G06)

Si les $(s_i)_i$ sont raisonnables, pour tout $\varepsilon > 0$, pour R suffisamment grand, avec grande probabilité,

$$\forall i \quad D(Rs_i) \text{ ressemble à } V(Rs_i).$$

Question

Y a-t-il nécessairement un cône en cas de coexistence?

Percolation de premier passage à n types, compétition avec même vitesse

- Temps de passage aléatoires iid sur les arêtes
- n sources distinctes: s_1, s_2, \dots, s_n .
- $D(s_i) = \{x : d(x, s_i) < d(x, s_j) \quad \forall j \neq i\}$.

μ norme donnée par la PPP, cellules de Voronoï associées:

$$V(s_i) = \{x : \mu(x - s_i) < \mu(x - s_j) \quad \forall j \neq i\}.$$

Théorème (H05,G06)

Si les $(s_i)_i$ sont raisonnables, pour tout $\varepsilon > 0$, pour R suffisamment grand, avec grande probabilité,

$$\forall i \quad D(Rs_i) \text{ ressemble à } V(Rs_i).$$

Question

Y a-t-il nécessairement un cône en cas de coexistence?

Théorème (P07)

existence de l'angle dans le cas euclidien

Compétition à deux types: le cas biaisé

\mathbb{Z}^d , deux espèces, temps exponentiels de paramètres 1 et λ :
si $t \sim \text{Exp}(1)$ alors $\frac{1}{\lambda}t \sim \text{Exp}(\lambda)$, donc $B_{\text{Exp}(\lambda)} = \lambda B_{\text{Exp}(1)}$.

Conjecture

Si $\lambda \neq 1$, alors $\mathbb{P}_\lambda(\text{Coex}(0, x)) = 0$.

Compétition à deux types: le cas biaisé

\mathbb{Z}^d , deux espèces, temps exponentiels de paramètres 1 et λ :
si $t \sim \text{Exp}(1)$ alors $\frac{1}{\lambda}t \sim \text{Exp}(\lambda)$, donc $B_{\text{Exp}(\lambda)} = \lambda B_{\text{Exp}(1)}$.

Conjecture

Si $\lambda \neq 1$, alors $\mathbb{P}_\lambda(\text{Coex}(0, x)) = 0$.

Théorème (HP00, GM06)

$\{\lambda > 0 : \mathbb{P}_\lambda(\text{Coex}(0, x)) > 0\}$ est au plus dénombrable.

Compétition à deux types: le cas biaisé

\mathbb{Z}^d , deux espèces, temps exponentiels de paramètres 1 et λ :
si $t \sim \text{Exp}(1)$ alors $\frac{1}{\lambda}t \sim \text{Exp}(\lambda)$, donc $B_{\text{Exp}(\lambda)} = \lambda B_{\text{Exp}(1)}$.

Conjecture

Si $\lambda \neq 1$, alors $\mathbb{P}_\lambda(\text{Coex}(0, x)) = 0$.

Théorème (HP00, GM06)

$\{\lambda > 0 : \mathbb{P}_\lambda(\text{Coex}(0, x)) > 0\}$ est au plus dénombrable.

Théorème (GM2006)

$d = 2$: p.s. sur \mathcal{G}^1 , le fort a une densité nulle:

$$\forall t > 0 \quad \frac{|\eta^2(\infty) \cap \mathcal{B}(t)|}{|\mathcal{B}(t)|} \leq \frac{C}{t^{1/2-\beta}}.$$