

# Sommes de variables dépendantes et combinatoire des cumulants

Pierre-Loïc Méliot  
Université Paris-Sud (Orsay)

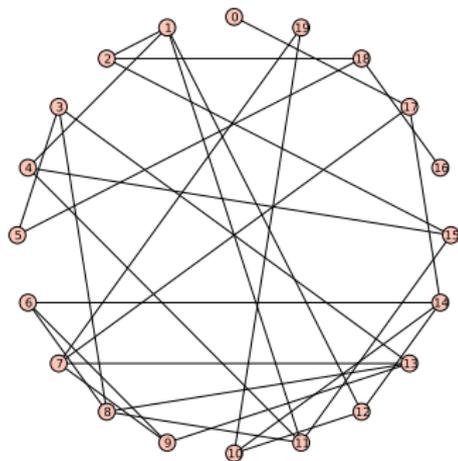
*Travaux en collaboration avec  
V. Féray et A. Nikeghbali (Zürich)*

13 février 2014

# Modèles aléatoires (1)

On s'intéresse à des variables aléatoires issues de modèles de grande taille :

- ① **somme de variables indépendantes** : on considère  $n$  copies indépendantes d'une variable aléatoire  $Y$ , et on s'intéresse à la somme  $S_n = \sum_{i=1}^n Y_i$ .
- ① **nombre de triangles** dans un graphe aléatoire d'Erdős-Rényi  $\mathcal{G}(n, p)$  : on fixe  $n$  sommets et on garde chaque arête du graphe complet  $K_n$  avec probabilité  $p$ . Ci-contre,  $n = 20$ ,  $p = 1/8$ . On compte alors le nombre  $S_n$  de triangles apparaissant dans le graphe.



## Modèles aléatoires (2)

- ② **magnétisation du modèle d'Ising** : on considère une configuration aléatoire de spins  $\sigma \in \{\pm 1\}^n$  de probabilité

$$\mathbb{P}[\sigma] = \frac{1}{Z_n(\beta)} \exp \left( \beta \sum_{1 \leq i \leq n-1} \sigma(i)\sigma(i+1) \right).$$



Ci-dessus, deux configurations aléatoires de paramètre  $\beta = 0.3$  et  $\beta = 0.8$ . On s'intéresse à la magnétisation totale  $S_n = \sum_{i=1}^n \sigma(i)$ .

- ③ **magnétisation de modèles de spins** : on peut rajouter une interaction globale :

$$\mathbb{P}[\sigma] = \frac{1}{Z_n(\beta, \gamma)} \exp \left( \beta \sum_{1 \leq i \leq n-1} \sigma(i)\sigma(i+1) + \frac{\gamma}{n} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \sigma(i)\sigma(j) \right).$$

# Fluctuations de sommes de variables dépendantes

Dans chaque cas,  $S_n = \sum_v Y_v$  est une somme de variables aléatoires “élémentaires”, avec des corrélations entre toutes ces variables. Ces sommes satisfont toutes un **théorème central limite** :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{P}\left[S_n - \mathbb{E}[S_n] \geq x\sqrt{\text{Var } S_n}\right] = \left(\int_x^\infty \frac{e^{-\frac{s^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} ds\right) (1 + o(1)).$$

**Objectif** : pousser l'estimée du TCL à une échelle plus grande :

$$\text{si } t_n \gg \sqrt{\text{Var } S_n}, \quad \mathbb{P}[S_n - \mathbb{E}[S_n] \geq t_n] = ???$$

**Idée** : écrire

$$\mathbb{E}[e^{zS_n}] = e^{\frac{(\text{Var } S_n)z^2}{2}} \psi_n(z) \quad \text{avec } \psi_n(z) \rightarrow \psi(z)$$

au lieu de l'estimée usuelle de  $\mathbb{E}[e^{zS_n/\sqrt{\text{Var } S_n}}]$  (cf. la méthode dite des quasi-puissances, mais qu'on va utiliser de façon beaucoup plus précise).

# 1. Cumulants joints de variables aléatoires

# Moments et cumulants d'une variable aléatoire

La plupart des variables aléatoires  $X$  seront à valeurs dans un ensemble fini. Dans ce cas, les **moments** de  $X$  sont définis par

$$\mathbb{E}[X^l] = \sum_k \mathbb{P}[X = k] k^l,$$

et la fonction génératrice de  $X$  est la série entière  $\mathbb{E}[e^{zX}] = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\mathbb{E}[X^l]}{l!} z^l$ . Les **cumulants** de  $X$  sont les coefficients de la série

$$\log \mathbb{E}[e^{zX}] = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\kappa^{(r)}(X)}{r!} z^r.$$

**Exemple** : si  $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ , alors  $\mathbb{E}[e^{zX}] = e^{\frac{z^2}{2}}$ ,  $\mathbb{E}[X^{2l}] = (2l-1)!!$  et  $\mathbb{E}[X^{2l+1}] = 0$ . On a aussi  $\kappa^{(2)}(X) = 1$ , et  $\kappa^{(r)}(X) = 0$  si  $r \neq 2$ .

# Moments joints et cumulants joints

On aura besoin d'une version multidimensionnelle des moments et des cumulants. Si  $X_1, X_2, \dots, X_r$  sont des v.a., leurs **moments joints**  $\mathbb{E}[(X_1)^{l_1}(X_2)^{l_2} \cdots (X_r)^{l_r}]$  sont les coefficients de

$$\mathbb{E}[e^{z_1 X_1 + \cdots + z_r X_r}] = \sum_{l_1, \dots, l_r} \frac{\mathbb{E}[(X_1)^{l_1}(X_2)^{l_2} \cdots (X_r)^{l_r}]}{l_1! l_2! \cdots l_r!} z_1^{l_1} z_2^{l_2} \cdots z_r^{l_r}.$$

Le **cumulant joint** de  $X_1, \dots, X_r$  est le coefficient

$$\kappa(X_1, \dots, X_r) = \left. \frac{\partial^r}{\partial z_1 \cdots \partial z_r} \right|_{z_1 = \cdots = z_r = 0} (\log \mathbb{E}[e^{z_1 X_1 + \cdots + z_r X_r}]).$$

Pour toute variable  $X$ ,  $\kappa^{(r)}(X) = \kappa(X, \dots, X)$  avec  $X$  répété  $r$  fois.

# Propriétés des cumulants joints

- 1 Les cumulants joints sont **invariants par permutation** des variables, et **multilinéaires**.
- 2 Si  $(X_1, \dots, X_r)$  se scinde en deux familles  $(X_i)_{i \in I}$  et  $(X_j)_{j \in J}$  de **variables indépendantes**, alors  $\kappa(X_1, \dots, X_r) = 0$ .
- 3 Les cumulants joints et les moments joints sont reliés par la combinatoire des **partitions d'ensembles** :

$$\kappa(X_1, \dots, X_r) = \sum_{\Pi \in \mathfrak{P}(\llbracket 1, r \rrbracket)} \mu(\Pi) \prod_{i=1}^{\ell(\Pi)} \mathbb{E} \left[ \prod_{j \in \pi_i} X_j \right],$$

où  $\mu(\Pi) = (-1)^{\ell-1} (\ell - 1)!$  si la partition  $\Pi = \pi_1 \sqcup \dots \sqcup \pi_\ell$  a  $\ell$  parts.

**Exemple** :  $\kappa(X) = \mathbb{E}[X]$ ,  $\kappa(X, Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$ , et

$$\kappa(X, Y, Z) = \mathbb{E}[XYZ] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[YZ] - \mathbb{E}[Y]\mathbb{E}[XZ] - \mathbb{E}[Z]\mathbb{E}[XY] + 2\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]\mathbb{E}[Z].$$

# Convergence mod-Gaussienne et fluctuations précises

## Théorème

Si  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de variables aléatoires telles que

$$\mathbb{E}[e^{zX_n}] = e^{\frac{t_n z^2}{2}} \psi(z) (1 + o(1)) \quad (\text{convergence mod-Gaussienne})$$

avec  $t_n \rightarrow +\infty$  et un  $o(1)$  localement uniforme sur  $\mathbb{C}$ , alors pour tout  $a > 0$ ,

$$\mathbb{P}[X_n \geq t_n a] = \frac{e^{-\frac{t_n a^2}{2}}}{\sqrt{2\pi t_n a^2}} \psi(a) (1 + o(1)) \quad (\text{déviation modérées}).$$

Ce théorème est particulièrement adapté à l'usage des cumulants, car la mod-convergence est équivalente à :

$$\sum_{r=2}^{\infty} \frac{\kappa^{(r)}(X_n)}{r!} z^r = \log \mathbb{E}[e^{zX_n}] = \frac{t_n}{2} z^2 + \log \psi(z) + o(1).$$

pour des v.a. centrées.

# Convergence mod-Gaussienne et cumulants

Soit  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de v.a. centrées telles que :

- ① Il existe une suite  $\alpha_n \rightarrow +\infty$  et une constante  $C$  telle que pour tout  $r \geq 2$ ,

$$|\kappa^{(r)}(S_n)| \leq (Cr)^r \alpha_n. \quad (\star)$$

- ② Il existe  $k \geq 3$  tel que

$$\begin{aligned} \kappa^{(2)}(S_n) &\simeq \sigma^2 \alpha_n \quad ; \quad \kappa^{(3)}(S_n) = \kappa^{(4)}(S_n) = \dots = \kappa^{(k-1)}(S_n) = 0 \\ \kappa^{(k)}(S_n) &\simeq L \alpha_n. \end{aligned}$$

Alors, si  $X_n = (\alpha_n)^{-1/k} S_n$ ,

$$\log \mathbb{E}[e^{zX_n}] = (\alpha_n)^{\frac{k-2}{k}} \frac{\sigma^2 z^2}{2} + \frac{L z^k}{k!} + \sum_{r=k+1}^{\infty} \frac{\kappa^{(r)}(S_n) z^r}{r!} (\alpha_n)^{-\frac{r-k}{k}};$$

$$\mathbb{E}[e^{zX_n}] = e^{(\alpha_n)^{\frac{k-2}{k}} \frac{\sigma^2 z^2}{2}} \exp\left(\frac{L z^k}{k!}\right) (1 + o(1)).$$

## 2. Graphes de dépendance et arbres couvrants

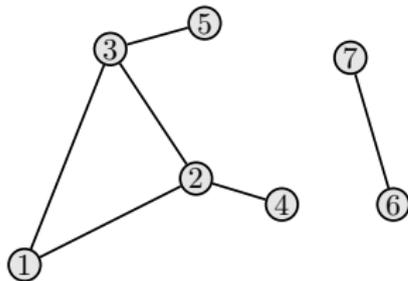
# Cumulants et graphes de dépendance (1)

**Objectif** : évaluer les cumulants d'une somme  $X = \sum_{v \in V} Y_v$  de variables aléatoires dépendantes. Par multilinéarité,

$$\kappa^{(r)}(Y) = \sum_{v_1, v_2, \dots, v_r} \kappa(Y_{v_1}, Y_{v_2}, \dots, Y_{v_r}),$$

donc on peut commencer par évaluer les cumulants “élémentaires”  $\kappa(Y_{v_1}, \dots, Y_{v_r})$ .

**Idee** : introduire le **graphe de dépendance** des variables  $Y_v$ , qui est un graphe  $G = (V, E)$  tel que, si  $V_1 \sqcup V_2 \subset V$  sont sans arête entre un sommet de  $V_1$  et un sommet de  $V_2$ , alors  $\{Y_v\}_{v \in V_1}$  et  $\{Y_v\}_{v \in V_2}$  sont des familles indépendantes.



$$\{Y_1, Y_2, Y_4\} \perp \{Y_6, Y_7\}$$

$$\{Y_1, Y_2, Y_4\} \perp \{Y_5\}$$

## Cumulants et graphes de dépendance (2)

On fixe un graphe de dépendance minimal pour  $\{Y_v\}_{v \in V}$  et si  $v_1, \dots, v_r \in V$ , on note  $H = G[v_1, \dots, v_r]$  le **sous-graphe de  $G$  induit** sur les sommets  $v_1, \dots, v_r$ .

Si  $H$  n'est pas connexe, alors  $\kappa(Y_{v_1}, \dots, Y_{v_r}) = 0$ . Plus généralement :

### Théorème

Supposons  $|Y_v| \leq 1$  p.s. pour tout  $v \in V$ . Alors,

$$|\kappa(Y_{v_1}, \dots, Y_{v_r})| \leq 2^{r-1} \text{ST}_H,$$

où  $\text{ST}_H$  est le nombre d'arbres couvrants de  $H = G[v_1, \dots, v_r]$ .

On va développer les cumulants en termes des moments :

$$K = \kappa(Y_{v_1}, \dots, Y_{v_r}) = \sum_{\Pi \in \mathfrak{P}(\llbracket 1, r \rrbracket)} \mu(\Pi) M_\Pi, \quad \text{où } M_\Pi = \prod_{i=1}^{\ell(\Pi)} \mathbb{E} \left[ \prod_{j \in \pi_i} Y_{v_j} \right].$$

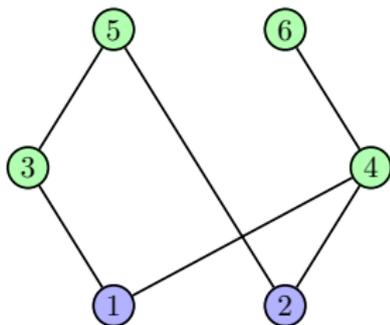
## Partitions d'ensembles donnant les mêmes moments joints

Soit  $\Pi \in \mathfrak{P}(\llbracket 1, r \rrbracket)$ . Si  $\pi_i$  est une part de  $\Pi$  qui se scinde en deux blocs  $A$  et  $B$  sans arête de  $H$  entre elles, alors

$$\mathbb{E} \left[ \prod_{j \in \pi_i} Y_{v_j} \right] = \mathbb{E} \left[ \prod_{j \in A} Y_{v_j} \right] \times \mathbb{E} \left[ \prod_{j \in B} Y_{v_j} \right].$$

Par conséquent,  $M_\Pi = M_{\Pi'}$ , où  $\Pi' = \Phi_H(\Pi)$  est la partition plus fine que  $\Pi$  obtenue en remplaçant chaque part  $\pi_i$  par les composantes connexes de  $H[\pi_i]$ .

**Exemple :**



$$\begin{aligned}\Pi &= \{1, 2\} \sqcup \{3, 4, 5, 6\} \\ \Phi_H(\Pi) &= \{1\} \sqcup \{2\} \sqcup \{3, 4\} \sqcup \{5, 6\} \\ H/\Pi &= \end{aligned}$$



# Une fonctionnelle sur les graphes

On réunit donc les partitions d'ensemble suivant la règle :

$$K = \sum_{\Pi'} M_{\Pi'} \left( \sum_{\Pi \mid \Phi_H(\Pi) = \Pi'} \mu(\Pi) \right) = \sum_{\Pi'} M_{\Pi'} G_H(\Pi').$$

La fonctionnelle  $G_H(\Pi')$  vaut 0 si les  $H[\pi'_i]$  ne sont pas connexes ; sinon, elle ne dépend que du multigraphe  $H/\Pi'$  obtenu en contractant les parts de  $\Pi'$  :

$$G_{H/\Pi} = \sum_{\substack{\Theta \in \mathfrak{P}(\llbracket 1, \ell(\Pi) \rrbracket) \\ \Theta \perp H/\Pi}} \mu(\Theta) = (-1)^{\ell(\Pi)-1} F_{H/\Pi}.$$

## Lemme

Pour tout graphe  $H$ ,

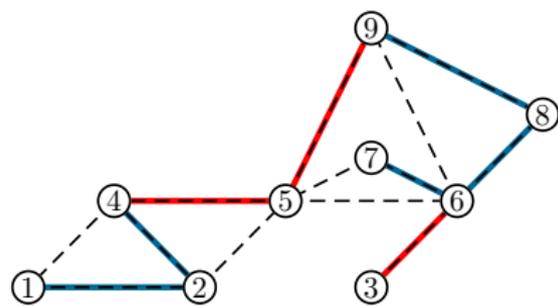
$$F_H = \sum_{F \subseteq E(H) \text{ avec } (V(H), F) \text{ connexe}} (-1)^{|F| - |V(H)| + 1} = T_H(1, 0).$$

# Majoration par le nombre d'arbres couvrants bicolores

En particulier, avec  $H$  connexe,  $F_H = T_H(1, 0) \leq T_H(1, 1) = ST_H$ . On écrit alors :

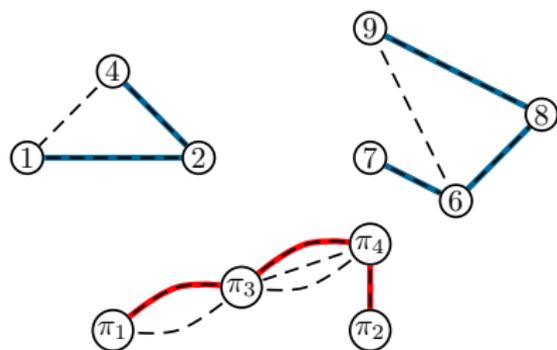
$$\begin{aligned}
 K &= \sum_{\Pi \in \mathfrak{P}(\llbracket 1, r \rrbracket)} M_{\Pi} G_H(\Pi) \leq \sum_{\Pi \in \mathfrak{P}(\llbracket 1, r \rrbracket)} F_{H/\Pi} \left( \prod_{i=1}^{\ell(\Pi)} \mathbb{1}_{H[\pi_i] \text{ est connexe}} \right) \\
 &\leq \sum_{\Pi \in \mathfrak{P}(\llbracket 1, r \rrbracket)} ST_{H/\Pi} \left( \prod_{i=1}^{\ell(\Pi)} ST_{H[\pi_i]} \right) = 2^{r-1} ST_H.
 \end{aligned}$$

En effet :



$\Leftrightarrow$

$$\Pi = \{1, 2, 4\} \sqcup \{3\} \sqcup \{5\} \sqcup \{6, 7, 8, 9\}$$



### 3. Cas des graphes de dépendance creux

# Sommes de variables avec un graphe de dépendance creux

On revient maintenant à la somme de variables  $X = \sum_v Y_v$ , et on suppose que les sommets du graphe  $G$  ont tous leur degré inférieur à  $D \ll N = |V(G)|$  (**graphe creux**).

## Théorème

Avec  $|Y_v| \leq 1$  pour tout  $v \in V$ , on a

$$\kappa^{(r)}(X) \leq (2D + 2)^{r-1} r^{r-2} N.$$

**Idée de preuve** : dans le développement  $\kappa^{(r)}(X) = \sum_{v_1, \dots, v_r} \kappa(Y_{v_1}, \dots, Y_{v_r})$ ,

- 1 on choisit le premier sommet  $v_1$  :  $N$ .
- 2 on choisit les autres sommets  $v_2, \dots, v_r$  : d'abord les voisins de  $v_1$ , puis les voisins des voisins de  $v_1$ , etc. :  $(D + 1)^{r-1}$ .
- 3 la borne sur le cumulatif élémentaire est au pire  $2^{r-1} \text{ST}_{K_r} = 2^{r-1} r^{r-2}$ .

# Décompte de sous-graphes dans un graphe d'Erdős-Rényi

**Application** : nombre de triangles  $S_n = \sum_{i \neq j \neq k} \mathbb{1}_{(i,j,k) \in G}$  dans  $G = \mathcal{G}(n, p)$ .

Le graphe de dépendance a pour sommets les triplets  $(i \neq j \neq k)$ , donc  $N = n^{\downarrow 3}$ . Deux sommets  $(i \neq j \neq k)$  et  $(i' \neq j' \neq k')$  sont connectés lorsqu'ils partagent au moins deux valeurs, donc  $D \leq Cn$  pour une certaine constante  $C$ .

$$\kappa^{(r)}(S_n) \leq (Cr)^r n^{r+2} \quad ; \quad \kappa^{(r)}\left(\frac{S_n}{n}\right) \leq (Cr)^r n^2$$

et on obtient la borne  $(\star)$  pour  $T_n/n$ , d'où les estimées :

$$\mathbb{P}\left[S_n \geq n^{\uparrow 3} p^3 + n^{7/3} x\right] \simeq G\left(n^{1/3} x, 18p^5(1-p)\right) \exp\left(\frac{(7-8p)x^3}{3\sqrt{2p(1-p)}}\right).$$

## Variantes :

- 1 Au lieu d'un triangle, n'importe quel motif de sous-graphe dans  $\mathcal{G}(n, p)$ .
- 2 Nombre de progressions arithmétiques dans une partie aléatoire de  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ .

## 4. Un exemple de graphe de dépendance complet : le modèle d'Ising

# Cumulants joints des spins du modèle d'Ising

Dans le cas général, le graphe de dépendance  $G$  peut être le graphe complet (toutes les variables sont corrélées), mais on peut utiliser la même technique :

- 1 **estimer chaque cumulant élémentaire**  $\kappa(Y_{v_1}, \dots, Y_{v_r})$  en fonction du graphe induit  $H = G[v_1, \dots, v_r]$  (forme, position dans  $G$ ), en développant sur les moments et en regroupant les partitions d'ensemble donnant le même moment ;
- 2 **sommer les cumulants élémentaires** en regroupant suivant la nature de  $H$ .

## Théorème

Pour toutes positions  $i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_{2r}$ ,

$$\kappa(\sigma(i_1), \dots, \sigma(i_{2r})) = (-1)^{r-1} \sum_{\substack{\delta \text{ chemin de Dyck} \\ \text{de longueur } 2r \\ \delta(1), \dots, \delta(2r-1) \neq 0}} \left( \prod_{j=1}^{2r-1} \delta(j) \right) x^{(i_{a_2} - i_{a_1}) + \dots + (i_{a_{2r}} - i_{a_{2r-1}})},$$

où  $x = \tanh \beta$  et  $(a_1 \leq a_2)(a_3 \leq a_4) \dots$  est l'appariement non-croisé associé à  $\delta$ .

# Magnétisation du modèle d'Ising

**Exemple** :  $\kappa(\sigma(i_1), \dots, \sigma(i_6)) = 4x^{i_6+i_5+i_3-i_4-i_2-i_1} + 12x^{i_6+i_5+i_4-i_3-i_2-i_1}$ .

On déduit du théorème les bornes suivantes :

$$|\kappa(\sigma(i_1), \dots, \sigma(i_{2r}))| \leq (2r - 2)! x^{i_{2r} + (i_{2r-1} - i_{2r-2}) + \dots + (i_3 - i_2) - i_1},$$
$$|\kappa^{(2r)}(S_n)| \leq n(2r - 1)!! (2r - 3)!! (e^{2\beta} + 1)^{r-1}.$$

et donc,

$$\mathbb{P}[S_n \geq xn^{3/4}] \simeq \frac{e^{-\frac{n^{1/2}e^{2\beta}x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi} e^\beta n^{1/4} x} \exp\left(-\frac{3e^{6\beta} - e^{2\beta}}{24} x^4\right).$$

**Remarque** : on n'a pas eu à calculer exactement  $\mathbb{E}[e^{zS_n}]$ ; c'est l'avantage de la méthode des cumulants.

# Magnétisation du modèle mixte Curie-Weiss/Ising

L'approche donnée par la méthode des cumulants permet de donner de nouvelles estimées sur les fluctuations de modèles de spins (objectif : la dimension 2).

**Exemple** : modèle avec une interaction locale et une interaction globale :

$$\mathbb{P}[\sigma] = \frac{1}{Z_n(\beta, \gamma)} \exp \left( \beta \sum_{1 \leq i \leq n-1} \sigma(i)\sigma(i+1) + \frac{\gamma}{n} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \sigma(i)\sigma(j) \right).$$

① Si  $\gamma < e^{-2\beta}$ , alors

$$\mathbb{P}[S_n \geq xn^{3/4}] \simeq \frac{e^{-\frac{n^{1/2}(1-\gamma e^{2\beta})e^{2\beta}x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi(1-\gamma e^{2\beta})} e^{\beta} n^{1/4} x} \exp \left( -\frac{3e^{6\beta} - e^{2\beta}}{24} x^4 \right).$$

② Si  $\gamma = e^{-2\beta}$ , alors

$$\mathbb{P}[S_n \geq xn^{3/4}] \simeq \frac{\int_x^\infty \exp \left( -\frac{3e^{6\beta} - e^{2\beta}}{24} s^4 \right) ds}{\int_{\mathbb{R}} \exp \left( -\frac{3e^{6\beta} - e^{2\beta}}{24} s^4 \right) ds}.$$